XI Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia pierwszego — część korespondencyjna
(1 września 2015 r. – 12 października 2015 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Wykaż, że istnieje nieskończenie wiele trójek (x,y,z) dodatnich liczb całkowitych spełniających równanie

$$x(y-z)+y(z-x)=6.$$

Szkic rozwiązania

Przekształcając równoważnie dane równanie, otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} xy-xz+yz-xy&=6,\\ yz-xz&=6,\\ z(y-x)&=6\,. \end{aligned}$$

Jeśli zatem $n\geqslant 1$ jest dowolną liczbą naturalną, to każda trójka postaci

$$(x,y,z)=(n,n+6,1)$$

jest rozwiązaniem danego równania. Wobec tego takich trójek jest nieskończenie wiele.

Uwaga

Wskazane w rozwiązaniu trójki liczb $(x,y,z)=(n,n+6,1)$ nie są jedynymi spełniającymi dane równanie. Również każda z trójek $(n,n+3,2)$, $(n,n+2,3)$, $(n,n+1,6)$, gdzie n jest dowolną dodatnią liczbą całkowitą, spełnia warunki zadania.

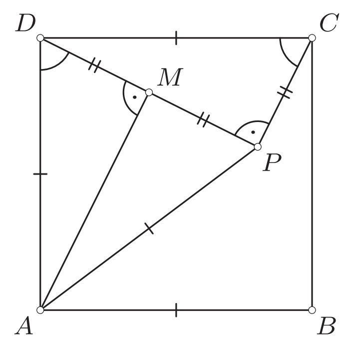
2. Wewnątrz kwadratu $ABCD$ wybrano taki punkt P, że

$$AP=AB \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle CPD=90^\circ.$$

Wykaż, że $DP=2\cdot CP$.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez M środek odcinka DP (rys. 1). Ponieważ $AP=AB=AD$, więc trójkąt ADP jest równoramienny i wobec tego trójkąt ADM jest prostokątny. Ponadto zachodzą równości $\sphericalangle ADM=90^\circ-\sphericalangle PDC=\sphericalangle DCP$ oraz $AD=DC$, więc trójkąty ADM i DCP są przystające, na mocy cechy kąt–bok–kąt. Wobec tego $DM=CP$, skąd otrzymujemy $DP=2\cdot DM=2\cdot CP$, a to należało udowodnić.



rys. 1

3. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n, dla których liczba

$$\frac{n^4+4}{17}$$

jest pierwsza.

Szkic rozwiązania

W rozwiązaniu skorzystamy z następującego rozkładu na czynniki liczby n^4+4:

$$n^4+4=n^4+4n^2+4-4n^2=(n^2+2)^2-(2n)^2=(n^2+2-2n)(n^2+2+2n).$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Przyjmijmy oznaczenie $p = \dfrac{n^4+4}{17}$.

Szukamy takich liczb naturalnych n, dla których liczba p jest pierwsza. Korzystając z wyprowadzonej na początku tożsamości, możemy powyższą równość zapisać w postaci

$$(n^2+2-2n)(n^2+2+2n) = 17p.$$

Ponieważ liczby 17 oraz p są pierwsze, a ponadto $n^2+2-2n < n^2+2+2n$, więc spełniony jest jeden z trzech układów równań:

$$\begin{cases} n^2+2-2n=1 \\ n^2+2+2n=17p, \end{cases} \qquad \begin{cases} n^2+2-2n=17 \\ n^2+2+2n=p, \end{cases} \qquad \begin{cases} n^2+2-2n=p \\ n^2+2+2n=17. \end{cases}$$

Pierwsze równanie pierwszego układu równań przybiera postać $(n-1)^2+1=1$, skąd obliczamy $n=1$. Przekształcając podobnie pierwsze równanie drugiego układu równań, otrzymujemy $(n-1)^2=16$, skąd $n=5$. Wreszcie, przekształcając analogicznie drugie równanie trzeciego układu równań, dostajemy $(n+1)^2+1=17$, skąd $n=3$.

Bezpośrednio sprawdzamy, że spośród uzyskanych trzech wartości jedynie $n=3$ lub $n=5$ spełniają warunki zadania. Podsumowując, jedynymi liczbami naturalnymi n spełniającymi warunki zadania są $n=3$ lub $n=5$.

Uwaga

Tożsamość, którą wyprowadziliśmy na początku rozwiązania jest szczególnym przypadkiem ogólniejszego wzoru

$$a^4+4b^4 = (a^2+2b^2-2ab)(a^2+2b^2+2ab),$$

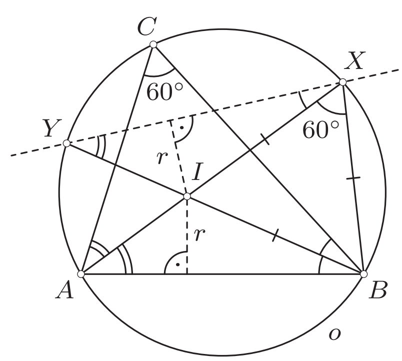
nazywanego *tożsamością Sophie Germain*. Więcej na temat zastosowań tej tożsamości w zadaniach olimpijskich można znaleźć w artykule „Tożsamość Sophie Germain”, *Kwadrat* nr 16 (lipiec 2015).

---

4. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB = 60^\circ$. Na trójkącie tym opisano okrąg o. Punkt X jest środkiem tego łuku BC okręgu o, który nie zawiera punktu A, a punkt Y jest środkiem tego łuku CA okręgu o, który nie zawiera punktu B. Udowodnij, że prosta XY jest styczna do okręgu wpisanego w trójkąt ABC.

Szkic rozwiązania

Ponieważ punkt X jest środkiem łuku BC okręgu o, więc prosta AX zawiera dwusieczną kąta BAC (rys. 2). Analogicznie, prosta BY zawiera dwusieczną kąta ABC. Stąd wniosek, że odcinki AX i BY przecinają się w punkcie I będącym środkiem okręgu ω wpisanego w trójkąt ABC.



rys. 2

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Prosta k jest styczna do okręgu ω, wtedy i tylko wtedy, gdy odległość punktu I od prostej k jest równa promieniowi tego okręgu. A ponieważ promień okręgu ω jest równy odległości punktu I od prostej AB, więc zadanie będzie rozwiązane, jeśli wykażemy, że odległości punktu I od prostych AB i XY są równe.

Zauważmy, że

$$\sphericalangle BIX = \sphericalangle BAI + \sphericalangle ABI = \sphericalangle CAX + \sphericalangle CBY = \sphericalangle CBX + \sphericalangle CBY = \sphericalangle IBX\,,$$

skąd wniosek, że $BX = IX$. Ponadto $\sphericalangle AXB = \sphericalangle ACB = 60^\circ$. Trójkąt IBX jest więc równoramienny, w którym jeden z kątów ma miarę 60°. Wobec tego jest to trójkąt równoboczny, a więc $IB = IX$. Ponadto $\sphericalangle IBA = \sphericalangle IXY$ oraz $\sphericalangle BIA = \sphericalangle XIY$. Trzy ostatnie równości dowodzą, że trójkąty AIB i YIX są przystające (cecha bok–kąt–bok). Stąd w szczególności wynika, że odległości punktu I od prostych AB i XY są równe, a tego mieliśmy dowieść.

Uwaga

Kluczową rolę w rozwiązaniu zadania odgrywa wyprowadzona równość $IB = IX$, której dowód można znaleźć również w artykule „Bliźniacze zadania”, *Kwadrat* nr 16 (lipiec 2015).

---

5. W wierzchołkach n-kąta foremnego rozmieszczono liczby $1, 2, \ldots, n$ w taki sposób, że suma liczb znajdujących się w każdych trzech kolejnych wierzchołkach n-kąta jest parzysta. Wyznacz wszystkie liczby naturalne $n \geqslant 3$, dla których takie rozmieszczenie jest możliwe.

Szkic rozwiązania

Zauważmy, że suma trzech liczb naturalnych jest liczbą parzystą tylko wtedy, gdy wszystkie są parzyste lub gdy dokładnie dwie spośród nich są nieparzyste.

Oznaczmy dany n-kąt foremny przez $A_1A_2\ldots A_n$ w taki sposób, aby wierzchołkowi A_1 była przyporządkowana liczba 2. Liczbę znajdującą się w wierzchołku A_i oznaczmy przez a_i; mamy więc $a_1 = 2$. Przyjmijmy, że $a_{n+i} = a_i$ dla $i = 1, 2, \ldots$ (np. dla $n = 3$ przyjmujemy, że $a_4 = a_1$, $a_5 = 2$, itd.).

W myśl uwagi poczynionej na początku rozwiązania, wśród liczb a_2, a_3 albo obie są parzyste, albo obie są nieparzyste. Jeżeli każda z liczb a_2, a_3 jest parzysta, to również liczba a_4 jest parzysta, gdyż z warunków zadania wynika, że liczba $a_2 + a_3 + a_4$ jest parzysta. Powtarzając analogiczne rozumowanie dla liczb a_5, a_6 itd. dochodzimy do wniosku, że każdemu wierzchołkowi musiała zostać przyporządkowana liczba parzysta, co nie jest możliwe, gdyż pewien wierzchołek musi mieć numer 1. Stąd wniosek, że liczby a_2, a_3 są nieparzyste.

Ponieważ wśród liczb a_2, a_3, a_4 dwie pierwsze są nieparzyste, więc trzecia liczba, czyli a_4, jest parzysta. Podobnie, skoro wśród liczb a_3, a_4, a_5 jest jedna parzysta i jedna nieparzysta, to trzecia liczba, czyli a_5, jest nieparzysta. Przeprowadzając analogiczne rozumowanie dla kolejnych trójek wierzchołków danego n-kąta dochodzimy do wniosku, że co trzeciemu wierzchołkowi przyporządkowana jest liczba parzysta, a pozostałym — liczby nieparzyste. Wynika z tego, że n jest liczbą podzielną przez 3 oraz $\frac{n}{3}$ jest liczbą liczb parzystych pośród $1, 2, \ldots, n$.

Jeżeli n jest liczbą parzystą, to wśród liczb $1, 2, \ldots, n$ jest dokładnie $\frac{n}{2}$ liczb parzystych. Jednak równość $\frac{n}{3} = \frac{n}{2}$ nie może mieć miejsca dla żadnej liczby całkowitej dodatniej n.

Jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to pośród liczb $1, 2, \ldots, n$ jest dokładnie $\frac{n-1}{2}$ liczb parzystych. Otrzymujemy równanie

$$\frac{n}{3} = \frac{n-1}{2},$$

skąd $2n = 3n - 3$ i $n = 3$. Bezpośrednio sprawdzamy, że dla $n = 3$ dowolne etykietowanie wierzchołków trójkąta równobocznego liczbami 1, 2, 3 spełnia warunki zadania.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Odpowiedź
Opisana w zadaniu sytuacja jest możliwa tylko dla liczby $n=3$.

---

6. Różne liczby pierwsze nieparzyste p i q mają tę własność, że liczba p^2+p jest podzielna przez q^2+q. Udowodnij, że liczba $\frac{1}{2}(p-q)$ jest złożona.

Szkic rozwiązania

Zauważmy, że skoro liczba p^2+p jest podzielna przez q^2+q, to $p^2+p \geqslant q^2+q$. Nierówność tę można przekształcić równoważnie do postaci

$$(p-q)(p+q+1) \geqslant 0.$$

Skoro $p \neq q$ oraz $p+q+1>0$, to z powyższej nierówności wynika, że $p>q$. W szczególności $p>q+1$, gdyż p, q to liczby nieparzyste.

Dana w treści zadania podzielność oznacza, że

$$p(p+1) = kq(q+1) \qquad (1)$$

dla pewnej liczby naturalnej k. Skoro $p>q+1$, to p nie dzieli żadnej z liczb q, $q+1$. Jednak p dzieli liczbę $kq(q+1)$, skąd wniosek, że p dzieli k, czyli $k=pl$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej l.

Równość (1) przybiera wtedy postać

$$p+1 = lq(q+1), \quad \text{skąd} \quad \frac{1}{2}(p-q) = \frac{1}{2}(p+1) - \frac{1}{2}(q+1) = (lq-1)\cdot\frac{q+1}{2}.$$

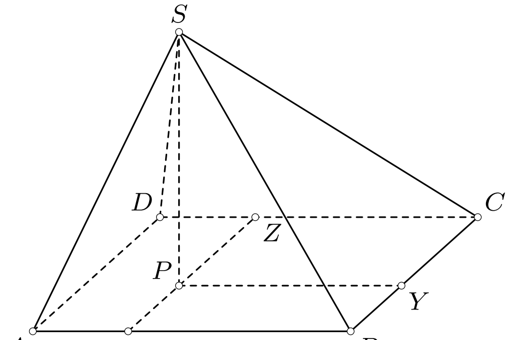
Ponieważ $q \geqslant 3$, więc obie liczby $\frac{q+1}{2}$, $lq-1$ są większe od 1. Tym samym liczba $\frac{1}{2}(p-q)$, jako iloczyn dwóch liczb większych od 1, jest złożona.

---

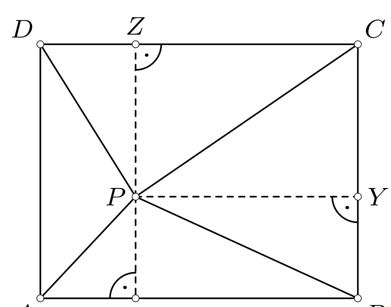
7. Czy istnieje taki ostrosłup $ABCDS$, którego podstawą jest prostokąt $ABCD$ i którego każde dwie krawędzie boczne są różnych długości, a ponadto spełniona jest równość $AS+CS=BS+DS$? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Załóżmy, że istnieje ostrosłup $ABCDS$ o własnościach opisanych w treści zadania. Oznaczmy przez P spodek wysokości ostrosłupa poprowadzonej z wierzchołka S, a przez X, Y, Z — rzuty prostokątne punktu P na proste zawierające odpowiednio krawędzie podstawy AB, BC, CD (rys. 3).



rys. 3



rys. 4

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów PXA, PYC (rys. 4), uzyskujemy

$$PA^2+PC^2 = PX^2+XA^2+PY^2+YC^2. \qquad (2)$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Z kolei dla trójkątów PXB, PZD, otrzymujemy

$$PB^2+PD^2=PX^2+XB^2+PZ^2+ZD^2. \tag{3}$$

Ponieważ $YC=PZ$, $XA=ZD$ oraz $PY=XB$, więc prawe strony zależności (2) oraz (3) są równe. Stąd wniosek, że ich lewe strony są równe, czyli

$$PA^2+PC^2=PB^2+PD^2.$$

Dodając do obu stron powyższej równości $2\cdot PS^2$ i korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów prostokątnych APS, BPS, CPS, DPS, otrzymujemy

$$AS^2+CS^2=BS^2+DS^2. \tag{4}$$

Równoważnie powyższą zależność możemy zapisać jako

$$AS^2-BS^2=DS^2-CS^2, \quad \text{czyli} \quad (AS-BS)(AS+BS)=(DS-CS)(DS+CS).$$

Ale w myśl założeń zadania, $AS-BS=DS-CS\neq 0$, więc z równości (4) wynika, że

$$AS+BS=CS+DS.$$

Dodając tę równość stronami do $AS-BS=DS-CS$, a następnie dzieląc obustronnie przez 2, otrzymujemy $AS=DS$, co stoi w sprzeczności z założeniem, że długości krawędzi bocznych rozważanego ostrosłupa są różne. Uzyskana sprzeczność oznacza, że nie istnieje ostrosłup o opisanych własnościach.

Odpowiedź

Nie istnieje ostrosłup $ABCDS$ o własnościach opisanych w treści zadania.

Uwaga

Sytuacja zobrazowana na rysunku 4 nie jest jedyną możliwością. Punkt P może znaleźć się na zewnątrz prostokąta $ABCD$, na prostej zawierającej jeden z jego boków lub nawet w jednym z jego wierzchołków. Przeprowadzone rozumowanie pozostaje w mocy również w tych przypadkach.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku