X Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia pierwszego – część korespondencyjna

(10 listopada 2014 r. – 15 grudnia 2014 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Ania rozmieniła banknot o nominale 50zł na 13 monet, z których każda miała wartość 1 zł, 2 zł lub 5 zł. Ile monet pięciozłotowych otrzymała Ania? Podaj wszystkie możliwości. Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Przypuśćmy, że Ania otrzymała a monet pięciozłotowych, b monet dwuzłotowych oraz c monet jednozłotowych. To oznacza, że a, b, c są nieujemnymi liczbami całkowitymi, spełniającymi układ równań

$$\begin{cases} a+b+c=13 \\ 5a+2b+c=50. \end{cases}$$

Rozwiążemy ten układ ze względu na niewiadome b i c.

Odejmując pierwsze równanie stronami od drugiego, otrzymujemy zależność

$$5a+2b+c-(a+b+c)=50-13, \quad \text{skąd} \quad b=37-4a.$$

Następnie mnożąc stronami pierwsze równanie przez 2 i odejmując od drugiego, uzyskujemy

$$5a+2b+c-(2a+2b+2c)=50-26, \quad \text{skąd} \quad c=3a-24.$$

Ponieważ liczby b i c są nieujemne, więc $37-4a\geqslant 0$ oraz $3a-24\geqslant 0$. Wobec tego $a\leqslant \frac{37}{4}=9\frac{1}{4}$ oraz $a\geqslant 8$. To oznacza, że $a=8$ lub $a=9$.

Jeżeli $a=8$, to $b=37-4\cdot 8=5$ oraz $c=13-8-5=0$, a jeżeli $a=9$, to $b=37-4\cdot 9=1$ oraz $c=13-9-1=3$. Znalezione trójki są rozwiązaniami wyjściowego układu równań, więc spełnione są dla nich warunki zadania.

Odpowiedź

Ania otrzymała 8 lub 9 monet pięciozłotowych.

2. Trójkąt równoboczny ABC jest wpisany w okrąg o. Punkt D leży na krótszym łuku BC okręgu o. Punkt E jest symetryczny do punktu B względem prostej CD. Wykaż, że punkty A, D, E leżą na jednej prostej.

Szkic rozwiązania

Z równości kątów wpisanych i opartych na tych samych łukach otrzymujemy (rys. 1)

$$\sphericalangle ADB=\sphericalangle ACB=60^\circ, \quad \sphericalangle ADC=\sphericalangle ABC=60^\circ.$$

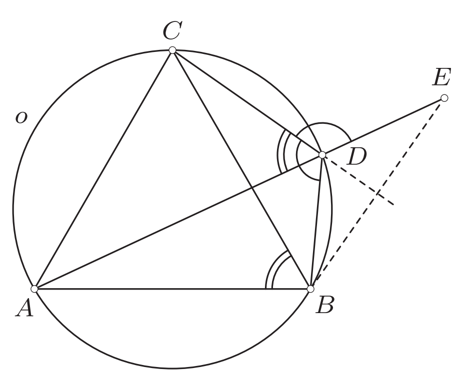
Ponieważ punkty B i E są symetryczne względem prostej CD, więc

$$\sphericalangle EDC=\sphericalangle BDC=\sphericalangle ADB+\sphericalangle ADC=120^\circ.$$

Łącząc uzyskane zależności, otrzymujemy

$$\sphericalangle EDC+\sphericalangle ADC=120^\circ+60^\circ=180^\circ,$$

a to oznacza, że punkty A, D, E leżą na jednej prostej.



rys. 1

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

3. Wyznacz najmniejszą możliwą wartość wyrażenia $a+b^3$, gdzie a i b są dodatnimi liczbami o iloczynie równym 1.

Szkic rozwiązania

Korzystając z nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną dla czterech liczb: $\frac{a}{3}$, $\frac{a}{3}$, $\frac{a}{3}$, b^3, uzyskujemy

$$\frac{a+b^3}{4} = \frac{\frac{a}{3}+\frac{a}{3}+\frac{a}{3}+b^3}{4} \geqslant \sqrt[4]{\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{3}\cdot b^3} = \sqrt[4]{\frac{a^3b^3}{27}} = \frac{1}{3}\sqrt[4]{3}.$$

Wykazaliśmy zatem, że dla dowolnych dodatnich liczb a, b o iloczynie równym 1 wyrażenie $a+b^3$ przyjmuje wartość nie mniejszą od $\frac{4}{3}\sqrt[4]{3}$. Aby wykazać, że liczba ta jest rzeczywiście szukaną najmniejszą wartością, należy wskazać takie liczby dodatnie a, b o iloczynie równym 1, dla których

$$a+b^3 = \frac{4}{3}\sqrt[4]{3}.$$

Bezpośrednio podstawiając sprawdzamy, że warunek ten spełniają liczby

$$a = \sqrt[4]{3} \quad \text{oraz} \quad b = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}.$$

Odpowiedź

Poszukiwaną najmniejszą wartością jest $\frac{4}{3}\sqrt[4]{3}$.

Uwaga 1.

Więcej na temat nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną i jej zastosowaniach można znaleźć w artykule „Nierówność między średnimi”, *Kwadrat* nr 13 (wrzesień 2014).

Uwaga 2.

W rozwiązaniu stosowaliśmy nierówność między średnią arytmetyczną a geometryczną dla czterech liczb. Krótki jej dowód można przeprowadzić w oparciu o zależność

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2},$$

czyli nierówność między średnią arytmetyczną a geometryczną dla dwóch liczb:

$$\sqrt[4]{abcd} = \sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}} \leqslant \sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}\right) = \frac{a+b+c+d}{4}.$$

4. Na przyjęcie przyszło n osób. Początkowo każdy miał dokładnie 3 znajomych wśród pozostałych osób obecnych na przyjęciu. W trakcie przyjęcia niektóre osoby poznały się, w wyniku czego pod koniec przyjęcia każdy miał wśród pozostałych obecnych dokładnie 4 znajomych. Wyznacz wszystkie liczby n, dla których opisana sytuacja jest możliwa. (Przyjmujemy, że jeśli osoba A zna osobę B, to osoba B zna osobę A.)

Szkic rozwiązania

Zauważmy, że podczas przyjęcia każdy poznał dokładnie jedną osobę. To oznacza, że osoby, które poznały się na przyjęciu można połączyć w pary, a zatem liczba n jest parzysta. Ponadto, skoro pod koniec przyjęcia każdy miał pośród obecnych dokładnie 4 znajomych, to $n > 4$, czyli $n \geqslant 6$.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

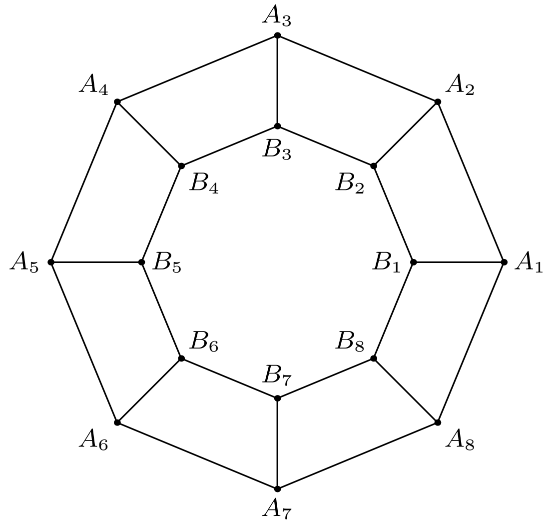
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

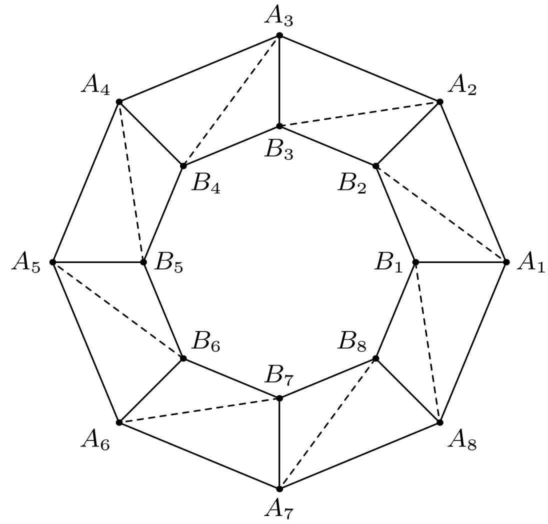
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Udowodnimy, że każda liczba parzysta $n \geqslant 6$ spełnia warunki zadania.

W tym celu przyjmijmy, że $n=2k$ dla pewnej liczby całkowitej dodatniej $k \geqslant 3$ i rozważmy graniastosłup k-kątny o podstawach $A_1A_2\ldots A_k$ i $B_1B_2\ldots B_k$ oraz krawędziach bocznych A_1B_1, A_2B_2, $\ldots$, A_kB_k (rys. 2 przedstawia widok z góry dla $k=8$).



rys. 2



rys. 3

Przyjmijmy, że każdy z wierzchołków $A_1, A_2, \ldots, A_k$ oraz $B_1, B_2, \ldots, B_k$ symbolizuje uczestnika przyjęcia oraz że dwie osoby znają się od początku przyjęcia, jeśli przyporządkowane im wierzchołki są połączone krawędzią. Wtedy każdy uczestnik przyjęcia początkowo miał dokładnie 3 znajomych, gdyż w każdym wierzchołku graniastosłupa schodzą się dokładnie 3 krawędzie.

Przypuśćmy, że podczas przyjęcia poznały się osoby, którym odpowiadają wierzchołki A_1 oraz B_2, A_2 oraz B_3, A_3 oraz B_4, $\ldots$, A_{k-1} oraz B_k, A_k oraz B_1 (linie przerywane na rysunku 3). Wówczas każda osoba zyskała dokładnie jednego nowego znajomego, czyli pod koniec przyjęcia każdy miał dokładnie 4 znajomych.

Odpowiedź

Warunki zadania spełniają wszystkie liczby parzyste $n \geqslant 6$.

---

5. Po dwóch stronach rzeki o równoległych brzegach znajdują się dwa domy A i B, przy czym prosta AB nie jest prostopadła do brzegów rzeki. W którym miejscu należy wybudować most, prostopadły do brzegów rzeki, aby drogi z obu domów do mostu, biegnące w linii prostej, były równej długości? Podaj odpowiednią konstrukcję cyrklem i linijką oraz uzasadnij jej poprawność.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez a brzeg rzeki po stronie domu A, a przez b — brzeg po stronie domu B. Niech c będzie półprostą o początku w punkcie B, prostopadłą do brzegów rzeki oraz przecinającą brzegi rzeki. Na półprostej c znajdujemy taki punkt B', aby długość odcinka BB' była równa odległości między prostymi a i b.

Wówczas jeśli M i N są takimi punktami leżącymi odpowiednio na prostych a i b, że odcinek MN jest prostopadły do brzegów rzeki, to czworokąt $MNBB'$ jest równoległobokiem (gdyż odcinki MN i BB' są równoległe i mają równe długości). Wobec tego warunek $AM=BN$ jest równoważny warunkowi $AM=B'M$. Stąd wniosek, że poszukiwany punkt M musi leżeć na symetralnej odcinka AB'.

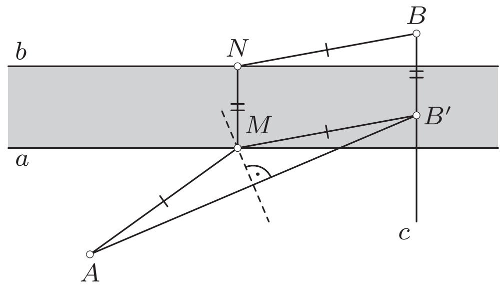
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Aby zatem wyznaczyć punkt M, wystarczy skonstruować punkt przecięcia symetralnej odcinka AB' z prostą a. Ponieważ prosta AB nie jest prostopadła do brzegów rzeki, więc taki punkt istnieje i jest tylko jeden. Punkt N uzyskujemy jako punkt przecięcia prostej b z prostą przechodzącą przez punkt M i prostopadłą do prostych a i b.



rys. 4

Uwaga

Wszystkie kolejne elementy opisanej konstrukcji (półprosta c, punkt B', symetralna odcinka AB', punkty M i N) można skonstruować za pomocą cyrkla i linijki.

---

6. Od kwadratowej kartki o boku 25 odcięto kwadrat o boku 5, jak pokazano na rysunku. Czy pozostałą część kartki można pociąć na 100 prostokątów, z których każdy ma wymiary 1×6 lub 2×3? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Wykażemy, że żądany podział nie jest możliwy.

Gdyby daną figurę (czyli kwadratową kartkę z odciętym narożnikiem) można było pociąć na prostokąty o wymiarach 1×6 oraz 2×3, to przecinając każdy z tych prostokątów na pół, uzyskalibyśmy podział figury na 200 prostokątów o wymiarach 1×3. Wykażemy tymczasem, że danej figury nie da się pociąć na 200 prostokątów o wymiarach 1×3.

Przypuśćmy, wbrew tezie, że taki podział jest możliwy. Podzielmy figurę na 600 kwadratów o boku 1 i nazwijmy te kwadraty *polami*. Zauważmy, że skoro taki podział jest możliwy, to każdy prostokąt o wymiarach 1×3 musi być złożony z trzech pełnych pól.

Rozwiązanie dokończymy dwoma sposobami.

Sposób I

Jeżeli wyróżnimy 247 pól, jak pokazano na rysunku 5, to każdy prostokąt o wymiarach 1×3, złożony z pełnych pól, będzie zawierał parzystą liczbę wyróżnionych pól. W takim razie wszystkie 200 prostokątów, na które podzielona jest figura, łącznie również będą zawierały parzystą liczbę wyróżnionych pól. Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż 247 jest liczbą nieparzystą.

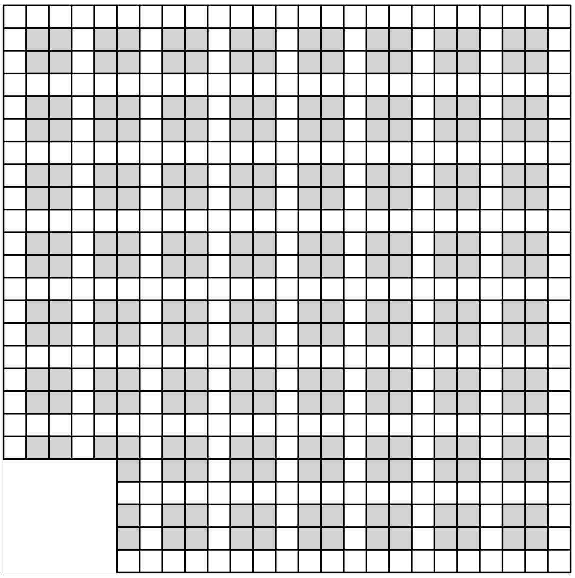
Sposób II

Jeżeli wyróżnimy 199 pól, jak pokazano na rysunku 6, to każdy prostokąt o wymiarach 1×3, złożony z pełnych pól, będzie zawierał dokładnie jedno pole wyróżnione. W takim razie wszystkie 200 prostokątów, na które podzielona jest figura, łącznie będą zawierały 200 wyróżnionych pól. Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż wyróżnionych pól jest tylko 199.

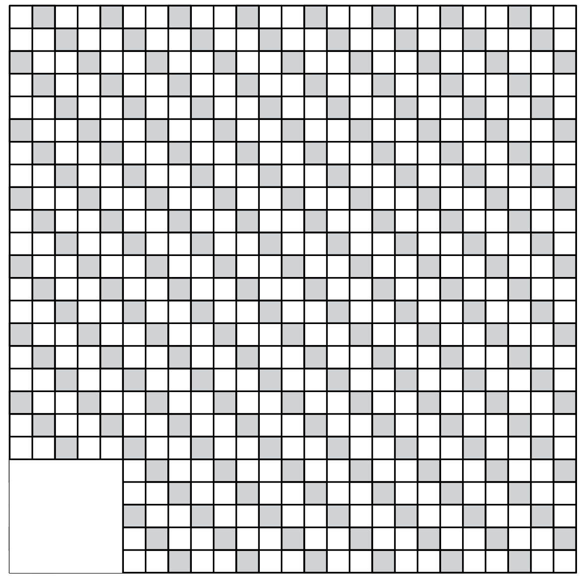
W każdym ze sposobów założenie, że figurę można podzielić na 200 prostokątów o wymiarach 1×3 doprowadziło do sprzeczności. To oznacza, że kartki nie można podzielić na 200 prostokątów o wymiarach 1×3, a tym bardziej — na 100 prostokątów, z których każdy ma wymiary 1×6 lub 2×3.

Uwaga

Techniki rozwiązywania zadań z użyciem kolorowania pól zostały opisane w artykule „Kolorowe szachownice”, *Kwadrat* nr 13 (wrzesień 2014).



rys. 5



rys. 6

---

7. Dany jest czworościan $ABCD$, w którym $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = 90^\circ$ oraz $AC = CD = DB$. Wykaż, że $AB < 2 \cdot CD$.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez M środek odcinka AB (rys. 7). Ponieważ trójkąt ABC jest prostokątny, więc punkt M jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie, skąd $MC = \frac{1}{2}AB$. Analogicznie, skoro trójkąt ABD jest prostokątny, to $MD = \frac{1}{2}AB$.

Z równości $MA = MB = MC = MD$ oraz $AC = CD = DB$ wynika, że trójkąty równoramienne AMC, CMD, DMB są przystające (cecha bok–bok–bok). Przyjmijmy oznaczenie

$$\sphericalangle AMC = \sphericalangle CMD = \sphericalangle DMB = \alpha.$$

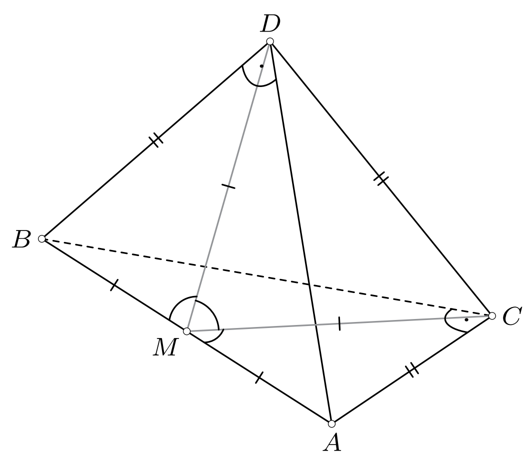
Zauważmy, że zachodzi nierówność

$$3\alpha = \sphericalangle AMC + \sphericalangle CMD + \sphericalangle DMB >$$
$$> \sphericalangle AMD + \sphericalangle DMB = 180^\circ,$$

czyli $\alpha > 60^\circ$. Stąd w szczególności wynika, że

$$\sphericalangle MAC = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha < 60^\circ < \alpha = \sphericalangle AMC,$$

więc $MC < AC$, gdyż w trójkącie naprzeciw większego kąta leży dłuższy bok. Ostatnia nierówność równoważna jest tezie zadania, gdyż $MC = \frac{1}{2}AB$ oraz $AC = CD$.



rys. 7