# VIII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia pierwszego – część korespondencyjna

(1 września 2012 r. – 29 października 2012 r.)

### Szkice rozwiązań zadań konkursowych

**1.** Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej $n$, liczby

$$n,\ n^5,\ n^9,\ n^{13},\ n^{17},\ldots$$

mają jednakowe cyfry jedności.

*Szkic rozwiązania*

Zaczniemy od wykazania, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej $n$, liczby $n$ oraz $n^5$ mają jednakowe cyfry jedności.

Zauważmy, że jeśli cyfrą jedności liczby $A$ jest cyfra $a$, a liczby $B$ — cyfra $b$, to cyfrą jedności liczby $AB$ jest cyfra jedności liczby $ab$. Opierając się na tym spostrzeżeniu możemy, znając cyfrę jedności liczby $n$, wyznaczyć kolejno cyfry jedności liczb $n^2$, $n^4$ i $n^5$. Wyniki przedstawia następująca tabela.

| cyfra jedności liczby $n$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| cyfra jedności liczby $n^2$ | 0 | 1 | 4 | 9 | 6 | 5 | 6 | 9 | 4 | 1 |
| cyfra jedności liczby $n^4$ | 0 | 1 | 6 | 1 | 6 | 5 | 6 | 1 | 6 | 1 |
| cyfra jedności liczby $n^5$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

Widzimy zatem, że w każdym z dziesięciu przypadków, cyfry jedności liczb $n$ oraz $n^5$ są równe. Innymi słowy, liczba $n^5-n$ jest podzielna przez 10.

Stąd wynika, że $10|n^4(n^5-n)$, czyli $10|n^9-n^5$. A zatem $10|n^4(n^9-n^5)$, czyli $10|n^{13}-n^9$. Kontynuując to rozumowanie dochodzimy do wniosku, że liczby

$$n,\ n^5,\ n^9,\ n^{13},\ n^{17},\ldots$$

mają jednakowe cyfry jedności.

*Uwaga*

Rozwiązanie opiera się na spostrzeżeniu, że liczba $n^5-n$ jest podzielna przez 10. Inny dowód tej podzielności można znaleźć w artykule „O $n$ kolejnych liczbach”, *Kwadrat* nr 5 (czerwiec 2012), zadanie 3.

---

**2.** Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $AD+BC=CD$. Dwusieczne kątów $BCD$ i $CDA$ przecinają się w punkcie $S$. Udowodnij, że $AS=BS$.

*Szkic rozwiązania*

Niech $E$ będzie takim punktem na odcinku $CD$, że $DE=AD$. Wówczas $CE=BC$. Trójkąty $ADS$ i $EDS$ są przystające (cecha bok-kąt-bok), a zatem $AS=ES$. Analogicznie z przystawania trójkątów $BCS$ i $ECS$ wynika, że $BS=ES$. Łącząc dwie ostatnie równości, uzyskujemy tezę.

---

**3.** Liczba naturalna $n$ jest co najmniej trzycyfrowa. Jeżeli pomiędzy cyfrę setek a cyfrę dziesiątek tej liczby wpiszemy znak mnożenia, to po wykonaniu mnożenia otrzymamy połowę liczby $n$. Wyznacz wszystkie liczby $n$ o tej własności.

---

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

*Szkic rozwiązania*

Liczbę $n$ możemy zapisać w postaci $n=100a+b$, gdzie $a$ jest dodatnią liczbą całkowitą, natomiast $b$ — liczbą co najwyżej dwucyfrową. Wówczas warunek opisany w treści zadania przybiera postać równości

$$a\cdot b=\frac{1}{2}(100a+b)\,. \tag{1}$$

Przekształcając równoważnie tę zależność, uzyskujemy kolejno

$$2ab=100a+b$$

$$2ab-100a-b+50=50$$

$$(2a-1)(b-50)=50\,.$$

Stąd wynika, że liczba $2a-1$ jest dodatnim i nieparzystym dzielnikiem liczby 50, a zatem jest ona równa 1, 5 lub 25. Możliwe są więc trzy przypadki.

(1) Jeśli $2a-1=1$, to $b-50=50$. Wtedy jednak $b=100$, co stoi w sprzeczności z założeniem, że liczba $b$ jest co najwyżej dwucyfrowa.

(2) Jeśli $2a-1=5$, to $b-50=10$, czyli $a=3$ oraz $b=60$.

(3) Jeśli $2a-1=25$, to $b-50=2$, czyli $a=13$ oraz $b=52$.

Istnieją zatem dwie liczby $n=\mathbf{360}$ oraz $n=\mathbf{1352}$, które spełniają warunki zadania.

*Uwaga*

Metodzie rozwiązywania równań typu (1) został poświęcony artykuł „Sztuczka z iloczynem”, *Kwadrat* nr 5 (czerwiec 2012).

---

**4.** W balu wzięło udział 102 królewiczów i 103 królewny. Po balu okazało się, że każdy królewicz zatańczył z taką samą liczbą królewien. Udowodnij, że pewne dwie królewny zatańczyły z taką samą liczbą królewiczów.

*Szkic rozwiązania*

Oznaczmy przez $a_i$ liczbę królewiczów, z którymi zatańczyła $i$-ta królewna. Liczby $a_i$ są całkowite i należą do przedziału $\langle 0,102\rangle$. Przypuśćmy, że każda królewna zatańczyła z inną liczbą królewiczów. Ciąg $a_1,a_2,...,a_{103}$ zawiera wówczas 103 różne liczby, czyli występuje w nim dokładnie jeden raz każda liczba całkowita z przedziału $\langle 0,102\rangle$. Wobec tego

$$a_1+a_2+...+a_{103}=0+1+...+102=\frac{102\cdot 103}{2}=5253\,,$$

a zatem na balu tańczyły 5253 różne pary.

Z drugiej strony, każdy królewicz zatańczył z taką samą liczbą królewien. Oznaczmy tę liczbę przez $k$. Stąd wynika, że na balu tańczyło $102\cdot k$ różnych par, czyli $5253=102\cdot k$. Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż liczba 5253 nie jest podzielna przez 102.

*Uwaga*

Metoda rozwiązania polega na obliczeniu na dwa sposoby, ile różnych par tańczyło. Uzyskanie dwóch różnych wyników pozwala stwierdzić, że sytuacja, w której „każda królewna zatańczyła z inną liczbą królewiczów”, nie może mieć miejsca. Inne przykłady zastosowania tej metody można znaleźć w artykule „Oblicz dwoma sposobami”, *Kwadrat* nr 6 (wrzesień 2012).

---

**5.** Odcinki $AD$ i $BE$ są wysokościami trójkąta ostrokątnego $ABC$. Po zewnętrznej stronie trójkąta $ABC$ zbudowano kwadrat $ABKL$ oraz prostokąty $BDMN$ i $AEPQ$, przy czym $BN=BC$ oraz $AQ=AC$. Udowodnij, że suma pól prostokątów $BDMN$ i $AEPQ$ jest równa polu kwadratu $ABKL$.

---

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

*Szkic rozwiązania*

Oznaczmy przez $R$ i $S$ punkty przecięcia wysokości trójkąta $ABC$ poprowadzonej z wierzchołka $C$ odpowiednio z prostymi $AB$ i $KL$. Trójkąty prostokątne $AEB$ i $ARC$ mają wspólny kąt przy wierzchołku $A$, a zatem są podobne. Wobec tego

$$\frac{AE}{AR}=\frac{AB}{AC}, \quad \text{więc} \quad AE\cdot AC=AR\cdot AB\,.$$

Podstawiając do ostatniej równości $AC=AQ$ oraz $AB=AL$, otrzymujemy

$$AE\cdot AQ=AR\cdot AL\,, \quad \text{czyli} \quad [AEPQ]=[ARSL]\,,$$

gdzie $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$.

Analogicznie dowodzimy, że $[BDMN]=[BRSK]$. Dodając stronami dwie ostatnie równości, uzyskujemy tezę.

---

**6.** W ostrosłup $SABCD$, którego podstawą jest czworokąt wypukły $ABCD$, można wpisać sferę. Udowodnij, że $\sphericalangle ASB+\sphericalangle CSD=\sphericalangle BSC+\sphericalangle DSA$.

*Szkic rozwiązania*

Oznaczmy przez $P$, $Q$, $R$, $T$ punkty styczności sfery odpowiednio ze ścianami $ABS$, $BCS$, $CDS$ i $ADS$. Odcinki $SP$ i $SQ$, o wspólnym końcu $S$, są styczne do danej sfery w punktach $P$ i $Q$, a zatem $SP=SQ$. Analogicznie $BP=BQ$. Wobec tego trójkąty $BSP$ i $BSQ$ są przystające (cecha bok–bok–bok), skąd wynika, że $\sphericalangle BSP=\sphericalangle BSQ$.

Analogicznie dowodzimy, że $\sphericalangle CSR=\sphericalangle CSQ$, $\sphericalangle DSR=\sphericalangle DST$ oraz $\sphericalangle ASP=\sphericalangle AST$. Dodając otrzymane równości kątów stronami, otrzymujemy tezę.

---

**7.** Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite $n$, dla których liczba $n^3-7n$ jest kwadratem liczby całkowitej.

*Szkic rozwiązania*

Rozważymy dwa przypadki.

(1) Liczba $n$ nie jest podzielna przez 7. Wtedy liczby $n$ i $n^2-7$ są względnie pierwsze. Istotnie: niech $d$ będzie wspólnym dzielnikiem liczb $n$ i $n^2-7$. Skoro $d\,|\,n$, to $d\,|\,n^2$, a zatem $d$ jest dzielnikiem liczby $n^2-(n^2-7)=7$. Z założenia wiemy, że $d\neq 7$, więc $d=1$.

Ponieważ liczba $n^3-7n=n(n^2-7)$ jest kwadratem liczby całkowitej, a liczby $n$ i $n^2-7$ są względnie pierwsze, więc $n=a^2$ i $n^2-7=b^2$, gdzie $a$ i $b$ są pewnymi nieujemnymi liczbami całkowitymi. A zatem $a^4-7=b^2$, czyli $(a^2-b)(a^2+b)=7$. Stąd wyznaczamy $a^2=4$, $b=3$ oraz bezpośrednio sprawdzamy, że liczba $n=a^2=4$ spełnia warunki zadania.

(2) Liczba $n$ jest podzielna przez 7. Niech $n=7m$, gdzie $m$ jest dodatnią liczbą całkowitą. Wówczas $n^3-7n=49m(7m^2-1)$, skąd wynika, że liczba $m(7m^2-1)$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Podobnie jak wyżej dowodzimy, że liczby $m$ i $7m^2-1$ są względnie pierwsze, więc $m=c^2$ i $7m^2-1=d^2$, gdzie $c$ i $d$ są pewnymi nieujemnymi liczbami całkowitymi. A zatem $7c^4-1=d^2$, czyli $7c^4=d^2+1$. Analizując reszty z dzielenia liczby $d$ przez 7, dochodzimy do wniosku, że liczba $d^2+1$ nie może być podzielna przez 7. Ten przypadek prowadzi zatem do sprzeczności.

Ostatecznie jedyną liczbą spełniająca warunki zadania jest $n=\mathbf{4}$.

*Uwaga*

Powyższe rozwiązanie opiera się na spostrzeżeniu, że jeśli dodatnie liczby całkowite $a$ i $b$ są względnie pierwsze, a ich iloczyn jest kwadratem liczby całkowitej, to wówczas każda z liczb $a$ i $b$ jest kwadratem liczby całkowitej. Uzasadnienie tej własności znajduje się w rozwiązaniach zadań części testowej tegorocznej edycji OMG (zadanie 7).

---

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI · Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej · MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ · ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji · UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego