Matematyczna Olimpiada Juniorów
www.omj.edu.pl

XV Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody stopnia pierwszego — część korespondencyjna

(1 września 2019 r. – 14 października 2019 r.)

Rozwiązania zadań konkursowych

1. Do pewnej dodatniej liczby całkowitej n dopisano na końcu pewną cyfrę, uzyskując w ten sposób liczbę 13 razy większą od liczby n. Wyznacz wszystkie liczby n o tej własności.

Rozwiązanie

Jeżeli na końcu liczby n dopiszemy cyfrę c, to otrzymamy liczbę $10n+c$. Wobec tego warunek zadania można zapisać jako

$$10n+c=13n, \quad \text{czyli} \quad c=3n.$$

Jednak c jest cyfrą, więc $c\leqslant 9$. W związku z tym $3n\leqslant 9$, czyli $n\leqslant 3$. Zatem liczba n może przyjmować jedynie wartości 1, 2 lub 3.

Z drugiej strony, dopisując po prawej stronie każdej z liczb 1, 2, 3 odpowiednio cyfry 3, 6, 9, uzyskujemy kolejno 13, 26, 39, a więc liczby 13 razy większe od wyjściowych.

Odpowiedź: Wszystkie liczby n o opisanej własności to 1, 2, 3.

---

2. Na bokach AB i BC trójkąta ABC leżą odpowiednio takie punkty P i Q (różne od wierzchołków trójkąta), że $AC=CP=PQ=QB$. Wiedząc, że $\sphericalangle ACB=104^\circ$, wyznacz miary pozostałych kątów trójkąta ABC.

Rozwiązanie

Sposób I

Przyjmijmy oznaczenie $\sphericalangle ABC=\alpha$ (rys. 1). Ponieważ $PQ=QB$, więc mamy również $\sphericalangle BPQ=\sphericalangle PBQ=\alpha$. Stąd wniosek, że

$$\sphericalangle PQC=180^\circ-\sphericalangle PQB=\sphericalangle BPQ+\sphericalangle PBQ=2\alpha.$$

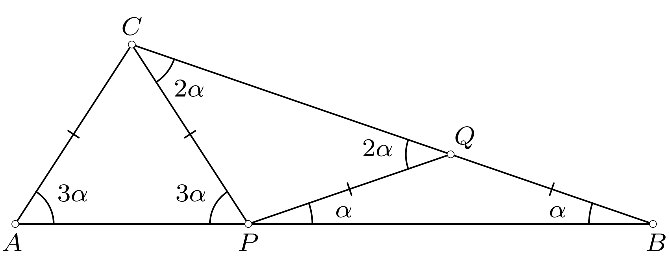
Skoro $CP=PQ$, to $\sphericalangle PCQ=\sphericalangle PQC=2\alpha$. W konsekwencji

$$\sphericalangle APC=180^\circ-\sphericalangle BPC=\sphericalangle PCB+\sphericalangle PBC=2\alpha+\alpha=3\alpha.$$

Ponadto $AC=CP$, więc $\sphericalangle PAC=\sphericalangle APC=3\alpha$. Sumując miary kątów w trójkącie ABC, uzyskujemy

$$180^\circ=\sphericalangle ACB+\sphericalangle BAC+\sphericalangle ABC=104^\circ+3\alpha+\alpha,$$

skąd $4\alpha=76^\circ$ i w konsekwencji $\alpha=19^\circ$. Wobec tego miary pozostałych kątów trójkąta ABC to $\sphericalangle ABC=\alpha=19^\circ$ oraz $\sphericalangle BAC=3\alpha=57^\circ$.



rys. 1

Odpowiedź: Pozostałe kąty trójkąta ABC mają miary $\sphericalangle ABC=19^\circ$ oraz $\sphericalangle BAC=57^\circ$.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja

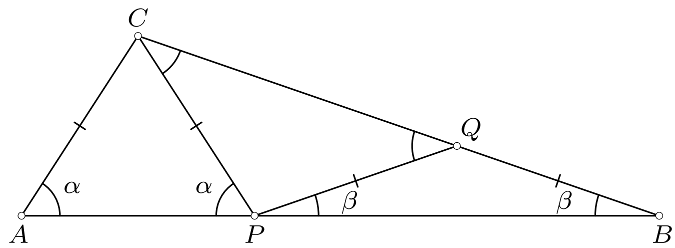
Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Sposób II

Oznaczmy szukane kąty $\sphericalangle BAC$ oraz $\sphericalangle ABC$ odpowiednio przez α oraz β (rys. 2). W trójkącie ABC znamy miarę kąta przy wierzchołku C, w związku z czym możemy wyznaczyć sumę miar kątów przy jego pozostałych wierzchołkach:

$$\alpha+\beta=180^\circ-104^\circ=76^\circ\,.$$

Z kolei z zależności $AC=PC$ oraz $BQ=PQ$ wynika, że $\sphericalangle CPA=\alpha$ oraz $\sphericalangle BPQ=\beta$. Wobec tego $\sphericalangle CPQ=180^\circ-(\alpha+\beta)=180^\circ-76^\circ=104^\circ\,.$



rys. 2

Znając miarę kąta przy wierzchołku P w trójkącie równoramiennym CQP, możemy wyznaczyć miarę kąta przy podstawie CQ tego trójkąta:

$$\sphericalangle PQC=\tfrac{1}{2}(180^\circ-\sphericalangle CPQ)=\tfrac{1}{2}(180^\circ-104^\circ)=38^\circ\,.$$

Stąd, rozpatrując sumę miar kątów w trójkącie równoramiennym PBQ, uzyskujemy

$$\beta=\tfrac{1}{2}(180^\circ-\sphericalangle PQB)=\tfrac{1}{2}\sphericalangle PQC=\tfrac{1}{2}\cdot 38^\circ=19^\circ\,.$$

Ostatecznie obliczamy miarę brakującego kąta: $\alpha=76^\circ-\beta=76^\circ-19^\circ=57^\circ$.

Odpowiedź: Pozostałe kąty trójkąta ABC mają miary $\sphericalangle ABC=19^\circ$ oraz $\sphericalangle BAC=57^\circ$.

---

3. Wyznacz wszystkie trójki (x,y,z) liczb rzeczywistych różnych od 0, dla których

$$xy(x+y)=yz(y+z)=zx(z+x).$$

Rozwiązanie

Sposób I

Dodając do każdego z trzech równych wyrażeń danych w treści zadania liczbę xyz, uzyskujemy równoważny warunek

$$xy(x+y+z)=yz(x+y+z)=zx(x+y+z).$$

Ponieważ liczby x, y, z są różne od zera, więc iloczyn xyz jest też liczbą różną od 0. Wobec tego możemy podzielić przez xyz każde z trzech uzyskanych wyrażeń, otrzymując równoważne zależności

$$\frac{x+y+z}{z}=\frac{x+y+z}{x}=\frac{x+y+z}{y}.$$

Jeśli $x+y+z=0$, to powyższe równości oczywiście są spełnione, a więc każda trójka (x,y,z) niezerowych liczb o sumie równej 0 spełnia warunki zadania.

Jeśli natomiast $x+y+z\neq 0$, to wszystkie otrzymane wyrażenia można podzielić przez liczbę $x+y+z$, uzyskując równoważnie

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{x}=\frac{1}{y},\quad \text{czyli}\quad z=x=y.$$

Odpowiedź: Szukaną własność mają jedynie takie trójki (x,y,z), w których $x+y+z=0$ lub $x=y=z$.

Sposób II

Ponieważ $y \neq 0$, więc pierwsza z podanych w treści zadania równości jest równoważna warunkowi $x(x+y)=z(y+z)$. Przekształcając go równoważnie, uzyskujemy kolejno

$$x^2 - z^2 + xy - zy = 0\,,$$
$$(x-z)(x+z) + (x-z)y = 0\,,$$
$$(x-z)(x+y+z) = 0\,.$$

Przekształcając analogicznie drugą z podanych równości, dostajemy jej równoważną postać

$$(y-x)(x+y+z) = 0\,.$$

Jeśli $x+y+z=0$, to obie uzyskane równości oczywiście są spełnione, a więc każda trójka (x,y,z) niezerowych liczb o sumie równej 0 spełnia warunki zadania.

Jeśli natomiast $x+y+z \neq 0$, to obie strony każdej z uzyskanych zależności możemy podzielić przez $x+y+z$. Dostajemy wtedy $x-z=0$ oraz $y-x=0$, a więc $x=y=z$.

Odpowiedź: Szukaną własność mają jedynie takie trójki (x,y,z), w których $x+y+z=0$ lub $x=y=z$.

Uwaga

Każda trójka (x,y,z), dla której $x=y=z$ może być zapisana równoważnie w postaci (t,t,t), gdzie t jest dowolną liczbą rzeczywistą. Do analogicznego zapisu trójki (x,y,z), w której $x+y+z=0$ potrzebujemy dwóch parametrów s oraz t. W tym przypadku trójkę (x,y,z) można przedstawić równoważnie w postaci $(s,t,-s-t)$, gdzie s i t są dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

---

4. Dany jest prostokąt $ABCD$. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach BC i CD, przy czym $\sphericalangle EAF = 45^\circ$ oraz $BE = DF$. Wykaż, że pole trójkąta AEF jest równe sumie pól trójkątów ABE i ADF.

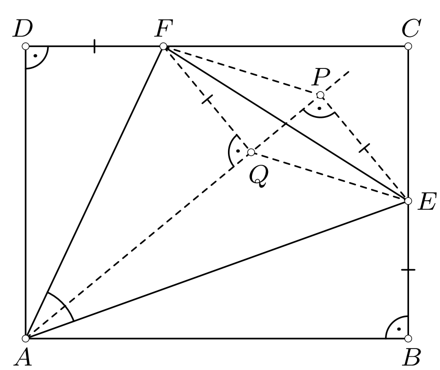
Rozwiązanie

Sposób I

Przypuśćmy bez straty ogólności, że $AB \geqslant AD$. Oznaczmy przez P punkt symetryczny do B względem prostej AE, a przez Q punkt symetryczny do D względem prostej AF (rys. 2). Ponieważ

$$\sphericalangle PAE + \sphericalangle QAF = \sphericalangle BAE + \sphericalangle DAF = 90^\circ - \sphericalangle EAF = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ = \sphericalangle EAF\,,$$

więc punkty A, P, Q leżą na jednej prostej. Ponadto $AQ = AD \leqslant AB = AP$, a więc punkt Q leży na odcinku AP.



rys. 3

Ponieważ $\sphericalangle APE = \sphericalangle ABE = 90^\circ = \sphericalangle ADF = \sphericalangle AQF$, więc odcinki PE oraz QF są równoległe. Wiemy także, że $PE = BE = DF = QF$, wobec czego czworokąt $EPFQ$ jest równoległobokiem. W szczególności wynika z tego, że pola trójkątów QEF oraz QEP są równe. Oznaczając przez $[\mathcal{F}]$ pole figury $\mathcal{F}$, uzyskujemy

$$[AEF] = [AQE] + [QEF] + [AQF] = [AQE] + [QEP] + [AQF] = [APE] + [AQF] .$$

Do zakończenia rozwiązania wystarczy zauważyć, że $[APE] = [ABE]$ oraz $[AQF] = [ADF]$, gdyż są to pary trójkątów przystających. W związku z tym

$$[AEF] = [ABE] + [ADF] ,$$

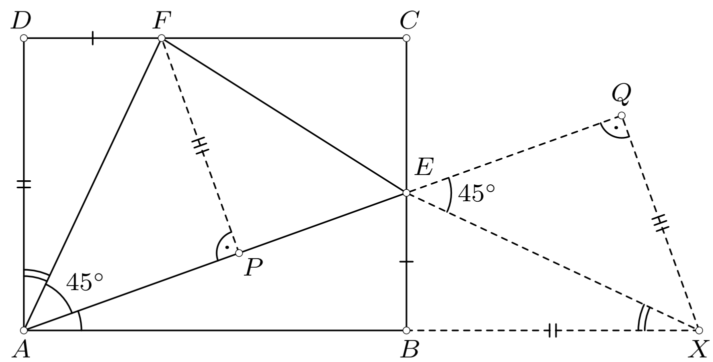
co należało wykazać.

Uwaga

Powyższe rozwiązanie przedstawia pewną ogólną metodę postępowania w sytuacji, gdy wewnątrz pewnego kąta (tutaj BAD) znajduje się kąt dwa razy mniejszy od niego o tym samym wierzchołku (tutaj EAF). Więcej szczegółów oraz przykładów związanych z tą metodą znajduje się w artykule „Zaginamy”, *Kwadrat* nr 23 (wrzesień 2019).

Sposób II

Niech X będzie takim punktem leżącym na półprostej AB, poza odcinkiem AB, że $BX = DA$ (rys. 4). Z równości tej oraz z zależności $DF = BE$ i $\sphericalangle ADF = 90^\circ = \sphericalangle XBE$ wynika, że trójkąty ADF i XBE są przystające (cecha bok–kąt–bok). W związku z tym $AF = EX$ oraz $\sphericalangle DAF = \sphericalangle BXE$.



rys. 4

Oznaczmy przez P i Q rzuty prostokątne odpowiednio punktów F i X na prostą AE. Wówczas

$$\sphericalangle XEQ = \sphericalangle BAE + \sphericalangle BXE = \sphericalangle BAE + \sphericalangle DAF = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ = \sphericalangle FAP .$$

Ponadto $AF = EX$, wobec czego trójkąty prostokątne XEQ oraz FAP są przystające (cecha kąt–bok–kąt). Stąd wynika, że $XQ = FP$. Oznaczając przez $[\mathcal{F}]$ pole figury $\mathcal{F}$, uzyskujemy

$$[ABE] + [ADF] = [ABE] + [XBE] = [AXE] = \frac{AE \cdot XQ}{2} = \frac{AE \cdot FP}{2} = [AEF] ,$$

co należało wykazać.

Sposób III

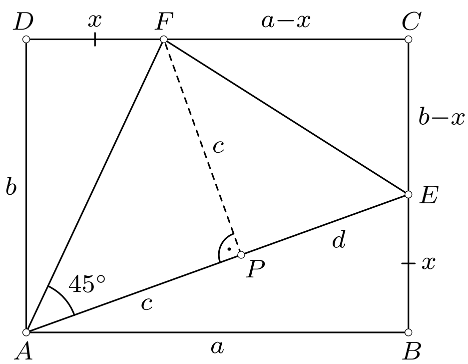
Oznaczmy $AB = a$, $AD = b$ oraz przyjmijmy, bez straty ogólności, że $a \geqslant b$.

Niech P będzie spodkiem wysokości trójkąta AEF poprowadzonej z wierzchołka F (rys. 5). Ponieważ w trójkącie prostokątnym AFP kąt ostry jest równy 45°, więc jest to trójkąt równoramienny. Oznaczmy zatem $c = AP = FP$. Niech ponadto $x = BE = DF$ oraz $d = PE$.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Równość, której chcemy dowieść przybiera postać $\frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}bx=\frac{1}{2}(c+d)c$, czyli

$$ax+bx=c^2+cd\,.$$



rys. 5

Wykorzystując twierdzenie Pitagorasa w trójkącie prostokątnym ABE, otrzymujemy $AB^2+BE^2=AE^2$, a więc

$$a^2+x^2=(c+d)^2\,. \tag{1}$$

Z kolei korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów prostokątnych ADF i APF, uzyskujemy $AD^2+DF^2=AF^2=AP^2+FP^2$. Wobec tego

$$b^2+x^2=2c^2\,. \tag{2}$$

Wreszcie, twierdzenie Pitagorasa zastosowane dla trójkątów prostokątnych PEF oraz CEF prowadzi do wniosku, że $FP^2+EP^2=EF^2=CF^2+CE^2$, czyli

$$c^2+d^2=(a-x)^2+(b-x)^2\,. \tag{3}$$

Dodając stronami zależności (1), (2), (3), dostajemy

$$a^2+b^2+c^2+d^2+2x^2=3c^2+2cd+d^2+a^2+b^2+2x^2-2ax-2bx\,.$$

Po redukcji wyrazów podobnych otrzymujemy $ax+bx=c^2+cd$, a więc równość, której chcieliśmy dowieść. To kończy rozwiązanie zadania.

---

5. W turnieju wzięło udział 8 zawodników. Każda para zawodników rozegrała dokładnie jeden mecz, który zakończył się zwycięstwem jednego z nich lub remisem. Zwycięzca meczu otrzymywał 2 punkty, jego przeciwnik 0 punktów, a w przypadku remisu obaj zawodnicy uzyskiwali po 1 punkcie. Po rozegraniu wszystkich meczów okazało się, że każdy zawodnik miał tę samą liczbę punktów. Jaka jest najmniejsza możliwa liczba meczów, które zakończyły się remisem? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Zauważmy, że w każdym meczu zostały przyznane łącznie 2 punkty, a łączna liczba rozegranych meczów jest równa $\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 7=28$. Stąd wniosek, że łączna liczba przyznanych punktów w całym turnieju jest równa $2\cdot 28=56$. Skoro więc każdy zawodnik uzyskał tę samą liczbę punktów, to każdy musiał zdobyć ich dokładnie $56/8=7$.

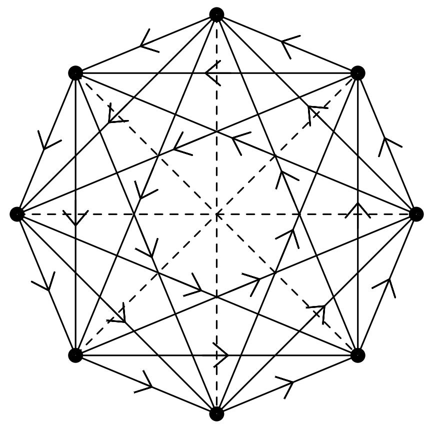
Jeśli mecz nie zakończył się remisem, to każdy z przeciwników otrzymał parzystą liczbę punktów (0 lub 2). Jeśli z kolei mecz zakończył się remisem, to obaj zawodnicy uzyskali po 1 punkcie, a więc nieparzystą liczbę. Stąd wniosek, że każdy zawodnik, który zakończył turniej z nieparzystą liczbą punktów, musiał zremisować co najmniej raz. Wobec tego, skoro wszyscy zawodnicy uzyskali po 7 punktów, to każdy z nich rozegrał co najmniej jeden

---

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

mecz zakończony remisem. Zawodników jest 8, skąd wynika, że co najmniej cztery mecze zakończyły się remisem.



rys. 6

Pozostaje sprawdzić, że możliwy jest układ rozgrywek spełniających warunki zadania, w którym dokładnie cztery mecze zakończyły się remisem. Przykładowy rozkład wyników o tej własności jest zilustrowany powyżej (rys. 6), przy czym strzałki prowadzą od zwycięzcy do przegranego w rozegranym między nimi meczu, a przerywane odcinki oznaczają mecze zakończone remisem. Innymi słowy, przyjmujemy, że zawodnicy znajdujący się naprzeciwko siebie zremisowali, a w pozostałych przypadkach A wygrał z B, jeśli A znajduje się po lewej stronie od B. Przy takim rozkładzie wyników każdy zawodnik zdobył dokładnie 7 punktów i dokładnie cztery mecze zakończyły się remisem.

Odpowiedź: Najmniejsza możliwa liczba meczów zakończonych remisem to 4.

---

6. Dane są liczby naturalne a, b, c, które w zapisie dziesiętnym są zapisane takimi samymi cyframi (tzn. każda cyfra liczby a występuje w jej zapisie dziesiętnym tyle samo razy co w zapisie każdej z liczb b i c). Czy jest możliwe, aby $a+b+c=10^{1001}$? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Nie jest to możliwe.

W rozwiązaniu wykorzystamy (uogólnioną) cechę podzielności przez 3: *każda liczba naturalna daje tę samą resztę z dzielenia przez* 3*, co jej suma cyfr* (uzasadnienie tej własności znajduje się poniżej w uwadze).

Ponieważ liczby a, b, c składają się w zapisie dziesiętnym z tych samych cyfr, więc sumy cyfr tych liczb są równe. W szczególności wynika z tego, że liczby a, b, c dają tę samą resztę r z dzielenia przez 3. Zapiszmy zatem: $a=3k+r$, $b=3l+r$, $c=3m+r$, gdzie k, l, m są pewnymi liczbami całkowitymi. W związku z tym $a+b+c=3(k+l+m+r)$. Liczba $k+l+m+r$ jest całkowita, skąd wniosek, że liczba $a+b+c$ jest podzielna przez 3.

Tymczasem liczba 10^{1001} nie jest podzielna przez 3. Uzyskaliśmy sprzeczność, skąd wynika, że odpowiedź na postawione w zadaniu pytanie jest negatywna.

Uwaga

Uzasadnimy, że *każda liczba naturalna daje tę samą resztę z dzielenia przez* 3*, co jej suma cyfr*. Istotnie, przyjmijmy, że pewna m-cyfrowa liczba k została zapisana przy użyciu kolejno cyfr $a_m, a_{m-1}, \ldots, a_2, a_1$, czyli

$$k=1\underbrace{00\ldots0}_{m-1}\cdot a_m+1\underbrace{00\ldots0}_{m-2}\cdot a_{m-1}+\ldots+100\cdot a_3+10\cdot a_2+a_1\,.$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Z kolei suma cyfr liczby k jest równa $s = a_m + a_{m-1} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$. Wobec tego różnica liczby k i jej sumy cyfr s wynosi

$$k - s = \underbrace{99\ldots9}_{m-1} \cdot a_m + \ldots + 99 \cdot a_3 + 9 \cdot a_2 = 3 \cdot \left(\underbrace{33\ldots3}_{m-1} \cdot a_m + \ldots + 33 \cdot a_3 + 3 \cdot a_2 \right).$$

Liczba w nawiasie po prawej stronie jest całkowita, skąd wynika, że różnica $k - s$ jest podzielna przez 3. W związku z tym obie liczby k i s dają takie same reszty z dzielenia przez 3, co kończy dowód.

W taki sam sposób można uzasadnić uogólnioną cechę podzielności przez 9: *każda liczba naturalna daje tę samą resztę z dzielenia przez 9, co jej suma cyfr*.

---

7. Dany jest graniastosłup prosty, którego podstawą jest romb o boku długości a i kącie ostrym $60°$. Graniastosłup ten przecięto płaszczyzną, przecinając jego krawędzie boczne i uzyskując w przekroju kwadrat. Wyznacz wszystkie możliwe wartości, jakie może przyjąć długość boku tego kwadratu.

Rozwiązanie

Rozwiązanie oparte jest na następującej obserwacji:

Dany jest graniastosłup prosty, którego podstawą jest romb $ABCD$ o boku długości a (rys. 7). Graniastosłup ten przecięto płaszczyzną, która przecina krawędzie boczne wychodzące z wierzchołków A, B, C, D odpowiednio w punktach A', B', C', D'. Wówczas jeśli $A'B'C'D'$ jest rombem, to $AC \parallel A'C'$ lub $BD \parallel B'D'$.

Oznaczmy przez b długość boku rombu $A'B'C'D'$. Bez straty ogólności, przyjmijmy, że spośród odcinków AA', BB', CC', DD' odcinek BB' jest najkrótszy. Niech X i Y będą takimi punktami leżącymi odpowiednio na odcinkach AA' i CC', że $AX = CY = BB'$. Ponieważ dany graniastosłup jest prosty, więc czworokąty $ABB'X$ i $CBB'Y$ są prostokątami i w konsekwencji trójkąty AXB' i $C'YB'$ są prostokątne. Korzystając zatem z twierdzenia Pitagorasa, uzyskujemy

$$A'X = \sqrt{b^2 - a^2} \quad \text{oraz} \quad C'Y = \sqrt{b^2 - a^2}.$$

Wobec tego $A'X = C'Y$, a więc $AA' = CC'$. Wynika stąd, że przekątne $A'C'$ i AC są równoległe. To kończy uzasadnienie powyższej obserwacji.

Przystępujemy do rozwiązania zadania.

Przyjmijmy, że podstawą graniastosłupa jest romb $ABCD$ o kącie $60°$ przy wierzchołku A. Niech $A'B'C'D'$ będzie kwadratem, którego wierzchołki A', B', C', D' leżą odpowiednio na krawędziach bocznych wychodzących z wierzchołków A, B, C, D. Z powyższej obserwacji wynika, że $AC \parallel A'C'$ lub $BD \parallel B'D'$.

Jeśli $BD \parallel B'D'$, to

$$B'D' = BD = a < a\sqrt{3} = AC \leqslant A'C'.$$

W tym przypadku otrzymujemy sprzeczność: czworokąt $A'B'C'D'$, w którym przekątne $A'C'$ i $B'D'$ są różnych długości nie może być kwadratem.

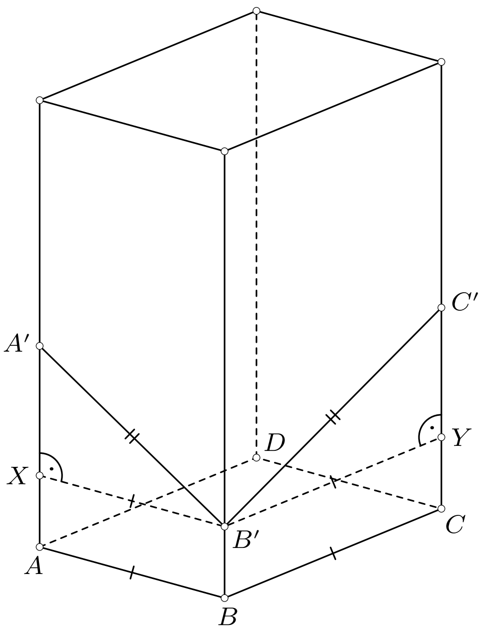
Jeśli z kolei $AC \parallel A'C'$, to $A'C' = AC = a\sqrt{3}$. Długość boku kwadratu $A'B'C'D'$ jest wtedy równa $a\sqrt{3}/\sqrt{2} = a\sqrt{6}/2$. Taki przekrój $A'B'C'D'$ możemy uzyskać w następujący sposób.

Wybieramy punkty A' i C' na krawędziach bocznych graniastosłupa w równej odległości od wierzchołków A i C. Następnie przez środek odcinka $A'C'$ prowadzimy prostą, która przecina krawędzie boczne wychodzące z wierzchołków B, D odpowiednio w punktach B', D'

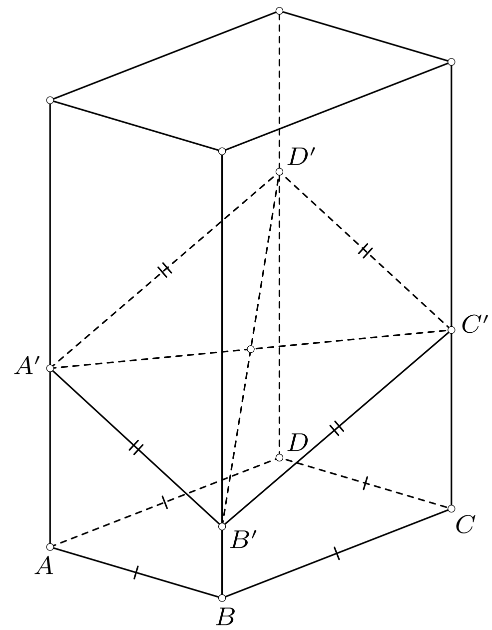
i w taki sposób, by długość odcinka $B'D'$ była równa długości odcinka AC. Jest to możliwe, ponieważ długość odcinka AC jest dłuższa od odległości krawędzi bocznych wychodzących z wierzchołków B i D. W ten sposób uzyskujemy romb $A'B'C'D'$, w którym przekątne $A'C'$ i $B'D'$ są równej długości, a więc w konsekwencji kwadrat.

Odpowiedź

Jedyną możliwą wartością, jaką może przyjmować długość boku kwadratu jest $a\sqrt{6}/2$.



rys. 7



rys. 8

Uwaga

Obserwacja, której dowiedliśmy w powyższym rozwiązaniu wynika natychmiast także z następującego ogólniejszego stwierdzenia:

Podstawą graniastosłupa prostego jest czworokąt wypukły $ABCD$, którego przekątne są prostopadłe. Graniastosłup ten przecięto płaszczyzną, która przecina krawędzie boczne wychodzące z wierzchołków A, B, C, D odpowiednio w punktach A', B', C', D'. Wówczas jeśli przekątne czworokąta $A'B'C'D'$ są prostopadłe, to $AC \parallel A'C'$ lub $BD \parallel B'D'$.

Dowód tego stwierdzenia jest nieco bardziej skomplikowany niż dowód w przypadku, gdy $ABCD$ oraz $A'B'C'D'$ są rombami. Można go przeprowadzić w następujący sposób.

Niech E będzie punktem przecięcia przekątnych AC i BD czworokąta $ABCD$ (rys. 9). Ponieważ $AC \perp BD$, więc korzystając z twierdzenia Pitagorasa, uzyskujemy

$$AB^2+CD^2=(AE^2+BE^2)+(CE^2+DE^2)=(BE^2+CE^2)+(DE^2+AE^2)=BC^2+DA^2.$$

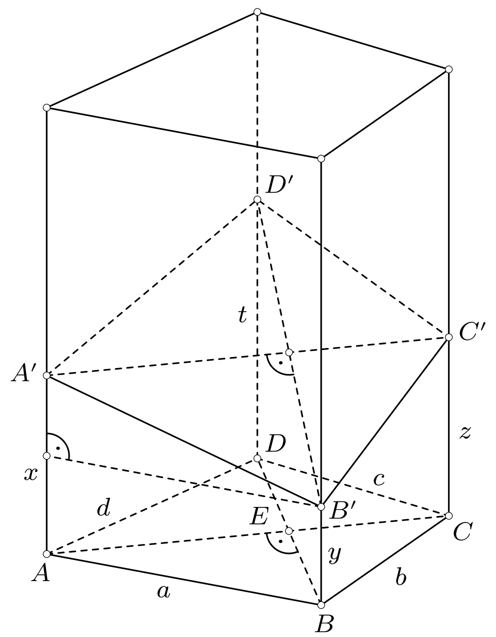
Analogicznie, przekątne $A'C'$ i $B'D'$ czworokąta $A'B'C'D'$ są prostopadłe, a zatem

$$(A'B')^2+(C'D')^2=(B'C')^2+(D'A')^2. \qquad (1)$$

Oznaczmy: $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, a ponadto $AA'=x$, $BB'=y$, $CC'=z$, $DD'=t$. Wówczas, wykorzystując ponownie twierdzenie Pitagorasa, dostajemy

$$(A'B')^2=a^2+(x-y)^2, \quad (B'C')^2=b^2+(y-z)^2,$$
$$(C'D')^2=c^2+(z-t)^2, \quad (D'A')^2=d^2+(t-x)^2.$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku



rys. 9

Wstawiając powyższe wyrażenia do równości (1), uzyskujemy
$$a^2+c^2+(x-y)^2+(z-t)^2=b^2+d^2+(y-z)^2+(t-x)^2\,.$$
Ponieważ $a^2+c^2=b^2+d^2$, więc powyższa zależność jest równoważna równości
$$(x-y)^2+(z-t)^2=(y-z)^2+(t-x)^2\,.$$
Przekształcając ją równoważnie, otrzymujemy kolejno
$$x^2-2xy+y^2+z^2-2zt+t^2=y^2-2yz+z^2+t^2-2tx+x^2\,,$$
$$xy-yz+zt-tx=0\,,$$
$$y(x-z)-t(x-z)=0\,,$$
$$(x-z)(y-t)=0\,.$$
Stąd wynika, że $x=z$ lub $y=t$. Pierwsza z tych zależności oznacza, że $AC\parallel A'C'$, natomiast druga jest równoważna warunkowi $BD\parallel B'D'$. To kończy dowód powyższego stwierdzenia.