XIX Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody stopnia pierwszego — część testowa

(28 września 2023 r.)

Rozwiązania zadań testowych

1. Istnieją dwie liczby pierwsze, których suma jest równa

N a) 17;

T b) 18;

T c) 19.

Komentarz

a) Liczba 17 jest nieparzysta, więc każde jej przedstawienie w postaci sumy dwóch liczb całkowitych ma jeden składnik parzysty i jeden nieparzysty. Jedyną parzystą liczbą pierwszą jest 2, jednak $17-2=15$ nie jest liczbą pierwszą. Wynika z tego, że przedstawienie liczby 17 w postaci sumy dwóch liczb pierwszych nie istnieje.

b) $18=7+11$

c) $19=2+17$

2. Pewne dwie liczby całkowite większe od 10 różnią się o 10. Wynika, z tego, że te dwie liczby

T a) mają takie same cyfry jedności;

N b) mają cyfry dziesiątek różniące się o 1;

T c) dają takie same reszty przy dzieleniu przez 2.

Komentarz

a) Dwie liczby różniące się o 10 dają takie same reszty przy dzieleniu przez 10, a cyfra jedności dodatniej liczby całkowitej równa jest właśnie reszcie z dzielenia tej liczby przez 10.

c) Dwie liczby o parzystej różnicy są albo obie parzyste, albo obie nieparzyste. To oznacza, że dają takie same reszty przy dzieleniu przez 2.

b) Liczby 90 oraz 100 różnią się o 10, a ich cyfry dziesiątek różnią się o 9.

3. Sześciokąt $ABCDEF$ jest foremny. Wynika z tego, że

T a) trójkąt ABC jest równoramienny;

T b) trójkąt ACE jest równoboczny;

T c) trójkąt ACF jest prostokątny.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

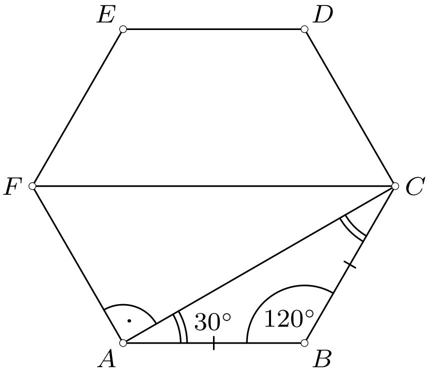
Ministerstwo Edukacji i Nauki

Komentarz

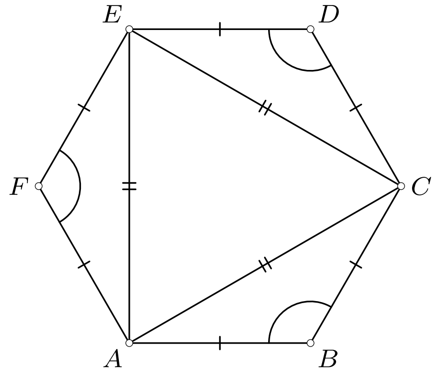
a) Skoro sześciokąt $ABCDEF$ jest foremny, to $AB=BC$.

c) Ponieważ kąt wewnętrzny sześciokąta foremnego ma miarę 120°, więc każdy z kątów przy podstawie AC trójkąta równoramiennego ABC ma miarę $\frac{1}{2}(180^\circ-120^\circ)=30^\circ$ (rys. 1). Stąd w szczególności wynika, że

$$\sphericalangle FAC=\sphericalangle FAB-\sphericalangle BAC=120^\circ-30^\circ=90^\circ.$$



rys. 1



rys. 2

b) Każde dwa z trójkątów ABC, CDE, EFA są przystające (cecha bok–kąt–bok), skąd $AC=CE=EA$ (rys. 2), czyli trójkąt ACE jest równoboczny.

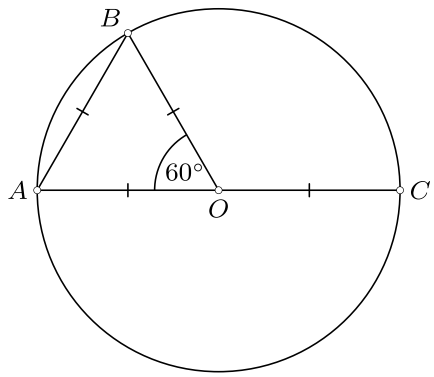
4. Dany jest okrąg o promieniu 5. Istnieje cięciwa tego okręgu, która ma długość

T	a) 5;
T	b) 10;
N	c) 15.

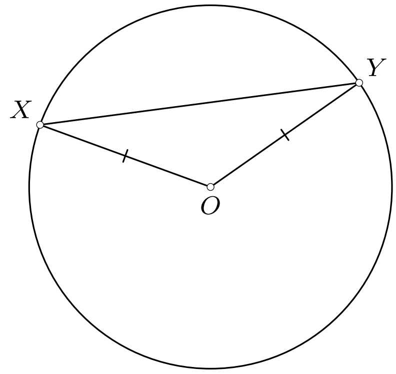
Komentarz

Niech O będzie środkiem danego okręgu, a A, B, C takimi punktami tego okręgu, że $\sphericalangle AOB=60^\circ$ oraz punkt O leży na odcinku AC (rys. 3).

a) Trójkąt AOB jest równoramienny i kąt pomiędzy jego ramionami ma miarę 60°, więc trójkąt ten jest równoboczny. Stąd $AB=OA=5$. Wobec tego cięciwa AB danego okręgu ma długość 5.



rys. 3



rys. 4

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana
ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

b) Średnica AC danego okręgu ma długość $OA+OC=10$.

c) Rozważmy dowolną cięciwę XY danego okręgu (rys. 4). Z nierówności trójkąta zastosowanej do punktów O, X, Y wynika, że $XY \leqslant OX+OY=10$. Każda cięciwa danego okręgu ma zatem długość nie większą od 10.

5. W wyniku zwiększenia liczby 50 o 100% uzyskujemy tę samą liczbę, co w wyniku

| N | a) zwiększenia liczby 100 o 50%;
| N | b) zmniejszenia liczby 150 o 50%;
| T | c) zmniejszenia liczby 200 o 50%.

Komentarz

W wyniku zwiększenia liczby 50 o 100%, czyli o liczbę 50, otrzymamy liczbę 100.

a) $100+50\%\cdot 100=150\%\cdot 100=150$

b) $150-50\%\cdot 150=50\%\cdot 150=75$

c) $200-50\%\cdot 200=50\%\cdot 200=100$

6. Istnieje trójkąt ostrokątny o wszystkich trzech bokach całkowitej długości i obwodzie równym

| T | a) 3;
| N | b) 4;
| T | c) 5.

Komentarz

a) Takim trójkątem jest trójkąt równoboczny o boku 1.

c) Trójkąt równoramienny o podstawie długości 1 i ramieniu długości 2 ma wszystkie boki całkowitej długości i obwód równy 5. Trójkąt ten jest ostrokątny — kąty przy podstawie są ostre, a pozostały kąt mniejszy od każdego z nich (gdyż ramię jest dłuższe od podstawy).

b) Liczba 4 posiada tylko jedno przedstawienie w postaci sumy trzech dodatnich liczb całkowitych, mianowicie: $4=1+1+2$. Nie istnieje jednak trójkąt o bokach długości 1, 1, 2, gdyż liczba 2 nie jest mniejsza od sumy dwóch pozostałych.

7. Kostka do gry ma kształt sześcianu, który na każdej ścianie ma inną liczbę oczek, od 1 do 6. Jaś rzucił trzema takimi kostkami, a Małgosia — czterema. Następnie każde z nich dodało liczby wyrzuconych przez siebie oczek. Wynika z tego, że

| N | a) wynik uzyskany przez Małgosię jest większy od wyniku uzyskanego przez Jasia;
| N | b) różnica pomiędzy wynikiem Jasia i wynikiem Małgosi równa jest co najwyżej 6;
| N | c) wyniki otrzymane przez Jasia i Małgosię są różne.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki

Komentarz

a), c) Małgosia mogła wyrzucić cztery jedynki, a Jaś — trzy szóstki. Wówczas wynik Małgosi, równy 4, jest mniejszy od wyniku Jasia, równego 18. Co więcej, różnica między tymi wynikami jest większa od 6.

b) Mogło się zdarzyć, że Małgosia wyrzuciła cztery trójki, a Jaś — trzy czwórki. Wówczas każde z nich uzyskałoby wynik $3 \cdot 4 = 12$.

8. Liczby całkowite a, b spełniają nierówności $a > 1$ oraz $b > 9$. Wynika z tego, że

T a) $a+b > 11$;

T b) $ab > 19$;

N c) $b-a \geqslant 8$.

Komentarz

a), b) Skoro $a > 1$ i $b > 9$ oraz liczby a i b są całkowite, to zachodzą nierówności $a \geqslant 2$ oraz $b \geqslant 10$. Wobec tego $a+b \geqslant 12 > 11$ oraz $ab \geqslant 20 > 19$.

c) Na przykład liczby $a = b = 10$ spełniają nierówności $a > 1$ oraz $b > 9$, ale $b-a = 0 < 8$.

9. Na bokach kwadratu o boku 1 wybrano trzy różne punkty A, B, C. Wynika z tego, że co najmniej jeden z odcinków AB, BC, CA ma długość

N a) nie większą od 1;

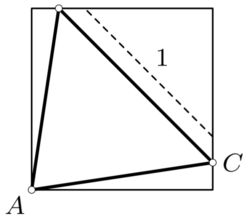
N b) nie mniejszą od 1;

N c) różną od 1.

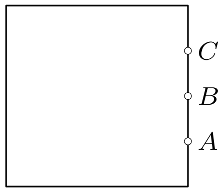
Komentarz

a) Punkty A, B, C można wybrać w taki sposób, że każdy bok trójkąta ABC ma długość większą od 1. Przykładowo można za punkt A przyjąć jeden z wierzchołków kwadratu, a punkty B i C wybrać na nieprzyległych doń bokach w taki sposób, aby odcinek BC miał długość większą od 1 (rys. 5).

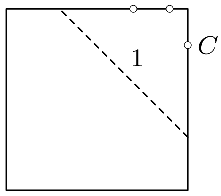
b) Punkty A, B, C można wybrać w taki sposób, że każdy z odcinków AB, BC, CA ma długość mniejszą od 1 — na przykład zaznaczając wszystkie punkty na tym samym boku, ale nie na jego końcach (rys. 6) lub na dwóch bokach o wspólnym końcu w pobliżu tego końca (rys. 7).



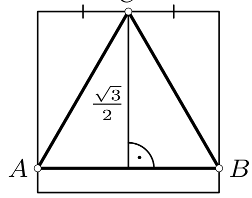
rys. 5



rys. 6



rys. 7



rys. 8

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

c) Punkty A, B, C można wybrać w taki sposób, że trójkąt ABC jest równoboczny o boku 1 (rys. 8). W tym celu wystarczy wybrać dowolny bok kwadratu, jego środek oznaczyć przez C, a odcinek AB wybrać tak, aby był równoległy do wybranego boku kwadratu i odległy odeń o $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ (wysokość trójkąta równobocznego o boku 1).

10. Istnieją takie dwie naturalne liczby 19-cyfrowe, których iloczyn jest liczbą

T a) 37-cyfrową;

T b) 38-cyfrową;

N c) 39-cyfrową.

Komentarz

a) Jeżeli $a = b = 10^{18}$, to iloczyn $ab = 10^{36}$ jest liczbą 37-cyfrową.

b) Jeżeli $a = 2 \cdot 10^{18}$ oraz $b = 5 \cdot 10^{18}$, to iloczyn $ab = 10^{37}$ jest liczbą 38-cyfrową.

c) Przypuśćmy, że liczby naturalne a oraz b są 19-cyfrowe. To oznacza, że

$$10^{18} \leqslant a < 10^{19} \quad \text{oraz} \quad 10^{18} \leqslant b < 10^{19}.$$

W konsekwencji

$$10^{36} \leqslant ab < 10^{38},$$

co oznacza, że iloczyn ab ma co najmniej 37 cyfr i co najwyżej 38 cyfr. Nie może zatem być liczbą 39-cyfrową.

11. W pola tablicy 3×3 wpisano liczby całkowite od 1 do 9, każdą dokładnie raz. Wynika z tego, że suma trzech liczb w pewnym wierszu jest

N a) parzysta;

T b) nieparzysta;

T c) równa co najmniej 15.

Komentarz

Zauważmy, że suma wszystkich liczb wpisanych w pola tablicy jest równa 45.

a) Jeśli liczby zostaną wpisane na przykład w sposób przedstawiony na rysunku 9, to w każdym wierszu (a także w każdej kolumnie) suma wpisanych liczb będzie nieparzysta (równa 15).

2	9	4
7	5	3
6	1	8

rys. 9

b) Przypuśćmy, że w każdym z trzech wierszy sumy wpisanych liczb są liczbami parzystymi. Wówczas suma tych trzech sum jest liczbą parzystą. Z drugiej strony jest to suma wszystkich liczb znajdujących się w tablicy, czyli 45 — liczba nieparzysta. Uzyskana sprzeczność oznacza, że nie jest możliwe, aby suma trzech liczb w każdym wierszu była parzysta.

c) Przypuśćmy, że w każdym wierszu suma wpisanych liczb jest mniejsza od 15. Wówczas suma tych trzech sum jest liczbą mniejszą od 45. Z drugiej strony jest to suma wszystkich liczb znajdujących się w tablicy, czyli dokładnie 45. Uzyskana sprzeczność oznacza, że w pewnym wierszu suma trzech wpisanych liczb jest nie mniejsza od 15.

12. Liczba $7^{19}+7^{20}+7^{21}$ jest podzielna przez

$\boxed{\text{T}}$ 19;

$\boxed{\text{N}}$ 20;

$\boxed{\text{T}}$ 21.

Komentarz

Zauważmy, że

$$7^{19}+7^{20}+7^{21}=7^{19}\cdot 1+7^{19}\cdot 7+7^{19}\cdot 49=7^{19}\cdot(1+7+49)=7^{19}\cdot 57=7^{19}\cdot 3\cdot 19.$$

Liczba ta jest podzielna przez 19 oraz $3\cdot 7=21$, ale nie jest podzielna przez 20 (nie jest nawet parzysta).

13. Przez $\mathrm{NWD}(x,y)$ oznaczamy największy wspólny dzielnik liczb x oraz y. Istnieją dodatnie liczby całkowite a, b, c o tej własności, że $\mathrm{NWD}(a,b)=2$, $\mathrm{NWD}(b,c)=4$ oraz

$\boxed{\text{N}}$ a) $\mathrm{NWD}(a,c)=3$;

$\boxed{\text{T}}$ b) $\mathrm{NWD}(a,c)=6$;

$\boxed{\text{N}}$ c) $\mathrm{NWD}(a,c)=12$.

Komentarz

a) Jeśli $\mathrm{NWD}(a,b)=2$, to liczba a jest parzysta. Jeśli ponadto $\mathrm{NWD}(b,c)=4$, to liczba c również jest parzysta. Stąd wniosek, że największy wspólny dzielnik liczb a i c jest liczbą parzystą, więc różną od 3.

c) Jeśli $\mathrm{NWD}(b,c)=4$, to liczba b jest podzielna przez 4. Gdyby ponadto zachodziła równość $\mathrm{NWD}(a,c)=12$, to liczba a również byłaby podzielna przez 4. Stąd wniosek, że największy wspólny dzielnik liczb a i b dzieli się przez 4 — jest on jednak równy 2. Uzyskana sprzeczność oznacza, że $\mathrm{NWD}(a,c)\neq 12$.

b) Jeśli $a=6$, $b=4$, $c=12$, to $\mathrm{NWD}(a,b)=2$, $\mathrm{NWD}(b,c)=4$ oraz $\mathrm{NWD}(a,c)=6$.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki

14. W czworokącie wypukłym $ABCD$ zachodzą równości $AB=AC=2$, $CB=CD=1$. Wynika z tego, że

T a) $BD \leqslant 2$;

T b) $\sphericalangle BAD \leqslant 60^\circ$;

N c) pole czworokąta $ABCD$ jest nie większe od pola trójkąta równobocznego o boku 2.

Komentarz

a) Z nierówności trójkąta zastosowanej do trójkąta BCD wynika, że

$$BD \leqslant CB+CD=1+1=2.$$

b) Rozważmy okrąg o środku w punkcie C i promieniu 1. Poprowadźmy z punktu A odcinki AX i AY styczne do tego okręgu. Ponieważ $AC=2$, więc każdy z trójkątów prostokątnych ACX, ACY jest połówką trójkąta równobocznego, a zatem $\sphericalangle XAY=60^\circ$. Pozostaje zauważyć, że kąt BAD leży wewnątrz kąta XAY.

c) Załóżmy, że $AD=2$, czyli czworokąt $ABCD$ składa się z dwóch trójkątów równoramiennych o bokach 1, 2, 2. Na mocy twierdzenia Pitagorasa wysokość takiego trójkąta opuszczona na podstawę ma długość $\sqrt{2^2-(\frac{1}{2})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{15}$. W takim razie pole czworokąta $ABCD$ jest równe

$$2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\sqrt{15}=\frac{1}{2}\sqrt{15}.$$

Z kolei pole trójkąta równobocznego o boku 2 jest równe $\frac{1}{4}\cdot 2^2\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3}=\frac{1}{2}\sqrt{12}<\frac{1}{2}\sqrt{15}$.

15. W gronie siedmiu osób każdy ma co najmniej 3 znajomych pośród pozostałych osób (przyjmujemy, że jeśli A jest znajomym B, to również B jest znajomym A). Wynika z tego, że w tym gronie

T a) pewna osoba ma co najmniej 4 znajomych pośród pozostałych osób;

N b) pewne dwie osoby mają co najmniej 3 wspólnych znajomych;

N c) pewne trzy osoby znają się wzajemnie.

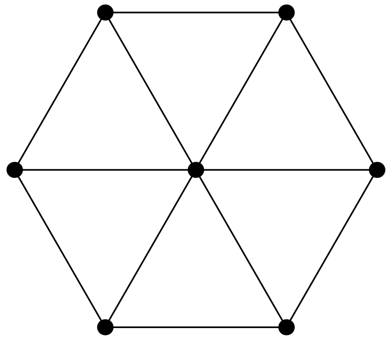
Komentarz

a) Przypuśćmy, że każda osoba ma dokładnie 3 znajomych wśród pozostałych. Jeśli zapytamy każdą osobę, ilu ma znajomych i dodamy uzyskane w odpowiedzi liczby, otrzymamy więc $3\cdot 7=21$. To jednak oznaczałoby, że liczba znajomości w całym siedmioosobowym gronie jest równa $\frac{1}{2}\cdot 21=10,5$ (gdyż o każdej znajomości powiedziały nam dwie osoby), a to nie jest liczba całkowita. To oznacza, że pewna osoba ma co najmniej 4 znajomych.

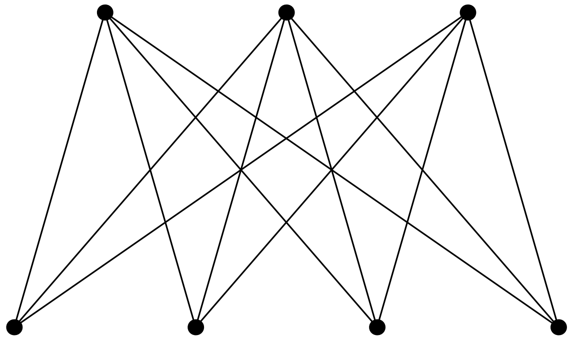
Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana
ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki



rys. 10



rys. 11

b) Jeśli układ znajomości wygląda tak, jak zilustrowano na rysunku 10 (kropki odpowiadają osobom, a odcinki między nimi — znajomościom), to żadne dwie osoby nie mają trzech wspólnych znajomych, mimo że każda ma ich co najmniej 3.

c) Jeśli układ znajomości wygląda tak, jak zilustrowano na rysunku 11, to żadne trzy osoby nie znają się wzajemnie, mimo że każda ma co najmniej 3 znajomych.