# X Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne Juniorów

## Zawody indywidualne

(poniedziałek, 16 maja 2022 r.)

**1.** Niech $n \geqslant 3$. Przypuśćmy, że $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są $n$ parami różnymi liczbami rzeczywistymi. Wyznacz, w zależności od $n$, najmniejszą możliwą liczbę różnych wartości przyjmowanych przez następujące $n$ liczb:

$$a_1 + a_2, \quad a_2 + a_3, \quad \ldots, \quad a_{n-1} + a_n, \quad a_n + a_1.$$

**2.** Rozwiąż w liczbach całkowitych następujący układ równań:

$$\begin{cases} x^2 = yz + 1, \\ y^2 = zx + 1, \\ z^2 = xy + 1. \end{cases}$$

**3.** Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym

$$\sphericalangle A = 60^\circ, \quad \sphericalangle B = 100^\circ, \quad \sphericalangle C = 140^\circ.$$

Wykaż, że pięciokąt ten można umieścić w kole o promieniu $\frac{2}{3}AD$.

**4.** Niech $a$, $b$ będą dodatnimi liczbami całkowitymi o tej własności, że $\frac{a}{b} > \sqrt{2}$. Wykaż, że

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{2ab} > \sqrt{2}.$$

**5.** Liczbę całkowitą $n \geqslant 1$ nazwiemy *dobrą* jeśli spełniona jest następująca własność:

> Jeżeli dodatnia liczba całkowita jest podzielna przez każdą z dziewięciu liczb $n+1$, $n+2$, $\ldots$, $n+9$, to jest również podzielna przez liczbę $n+10$.

Ile jest dobrych liczb całkowitych $n \geqslant 1$?

*Version: Polish*
*Czas: 210 minut*