Matematyczna Olimpiada Juniorów
www.omj.edu.pl

XV Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody drugiego stopnia (11 stycznia 2020 r.)

Rozwiązania zadań konkursowych

1. Dane są liczby rzeczywiste a, b, c. Wiadomo, że liczby $a+b$, $b+c$, $c+a$ są trzema kolejnymi liczbami całkowitymi, wypisanymi w pewnej kolejności, przy czym najmniejsza z nich jest nieparzysta. Wykaż, że liczby a, b, c są także trzema kolejnymi liczbami całkowitymi, wypisanymi w pewnej kolejności.

Rozwiązanie
Sposób I

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $a+b<b+c<c+a$. Wówczas liczba $a+b$ jest nieparzysta, a więc $a+b=2k-1$ dla pewnej liczby całkowitej k. Wobec tego $b+c=2k$ oraz $c+a=2k+1$. Stąd wniosek, że

$$2(a+b+c)=(a+b)+(b+c)+(c+a)=(2k-1)+2k+(2k+1)=6k\,,$$

a zatem $a+b+c=3k$. W związku z tym obliczamy:

$$\begin{aligned} a&=(a+b+c)-(b+c)=3k-2k=k\,,\\ b&=(a+b+c)-(c+a)=3k-(2k+1)=k-1\,,\\ c&=(a+b+c)-(a+b)=3k-(2k-1)=k+1\,. \end{aligned}$$

Ponieważ liczba k jest całkowita, więc liczby b, a, c, wypisane w tej kolejności, są trzema kolejnymi liczbami całkowitymi. To kończy rozwiązanie zadania.

Sposób II

Podobnie jak wyżej przyjmijmy, bez straty ogólności, że $a+b<b+c<c+a$. Wówczas

$$1=(b+c)-(a+b)=c-a \quad \text{oraz} \quad 1=(c+a)-(b+c)=a-b\,,$$

a więc $c=a+1$ oraz $a=b+1$. W związku z tym wśród liczb b, a, c każda następna jest o 1 większa od poprzedniej. Aby wykazać, że są to trzy kolejne liczby całkowite, wystarczy uzasadnić, że liczba a jest całkowita.

Z treści zadania wynika, że liczba $a+b$ jest nieparzysta, liczba $b+c$ jest więc parzysta, a liczba $c+a$ — nieparzysta. Wobec tego suma tych trzech liczb jest parzysta, a więc równa $2k$ dla pewnej liczby całkowitej k. Zapisując, a następnie przekształcając równoważnie ten warunek, uzyskujemy kolejno

$$\begin{aligned} (a+b)+(b+c)+(c+a)&=2k\,,\\ 2(a+b+c)&=2k\,,\\ a+b+c&=k\,. \end{aligned}$$

Stąd wniosek, że liczba $a+b+c$ jest całkowita. Ostatecznie, liczba $(a+b+c)-(b+c)=a$ jest także całkowita, jako różnica dwóch liczb całkowitych. To kończy rozwiązanie zadania.

Uwaga

Teza zadania nie będzie prawdziwa, jeśli zostanie pominięte założenie, że najmniejsza z liczb $a+b$, $b+c$, $c+a$ jest *nieparzysta*. Przyjmijmy bowiem $b=\frac{1}{2}$, $a=\frac{3}{2}$, $c=\frac{5}{2}$. Wówczas liczby $a+b=2$, $b+c=3$, $c+a=4$ są trzema kolejnymi liczbami całkowitymi, podczas gdy liczby a, b, c nie są całkowite.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja

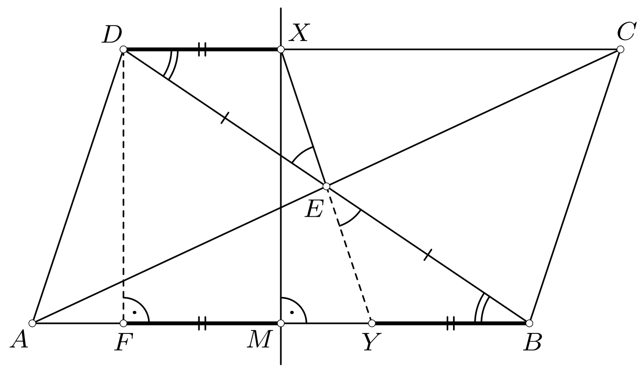
Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

2. Dany jest równoległobok $ABCD$, w którym kąt przy wierzchołku A jest ostry. Symetralna odcinka AB przecina odcinek CD w punkcie X. Przekątne tego równoległoboku przecinają się w punkcie E. Udowodnij, że $XE = \frac{1}{2}AD$.

Rozwiązanie

Sposób I

Oznaczmy przez M środek odcinka AB, a przez Y — punkt przecięcia prostych XE i AB (rys. 1). Niech ponadto F będzie spodkiem wysokości równoległoboku $ABCD$ poprowadzonej z wierzchołka D do boku AB.



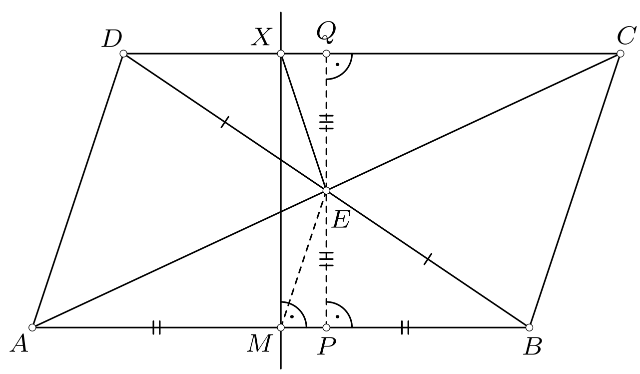
rys. 1

Zauważmy, że $\sphericalangle XED = \sphericalangle YEB$ (kąty wierzchołkowe), $\sphericalangle XDE = \sphericalangle YBE$ (kąty naprzemianległe) oraz $BE = ED$. Stąd wniosek, że trójkąty XED i YEB są przystające (cecha kąt–bok–kąt). Wobec tego $DX = BY$ i $EX = EY$.

Ponadto czworokąt $FMXD$ jest prostokątem, skąd wnioskujemy, że $DX = FM$. W konsekwencji $FM = YB$, a ponieważ $AM = MB$, więc $AF = MY$. W związku z tym trójkąty prostokątne AFD i YMX są przystające (cecha bok–kąt–bok). Stąd wynika, że $AD = YX$. Ostatecznie $XE = \frac{1}{2}YX = \frac{1}{2}AD$, co kończy rozwiązanie zadania.

Sposób II

Oznaczmy przez M środek odcinka AB (rys. 2). Wówczas ME jest linią środkową w trójkącie ADB, a więc $ME = \frac{1}{2}AD$.



rys. 2

Przez punkt E poprowadźmy prostą prostopadłą do boków AB i CD, która przecina te boki odpowiednio w punktach P i Q. Trójkąty ABE i CDE są przystające, zatem ich wysokości poprowadzone z wierzchołka E są równe, czyli $EP = EQ$. Ponadto czworokąt $MPQX$ jest prostokątem, więc $MP = XQ$. Wobec tego trójkąty prostokątne MPE i XQE są przystające (cecha bok–kąt–bok), skąd wynika, że $XE = ME$. Łącząc tę zależność z uzyskaną wyżej równością $ME = \frac{1}{2}AD$, dostajemy tezę.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

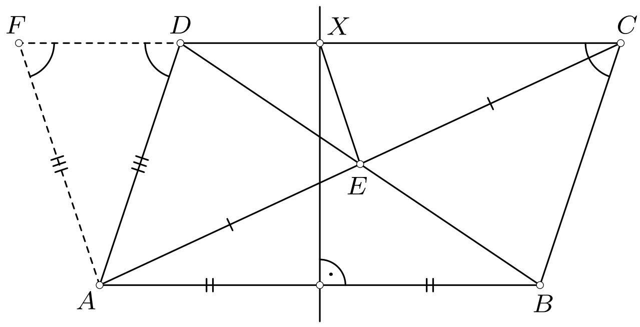
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Sposób III

Niech F będzie punktem leżącym na prostej CD, różnym od D, dla którego $AF = AD$ (rys. 3). Wówczas $\sphericalangle AFD = \sphericalangle ADF = \sphericalangle BCD$, skąd wniosek, że $ABCF$ jest trapezem równoramiennym. Symetralna odcinka AB pokrywa się zatem z symetralną odcinka CF. Stąd wniosek, że punkt X jest środkiem odcinka CF. Wobec tego odcinek XE jest linią środkową w trójkącie AFC i w konsekwencji $XE = \frac{1}{2}AF = \frac{1}{2}AD$.



rys. 3

Uwaga

Więcej na temat twierdzenia o linii środkowej w trójkącie można znaleźć w artykule „Dorysujmy środek odcinka", *Kwadrat* nr 19 (styczeń 2017 r.)

---

3. W pewnym turnieju wzięli udział chłopcy i dziewczęta. Każda osoba rozegrała dokładnie jeden mecz z każdą inną osobą, nie było remisów. Po turnieju okazało się, że każdy przegrał co najmniej raz. Ponadto każdy chłopiec przegrał inną liczbę meczów niż każdy z pozostałych chłopców. Wykaż, że pewna dziewczynka wygrała mecz z pewnym chłopcem.

Rozwiązanie

Sposób I

Oznaczmy przez k liczbę chłopców. Przypuśćmy, wbrew tezie, że żaden z chłopców nie przegrał meczu z dziewczynką. Wtedy we wszystkich przegranych meczach każdy chłopiec został pokonany jedynie przez innych chłopców, a więc nie mógł przegrać więcej niż $k-1$ meczów. Z kolei każdy zawodnik przegrał co najmniej jeden mecz. W związku z tym każdy chłopiec przegrał dokładnie $1, 2, \ldots, k-2$ lub $k-1$ meczów. Tymczasem chłopców jest k. Stąd wynika, że pewnych dwóch chłopców przegrało taką samą liczbę meczów, a to przeczy warunkom zadania. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że pewna dziewczynka wygrała mecz z pewnym chłopcem, co należało wykazać.

Sposób II

Oznaczmy przez k liczbę chłopców. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_k$ będą liczbami meczów przegranych przez kolejnych chłopców. Ponieważ każdy chłopiec przegrał inną liczbę meczów niż każdy z pozostałych chłopców, więc liczby $x_1, x_2, \ldots, x_k$ są różne. Bez straty ogólności przyjmijmy zatem, że $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$.

Ponieważ każdy z chłopców przegrał co najmniej raz, więc $x_1 \geqslant 1$. Wobec tego $x_2 > x_1 \geqslant 1$, skąd wynika, że $x_2 \geqslant 2$. Podobnie, $x_3 > x_2 \geqslant 2$, a więc $x_3 \geqslant 3$. Kontynuując to rozumowanie, dochodzimy do wniosku, że $x_k \geqslant k$.

W konsekwencji, pewien chłopiec przegrał co najmniej k meczów. A ponieważ chłopiec ten rozegrał jedynie $k-1$ meczów z chłopcami, więc musiał on przegrać mecz z pewną dziewczynką. To kończy dowód.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

4. Dany jest trójkąt ABC, w którym miara kąta przy wierzchołku A jest równa $45°$, a kąt przy wierzchołku C jest rozwarty. Udowodnij, że

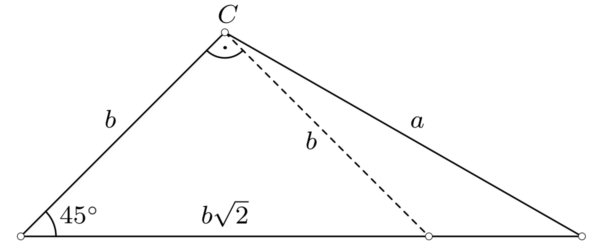
$$BC+(\sqrt{2}-1)\cdot CA<AB.$$

Rozwiązanie

Sposób I

Oznaczmy $a=BC$, $b=CA$, $c=AB$. Ponieważ kąt ACB jest rozwarty, więc na *odcinku* AB istnieje taki punkt D, że $\sphericalangle ACD=90°$ (rys. 4). Z równości $\sphericalangle DAC=45°$ wynika, że trójkąt ACD jest prostokątny równoramienny. Wobec tego $CD=b$ oraz $AD=b\sqrt{2}$.

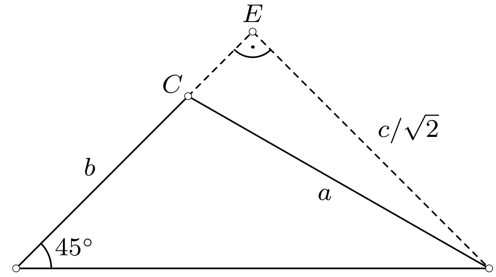
Z nierówności trójkąta BCD wynika, że $BC<BD+CD$, czyli $a<(c-b\sqrt{2})+b$. Nierówność ta jest równoważna zależności $a+(\sqrt{2}-1)\cdot b<c$, którą należało wykazać.



rys. 4

Sposób II

Oznaczmy $a=BC$, $b=CA$, $c=AB$. Niech E będzie spodkiem wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka B (rys. 5). Ponieważ $\sphericalangle ACB>90°$, więc punkt C leży na odcinku AE. Z kolei z równości $\sphericalangle BAC=45°$ wynika, że trójkąt ABE jest prostokątny równoramienny. W związku z tym $AE=BE=c/\sqrt{2}$. Z nierówności $AC<AE$ oraz $BE<BC$ wnioskujemy zatem, że $b<c/\sqrt{2}$ oraz $c/\sqrt{2}<a$.



rys. 5

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta prostokątnego BCE uzyskujemy

$$\left(\frac{c}{\sqrt{2}}-b\right)^2+\left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right)^2=a^2.$$

Przekształcając równoważnie tę zależność, otrzymujemy $c^2-\sqrt{2}bc+b^2=a^2$.

Nierówność, którą należy wykazać, przepisujemy w postaci

$$a-b<c-b\sqrt{2}. \tag{1}$$

Z uzyskanych wyżej szacowań $b<c/\sqrt{2}$ oraz $c/\sqrt{2}<a$ wynika, że obie strony nierówności (1) są dodatnie. Podnosząc zatem obie strony tej nierówności do kwadratu, otrzymujemy równoważną postać zależności (1):

$$a^2-2ab+b^2<c^2-2\sqrt{2}bc+2b^2.$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Przekształcamy tę nierówność równoważnie, wykorzystując otrzymaną wyżej zależność $c^2-\sqrt{2}\,bc+b^2=a^2$. Dostajemy w ten sposób kolejno:

$$a^2-2ab<c^2-2\sqrt{2}\,bc+b^2\,,$$
$$c^2-\sqrt{2}\,bc+b^2-2ab<c^2-2\sqrt{2}\,bc+b^2\,,$$
$$\sqrt{2}\,bc<2ab\,,$$
$$c<a\sqrt{2}\,.$$

Uzyskaliśmy nierówność równoważną udowodnionej wcześniej zależności $c/\sqrt{2}<a$. To kończy dowód nierówności (1), a tym samym rozwiązanie zadania.

Sposób III (szkic)

Oznaczmy $a=BC$, $b=CA$, $c=AB$. Podobnie jak w sposobie II dowodzimy najpierw, że $c^2-\sqrt{2}\,bc+b^2=a^2$ oraz $b<c/\sqrt{2}$, $c/\sqrt{2}<a$.

Z dwóch ostatnich nierówności wynika, że $a>b$. Ponadto $a+b>c$. Mnożąc zatem obie strony nierówności $a+b>c$ przez dodatnią liczbę $(a-b)/c$, uzyskujemy

$$\frac{(a-b)(a+b)}{c}>a-b\,.$$

Dzieląc z kolei obie strony zależności $c^2-\sqrt{2}\,bc=a^2-b^2$ przez c, a następnie wykorzystując ostatnią nierówność, otrzymujemy

$$c-\sqrt{2}\,b=\frac{a^2-b^2}{c}=\frac{(a-b)(a+b)}{c}>a-b\,.$$

Wobec tego $c-\sqrt{2}\,b>a-b$, czyli $c>a+(\sqrt{2}-1)\cdot b$, co należało dowieść.

---

5. Dane są dodatnie liczby całkowite a, b o następującej własności: dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 1$ ułamek

$$\frac{a+n}{b+n}$$

jest skracalny. Wykaż, że $a=b$.

Rozwiązanie

Sposób I

Przypuśćmy, że $a\neq b$. Przyjmijmy, bez straty ogólności, że $a>b$. Ponieważ liczb pierwszych jest nieskończenie wiele, więc istnieje taka dodatnia liczba naturalna n, że liczba $p=a+n$ jest pierwsza. Wtedy ułamek

$$\frac{a+n}{b+n}$$

można skrócić jedynie przez p. Jednak liczba $b+n$ nie może być podzielna przez p, gdyż $b+n<a+n=p$. Uzyskaliśmy sprzeczność, z której wynika, że $a=b$.

Sposób II

Podobnie jak wyżej przypuśćmy, że $a\neq b$ oraz przyjmijmy, bez straty ogólności, że $a>b$.

Niech $n=(a-b)\cdot b-b+1$. Ponieważ $a>b$, więc $a-b\geqslant 1$, a zatem $n\geqslant 1\cdot b-b+1=1$. Z warunków zadania wynika więc, że ułamek

$$\frac{a+n}{b+n}=\frac{(a-b)\cdot b+(a-b)+1}{(a-b)\cdot b+1}$$

jest skracalny. Załóżmy, że można go skrócić przez pewną liczbę naturalną $d>1$.

Liczba d jest dzielnikiem obu liczb $a+n$ oraz $b+n$, jest zatem dzielnikiem różnicy tych liczb, czyli liczby $(a+n)-(b+n)=a-b$. W związku z tym d jest także dzielnikiem liczby $(a-b)\cdot b$. Wykorzystując ponownie to, że d jest dzielnikiem liczby $b+n$, wnioskujemy, że d jest także dzielnikiem różnicy $(b+n)-(a-b)\cdot b=1$. Uzyskaliśmy sprzeczność, gdyż liczba d jest większa od 1; nie może więc być dzielnikiem liczby 1. To kończy rozwiązanie zadania.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku