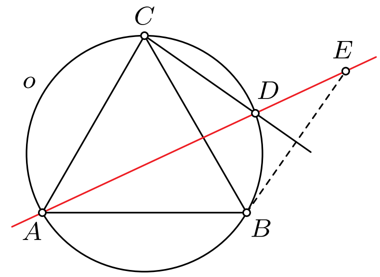
X Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów (2014/15)

Zadania konkursowe zawodów pierwszego stopnia — część korespondencyjna

(10 listopada – 15 grudnia 2014 r.)

1. Ania rozmieniła banknot o nominale 50 zł na 13 monet, z których każda miała wartość 1 zł, 2 zł lub 5 zł. Ile monet pięciozłotowych otrzymała Ania? Podaj wszystkie możliwości. Odpowiedź uzasadnij.

2. Trójkąt równoboczny ABC jest wpisany w okrąg o. Punkt D leży na krótszym łuku BC okręgu o. Punkt E jest symetryczny do punktu B względem prostej CD. Wykaż, że punkty A, D, E leżą na jednej prostej.

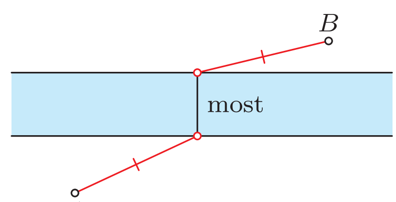


Zadanie 2.

3. Wyznacz najmniejszą możliwą wartość wyrażenia $a+b^3$, gdzie a i b są dodatnimi liczbami o iloczynie równym 1.

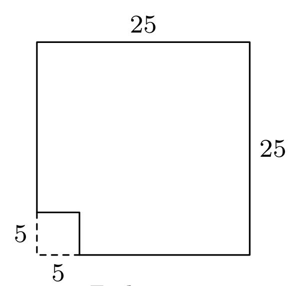
4. Na przyjęcie przyszło n osób. Początkowo każdy miał dokładnie 3 znajomych wśród pozostałych osób obecnych na przyjęciu. W trakcie przyjęcia niektóre osoby poznały się, w wyniku czego pod koniec przyjęcia każdy miał wśród pozostałych obecnych dokładnie 4 znajomych. Wyznacz wszystkie liczby n, dla których opisana sytuacja jest możliwa. (Przyjmujemy, że jeśli osoba A zna osobę B, to osoba B zna osobę A.)

5. Po dwóch stronach rzeki o równoległych brzegach znajdują się dwa domy A i B, przy czym prosta AB nie jest prostopadła do brzegów rzeki (zob. rysunek). W którym miejscu należy wybudować most, prostopadły do brzegów rzeki, aby drogi z obu domów do mostu, biegnące w linii prostej, były równej długości? Podaj odpowiednią konstrukcję cyrklem i linijką oraz uzasadnij jej poprawność.



Zadanie 5.

6. Od kwadratowej kartki o boku 25 odcięto kwadrat o boku 5, jak pokazano na rysunku. Czy pozostałą część kartki można pociąć na 100 prostokątów, z których każdy ma wymiary 1×6 lub 2×3? Odpowiedź uzasadnij.



Zadanie 6.

7. Dany jest czworościan $ABCD$, w którym $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = 90^\circ$ oraz $AC = CD = DB$. Wykaż, że $AB < 2\cdot CD$.

Rozwiązania powyższych zadań (wszystkich lub części z nich) należy przekazać szkolnemu koordynatorowi OMG lub przesłać bezpośrednio, listem poleconym, do Komitetu Okręgowego OMG właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

15 grudnia 2014 r. (decyduje data stempla pocztowego).

Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Adresy Komitetów Okręgowych OMG, szczegółowe wytyczne dotyczące sposobu redakcji rozwiązań i przesyłania prac, a także regulamin OMG i inne bieżące informacje znajdują się na stronie internetowej Olimpiady: `www.omg.edu.pl`.

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej.
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku.