XVI Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody drugiego stopnia (23 stycznia 2021 r.)

Rozwiązania zadań konkursowych

1. Liczby a, b spełniają warunek $2a+a^2=2b+b^2$. Wykaż, że jeżeli liczba a jest całkowita, to liczba b także jest całkowita.

Rozwiązanie

Sposób I

Dodając 1 do obu stron równości $2a+a^2=2b+b^2$, uzyskujemy $1+2a+a^2=1+2b+b^2$. Stąd, po wykorzystaniu wzoru $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$, dostajemy $(1+a)^2=(1+b)^2$. Wobec tego $1+a=1+b$ lub $1+a=-(1+b)$, czyli $b=a$ lub $b=-2-a$. W obu przypadkach b jest więc liczbą całkowitą.

Sposób II

Tym razem w rachunkach użyjemy wzoru $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$. Przekształcając bowiem równoważnie zależność $2a+a^2=2b+b^2$, uzyskujemy kolejno

$$2a-2b+a^2-b^2=0,$$
$$2(a-b)+(a+b)(a-b)=0,$$
$$(2+a+b)(a-b)=0.$$

Stąd wniosek, że $2+a+b=0$ lub $a-b=0$, czyli $b=-2-a$ lub $b=a$. W obu przypadkach b jest liczbą całkowitą.

2. Dany jest kwadrat $ABCD$. Punkt E leży na przekątnej AC, przy czym $AE>EC$. Na boku AB wybrano punkt F, różny od B, dla którego $EF=DE$. Udowodnij, że $\sphericalangle DEF=90°$.

Rozwiązanie

Sposób I

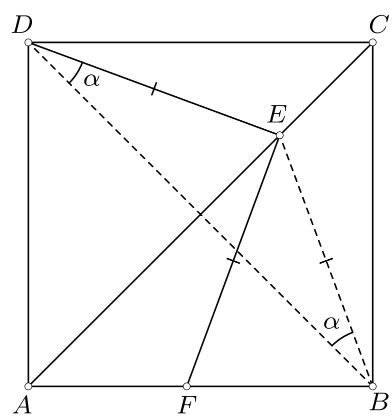
Ponieważ $BC=DC$ oraz $\sphericalangle BCE=45°=\sphericalangle DCE$, więc trójkąty BCE oraz DCE są przystające (cecha bok–kąt–bok). Stąd $BE=DE$ (rys. 1).

Oznaczmy zatem $\alpha=\sphericalangle EBD=\sphericalangle EDB$. Wtedy $\sphericalangle BED=180°-2\alpha$.

Ponadto $BE=DE=EF$, więc $\sphericalangle EFB=\sphericalangle EBF=45°+\alpha$. W związku z tym

$$\sphericalangle FEB=180°-2(45°+\alpha)=90°-2\alpha.$$

Wobec tego $\sphericalangle DEF=\sphericalangle DEB-\sphericalangle FEB=(180°-2\alpha)-(90°-2\alpha)=90°$, co kończy dowód.



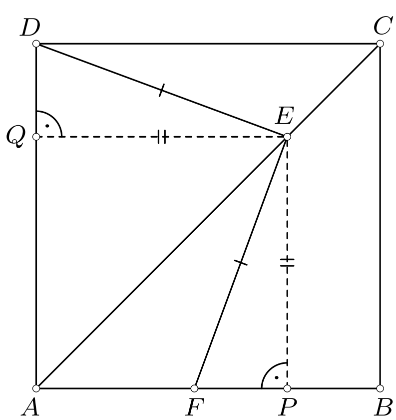
rys. 1

Sposób II

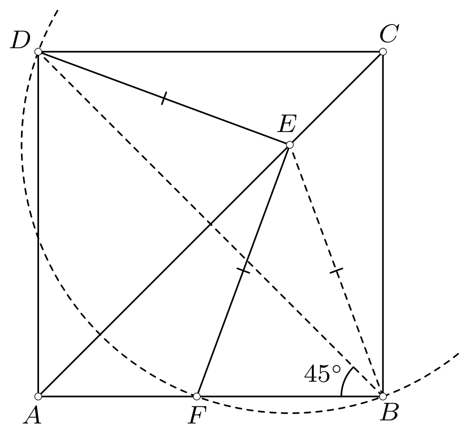
Oznaczmy przez P i Q rzuty prostokątne punktu E odpowiednio na boki AB i AD (rys. 2). Ponieważ punkt E leży na dwusiecznej kąta BAD, więc $EP=EQ$. Ponadto $EF=DE$. W związku z tym, wykorzystując twierdzenie Pitagorasa, otrzymujemy

$$PF=\sqrt{EF^2-EP^2}=\sqrt{DE^2-EQ^2}=QD\,.$$

Z zależności tych wynika, że trójkąty EPF i EQD są przystające (cecha bok–bok–bok). Wobec tego $\sphericalangle FEP=\sphericalangle DEQ$. Stąd, po dodaniu do obu stron miary kąta QEF, otrzymujemy $\sphericalangle DEF=\sphericalangle QEP$. Ale $\sphericalangle QEP=90^\circ$, więc również $\sphericalangle DEF=90^\circ$. To kończy dowód.



rys. 2



rys. 3

Sposób III

Podobnie jak w sposobie I uzasadniamy najpierw, że $BE=DE$ (rys. 3). Rozpatrzmy następnie okrąg o środku E i promieniu BE. Ponieważ $BE=DE=FE$, więc okrąg ten przechodzi przez punkty B, D i F. W związku z tym kąt DEF jest kątem środkowym opartym na łuku DF. Ma więc on dwa razy większą miarę od każdego kąta wpisanego opartego na tym łuku, w szczególności kąta DBF. Zatem $\sphericalangle DEF=2\sphericalangle DBF=2\cdot 45^\circ=90^\circ$.

---

3. Dane są takie dodatnie liczby całkowite a, b, dla których liczba $5a+3b$ jest podzielna przez liczbę $a+b$. Wykaż, że $a=b$.

Rozwiązanie

Sposób I

Z warunków zadania wynika, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita k, dla której $5a+3b=k(a+b)$. Przekształcając tę zależność, uzyskujemy kolejno

$$5a-ka=kb-3b\,,$$
$$(5-k)a=(k-3)b\,.$$

Liczby a, b są dodatnie. Zatem jeśli $k\geqslant 5$, to lewa strona ostatniej równości jest ujemna lub równa 0, podczas gdy jej prawa strona jest dodatnia. Podobnie, jeśli $k\leqslant 3$, to lewa tej samej równości jest dodatnia, podczas gdy jej prawa strona jest ujemna lub równa 0. Wobec tego k musi być równe 4. Podstawiając zatem $k=4$ do uzyskanej wyżej równości, dostajemy $a=b$, co kończy dowód.

Sposób II

Podobnie jak w sposobie I rozpoczynamy od obserwacji, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita k, dla której $5a+3b=k(a+b)$. Wobec tego

$$k=\frac{5a+3b}{a+b}=\frac{4(a+b)+a-b}{a+b}=4+\frac{a-b}{a+b}\,.$$

Liczby k i 4 są całkowite, więc z powyższej równości wynika, że liczba $a-b$, a więc także i liczba $b-a$, jest podzielna przez $a+b$.

Jeśli $a>b$, to liczba $a-b$ jest dodatnia i mniejsza od $a+b$, a wtedy $a+b$ nie może być dzielnikiem liczby $a-b$. Podobnie, jeśli $a<b$, to liczba $b-a$ jest dodatnia i mniejsza od $a+b$, a wtedy $a+b$ nie może być dzielnikiem liczby $b-a$.

W obu przypadkach uzyskujemy sprzeczność, z której wynika, że $a=b$. To kończy rozwiązanie zadania.

---

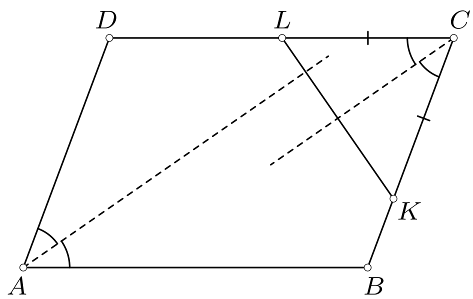
4. Punkty K i L znajdują się odpowiednio na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$, przy czym

$$AB+BK=AD+DL.$$

Udowodnij, że dwusieczna kąta BAD jest prostopadła do prostej KL.

Rozwiązanie

Ponieważ $\sphericalangle BAD=\sphericalangle DCB$, więc dwusieczna kąta BAD tworzy z prostą AD taki sam kąt, jak dwusieczna kąta DCB z prostą CB. W związku z tym, skoro proste AD i CB są równoległe, to także dwusieczne kątów BAD i DCB są równoległe. Wystarczy zatem wykazać, że dwusieczna kąta DCB jest prostopadła do prostej KL.



rys. 4

Przekształćmy daną w treści zadania zależność $AB+BK=AD+DL$ równoważnie w następujący sposób:

$$AB-DL=AD-BK,$$
$$CD-DL=BC-BK,$$
$$CL=CK.$$

Trójkąt KLC jest więc równoramienny, skąd wniosek, że dwusieczna kąta przy jego wierzchołku C jest prostopadła do podstawy KL. To kończy rozwiązanie zadania.

---

5. Tomek zaprosił na zdalne przyjęcie urodzinowe 11 swoich znajomych, którzy kolejno będą dołączać do spotkania. Tomek dobrał gości w taki sposób, aby niezależnie od kolejności w jakiej będą dołączać, zawsze nowo przybyła osoba znała co najmniej połowę już obecnych osób, wliczając Tomka. Wykaż, że wśród zaproszonych gości istnieje taki, który zna wszystkich pozostałych 10 znajomych Tomka.

Uwaga:

Przyjmujemy, że jeśli osoba A zna osobę B, to również B zna A.

Rozwiązanie

Wykażemy najpierw, że każdy znajomy Tomka zna co najmniej 9 spośród pozostałych 10 gości.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej

Przypuśćmy, że tak nie jest. Wtedy pewna osoba, nazwijmy ją A, nie zna pewnych dwóch innych osób, powiedzmy B i C. Gdyby więc do spotkania zdalnego dołączyły najpierw osoby B i C, to spośród trzech osób obecnych już na spotkaniu (B, C i Tomek) A znałaby tylko Tomka, a więc mniej niż połowę wszystkich obecnych. To jednak jest sprzeczne z warunkami zadania.

Stąd wniosek, że każdy znajomy Tomka zna co najmniej 9 innych gości. Gdyby okazało się, że każdy zna dokładnie 9 innych osób, to łączna liczba znajomości w grupie 11 osób byłaby równa $\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 11$, a więc nie byłaby liczbą całkowitą. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że co najmniej jeden spośród znajomych Tomka musi znać wszystkich pozostałych 10 jego gości.

Dodatek: Najczęstsze błędy w zadaniu 1.

W wielu czytanych przez nas rozwiązaniach zadania 1. często pojawiały się te same nieprawdziwe stwierdzenia. W tym dodatkowym materiale postaramy się wyjaśnić, na czym one polegały i podać możliwie proste kontrprzykłady. Błędy zostały podzielone na pięć zasadniczych kategorii, a sformułowania są w dużej części zaczerpnięte z oryginalnych prac uczestników 2. etapu.

Pierwsza grupa popularnych błędów dotyczy zbioru liczb rzeczywistych.

Błąd 1. Każda liczba niecałkowita jest liczbą wymierną.

Komentarz. Istnieją liczby niecałkowite, których nie można przedstawić w postaci ułamka nieskracalnego $\frac{p}{q}$, gdzie p i q są liczbami całkowitymi. Nazywamy je liczbami *niewymiernymi*. Są nimi na przykład $\sqrt{2}$ i $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ale także π (co jednak nie ma już tak prostego dowodu).

Błąd 2. Każda liczba niewymierna jest pierwiastkiem kwadratowym z liczby całkowitej nieujemnej.

Komentarz. Choć zdecydowanie najprostszymi przykładami liczb niewymiernych są właśnie pierwiastki kwadratowe z pewnych liczb całkowitych nieujemnych, takie jak $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots$, to nie są to jedyne liczby niewymierne. Wiedząc na przykład, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną, łatwo jest uzasadnić, że $1+\sqrt{2}$ także jest liczbą niewymierną. Jednak $(1+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{2}$ nie jest liczbą całkowitą.

Błąd 3. Suma liczb niecałkowitych jest liczbą niecałkowitą.

Komentarz. Zauważmy na przykład, że jeśli x jest dowolną liczbą niecałkowitą, to $-x$ również jest liczbą niecałkowitą, a suma $x+(-x)$ zawsze będzie równa 0, czyli jest liczbą całkowitą. Tak więc kontrprzykład możemy znaleźć już wśród liczb wymiernych: $\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

Błąd 4. Suma liczb niewymiernych jest liczbą niewymierną.

Komentarz. Podobnie jak w powyższym kontrprzykładzie, możemy zapisać $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$.

Błąd 5. Iloczyn liczb niecałkowitych jest liczbą niecałkowitą.

Komentarz. Zauważmy na przykład, że $\frac{2}{3}$ i $\frac{3}{2}$ są liczbami niecałkowitymi, których iloczyn $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2} = 1$ jest liczbą całkowitą.

Błąd 6. Iloczyn liczb niewymiernych jest liczbą niewymierną.

Komentarz. Tym razem możemy zapisać $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2$.

Druga grupa dotyczy zapisu dziesiętnego liczb rzeczywistych. Najczęstszym błędem było w tym przypadku założenie, że zapis dziesiętny liczby b jest *skończony*, co nie jest prawdą nawet dla wszystkich liczb wymiernych. Na przykład $\frac{1}{3} = 0,(3) = 0,333333\ldots$ ma nieskończone rozwinięcie dziesiętne, złożone z powtarzającej się cyfry 3. Pisząc „spójrzmy na ostatnią cyfrę zapisu dziesiętnego liczby b (...)” w oczywisty sposób rozważamy jedynie te liczby rzeczywiste, dla których wspomniana „ostatnia cyfra” naprawdę istnieje.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej

Błąd 7. **W zapisie dziesiętnym liczby b^2 występuje więcej cyfr po przecinku niż w zapisie dziesiętnym liczby b.**

Komentarz. Jest to prawda, o ile zapis dziesiętny b jest skończony. Co więcej, w zapisie dziesiętnym liczby b^2 występuje wtedy dokładnie dwa razy więcej cyfr po przecinku niż w zapisie dziesiętnym liczby b. Istotnie, jeśli oznaczymy przez n liczbę cyfr po przecinku w zapisie dziesiętnym liczby b, to możemy przedstawić ją w postaci $b = \frac{p}{10^n}$, gdzie p jest liczbą całkowitą niepodzielną przez 10. Wówczas $b^2 = \frac{p^2}{10^{2n}}$, a liczba p^2 wciąż jest niepodzielna przez 10.

Jeśli jednak rozwinięcie dziesiętne liczby b jest nieskończone, to rozważanemu stwierdzeniu ciężko jest nadać sens matematyczny.

Błąd 8. **Jeśli zapis dziesiętny liczby b kończy się niezerową cyfrą po przecinku, to zapis dziesiętny liczby $b(2+b)$ również.**

Komentarz. Znów jest to prawda, o ile zapis dziesiętny b jest skończony. Co więcej, można nawet pokazać, że jeśli b jest dowolną niecałkowitą liczbą wymierną, to $b(2+b)$ również jest liczbą niecałkowitą. Istotnie, zapiszmy b w postaci ułamka nieskracalnego $\frac{p}{q}$, gdzie p i q są liczbami całkowitymi. Gdyby $b(2+b) = \frac{p(2q+p)}{q^2}$ było liczbą całkowitą, to wówczas mielibyśmy podzielność $q^2 \mid p(2q+p)$, z której wynika w szczególności $q \mid p(2q+p)$. Ponieważ jednak p jest względnie pierwsze z q, możemy zapisać $q \mid 2q+p$, skąd dostaniemy natychmiast $q \mid p$, wbrew założeniu o niecałkowitości liczby b.

Jeśli jednak rozwinięcie dziesiętne liczby b jest nieskończone, to znów rozważanemu stwierdzeniu ciężko jest nadać sens matematyczny.

Trzecia grupa popularnych błędów dotyczy własności wyrażenia $2x + x^2$.

Błąd 9. **Jeśli $2a + a^2 = 2b + b^2$, to $a = b$.**

Komentarz. To, że po obu stronach równości występują podobne wyrażenia różniące się jedynie nazwą zmiennej, nie oznacza jeszcze, że równość zachodzi tylko wtedy, gdy wartości zmiennych a i b są sobie równe. Aby się o tym przekonać, wystarczy podstawić $a = -2$, $b = 0$. Wówczas $2a + a^2 = 0 = 2b + b^2$, ale oczywiście $a \neq b$.

Błąd 10. **Jeśli $a < b$, to $2a + a^2 < 2b + b^2$.**

Komentarz. Aby przekonać się, że stwierdzenie nie jest prawdziwe, wystarczy podstawić $a = -3$, $b = 0$. Wówczas $a < b$, ale $2a + a^2 = 3 > 0 = 2b + b^2$. Ponadto dla $a = 0$, $b = 1$ wciąż mamy $a < b$, ale tym razem $2a + a^2 = 0 < 3 = 2b + b^2$. Zatem wiedząc jedynie, że $a < b$, nie możemy udowodnić żadnej z dwóch nierówności.

Niepoprawne uzasadnienie tego stwierdzenia najczęściej opierało się na obserwacji, że jeśli $a < b$, to $a^2 < b^2$. Jest to prawda jedynie wtedy, gdy liczby a i b są *nieujemne*, czego niestety nie możemy założyć o liczbach a i b z treści zadania. Co więcej, gdy liczby a i b są *niedodatnie*, nierówność zachodzi w przeciwną stronę, na przykład $-2 < -1$, ale $(-2)^2 = 4 > 1 = (-1)^2$.

Błąd 11. Jeśli $2b + b^2$ jest liczbą całkowitą, to b też jest liczbą całkowitą.

Komentarz. Jest to chyba najczęściej pojawiające się niepoprawne stwierdzenie. Być może dlatego, że zawiera w sobie ziarno prawdy. Jeśli bowiem ograniczymy się do rozważania wymiernych b, to rzeczywiście jest ono prawdziwe, co wynika z rozumowania przedstawionego w komentarzu do podpunktu 8. Jeśli jednak dopuścimy liczby niewymierne, to na przykład dla $b = \sqrt{2} - 1$ otrzymamy

$$2b + b^2 = 2(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} - 1)^2 = 2(\sqrt{2} - 1) + (2 - 2\sqrt{2} + 1) = 1,$$

czyli liczbę całkowitą.

Czwarta grupa to najczęściej popełniane błędy podczas wykonywania działań arytmetycznych.

Błąd 12. $\sqrt{x^2} = x$

Komentarz. Pierwiastek kwadratowy jest z definicji liczbą nieujemną, dlatego równość nie może być spełniona dla ujemnych x. Na przykład, $\sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1 \neq -1$. Prawdą jest jednak, że $\sqrt{x^2} = |x|$, gdzie $|x|$ jest *wartością bezwzględną* liczby x, to znaczy

$$|x| = \begin{cases} x & \text{gdy } x \geqslant 0 \\ -x & \text{gdy } x < 0 \end{cases}.$$

Błąd 13. $\sqrt{x + y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

Komentarz. Aby przekonać się, że nie jest to prawda, wystarczy podstawić $x = 1$ i $y = 1$. Wówczas $\sqrt{1+1} = \sqrt{2} \neq 2 = \sqrt{1} + \sqrt{1}$. Zauważmy, że podnosząc prawą stronę „równości” do kwadratu, dla nieujemnych x, y otrzymamy

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = \sqrt{x}^2 + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + \sqrt{y}^2 = x + 2\sqrt{xy} + y,$$

które to wyrażenie jest różne od $x + y$, o ile $xy \neq 0$.

Błąd 14. Jeśli $x^2 = y^2$, to $x = |y|$.

Komentarz. Aby przekonać się, że nie jest to prawda, wystarczy podstawić $x = -1$ i $y = 1$. Błąd w tym miejscu jest dość subtelny. Z równości $x^2 = y^2$ wynika, że $x = y$ lub $x = -y$, ale nie jest to równoważne z $x = |y|$ ani z $|x| = y$. Nie znamy bowiem znaków zmiennych x i y, a na przykład zapis $x = |y|$ niejawnie zakłada, że x jest liczbą nieujemną.

Błąd 15. Jeśli $xz = yz$, to $x = y$.

Komentarz. Jeśli podstawimy $x = 1$, $y = 2$ i $z = 0$, to otrzymamy wówczas $1 \cdot 0 = 2 \cdot 0$, choć oczywiście $1 \neq 2$. Najczęściej niepoprawny wniosek $x = y$ był wynikiem podzielenia równości stronami przez z. Jednak we wskazanym kontrprzykładzie $z = 0$, więc to działanie nie było możliwe do wykonania. Dlatego przed podzieleniem równości stronami zawsze należy pamiętać o sprawdzeniu, czy wartość wyrażenia przez które dzielimy może być równa 0, a jeśli tak – rozbić rozumowanie na dwa przypadki.

Błąd 16. Jeśli $p \neq q$ i $r \neq s$, to $p + r \neq q + s$.

Komentarz. Wystarczy zauważyć, że $0 \neq 1$ i $1 \neq 0$, ale $0 + 1 = 1 + 0$.

Ostatnia grupa błędów dotyczy struktury dowodu i logiki rozumowania.

Błąd 17. Jak widać na przykładach (...)

Komentarz. Niestety, nawet sprawdzenie bardzo dużej liczby przykładów nie może być uznane za dowód, ponieważ nasza intuicja mimo wszystko może nas zawieść. Rozważmy na przykład następujące pytanie: czy istnieje liczba całkowita dodatnia n taka, że zapis dziesiętny liczby 2^n rozpoczyna się cyfrą 7? Analizując kolejne przykłady: $1, 2, 4, 8, 16 \ldots$ możemy szybko się zniechęcić i dojść do wniosku, że żadna potęga liczby 2 nie rozpoczyna się cyfrą 7. Okazuje się jednak, że nie jest to prawda, a najmniejsza liczba n o tej własności to 46, dla której $2^{46} = 70368744177664$. Co więcej, gdy wypiszemy odpowiednio dużo kolejnych potęg liczby 2, cyfra 7 będzie występować na pierwszym miejscu częściej niż cyfra 8!

Błąd 18. Załóżmy, że b jest liczbą całkowitą (...)

Komentarz. Jeśli na samym początku dowodu założymy, że b jest liczbą całkowitą, to z pewnością wiele stwierdzeń stanie się oczywiste. Jednak wówczas nasze rozumowanie będzie można podsumować słowami: „Jeśli założymy, że b jest liczbą całkowitą, to możemy dojść do wniosku, że b jest liczbą całkowitą.”. Jest to niewątpliwie prawda, ale nie jest to niestety rozwiązanie zadania.

Dodatek: Najczęstsze błędy w zadaniu 2.

Podczas sprawdzania zadania olimpijskiego oceniane jest przede wszystkim rozumowanie przedstawione przez uczestnika, a więc poprawność uzasadnienia kolejnych kroków prowadzących od założeń do tezy. Komisja oceniająca sprawdza, między innymi, czy uczestnik nie wpadł w pułapkę błędnego rozumowania, polegającego na umieszczeniu w rozwiązaniu nieuzasadnionych stwierdzeń, nazywanych przez nas dalej — życzeniami. Przedstawiamy pięć pułapek w rozumowaniu, w które zdarzało się wpaść uczestnikom zawodów II stopnia, rozwiązującym zadanie 2. Do każdej pułapki dołączamy przykłady „życzeniowych rozumowań” oraz ujawniamy, jak stwierdzenia te odnoszą się do rzeczywistości.

Pułapka 1. „Założenie na życzenie”, czyli dokładanie założenia, które natychmiast daje rozwiązanie.

Przykład 1.1. *Opiszmy okrąg na czworokącie $ADEF$ (rys. 1). Wtedy $\sphericalangle FAD = 90°$, więc DF jest średnicą okręgu. Stąd kąt DEF jest prosty.*

Życzenie: punkty A, D, E, F leżą na jednym okręgu.

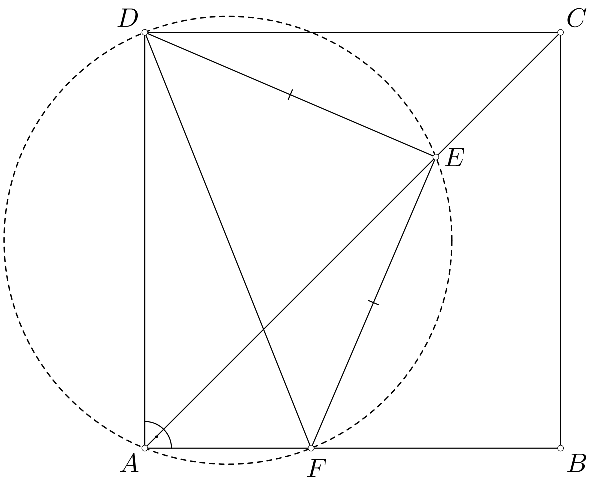
Rzeczywistość: Nie każde cztery punkty leżą na jednym okręgu. Przedstawione w przykładzie rozumowanie pokazuje, że *wystarczy uzasadnić*, że punkty A, D, E, F leżą na jednym okręgu. To uzasadnienie jest jednak kluczową częścią rozwiązania.

Przykład 1.2. *Niech punkt G będzie rzutem punktu E na prostą DF (rys. 2). Wtedy trójkąty DGE, EGF są trójkątami prostokątnymi równoramiennymi. Stąd*

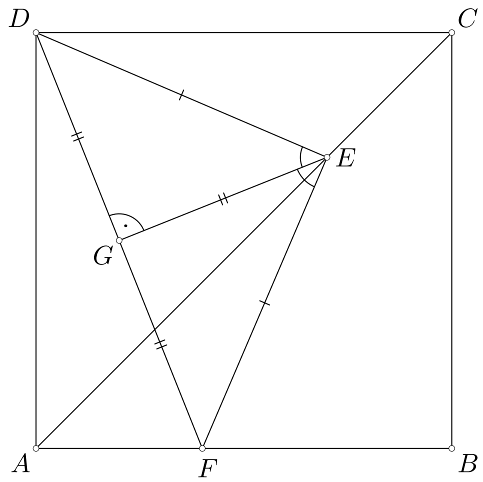
$$\sphericalangle DEF = \sphericalangle DEG + \sphericalangle GEF = 45° + 45° = 90°.$$

Życzenie: Trójkąty DGE, EGF są równoramienne.

Rzeczywistość: Podobnie jak w poprzednim przykładzie pokazaliśmy, że *wystarczy uzasadnić*, iż trójkąty DGE, EGF są równoramienne. To jednak nie jest prostsze niż samo rozwiązanie zadania.



rys. 1



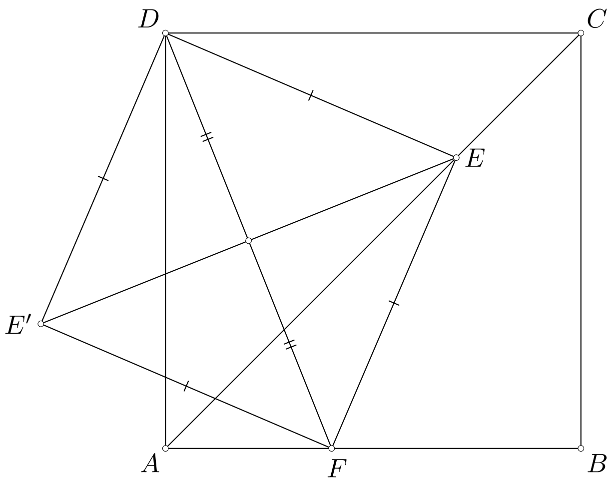
rys. 2

Pułapka 2. „Wniosek na życzenie”, czyli wyciąganie wniosków bez uzasadnienia.

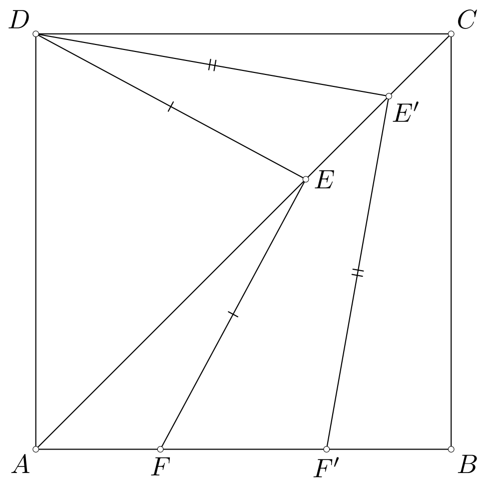
Przykład 2.1. *Niech E' będzie punktem symetrycznym do punktu E względem środka odcinka DF (rys. 3). Ponieważ trójkąt DEF jest równoramienny, więc czworokąt $DEFE'$ jest kwadratem.*

Życzenie: Każdy trójkąt równoramienny jest połówką kwadratu.

Rzeczywistość: Każdy trójkąt równoramienny jest połówką rombu, ale niekoniecznie kwadratu. Uzasadnienie, że $DEFE'$ jest kwadratem wymaga skorzystania z pozostałych założeń zadania, czyli z położenia punktów $E,\ F$ na przekątnej i boku kwadratu $ABCD$.



rys. 3



rys. 4

Pułapka 3. „Uproszczenie na życzenie”, czyli rozważanie sytuacji prostszej niż opisana w zadaniu.

Przykład 3.1. *Zauważmy, że* $\sphericalangle ADF = \frac{1}{2}\sphericalangle ADB = \frac{1}{2} \cdot 45^\circ = 22{,}5^\circ$.

Życzenie: Prosta DF jest dwusieczną kąta ADB.

Rzeczywistość: Punkt F może być dowolnym punktem leżącym wewnątrz odcinka AB (rys. 4). Nasze życzenie jest spełnione tylko dla jednego, bardzo szczególnego położenia punktów $E,\ F$.

Przykład 3.2. *Z treści zadania wynika, że punkt E jest punktem przecięcia przekątnych kwadratu $ABCD$.*

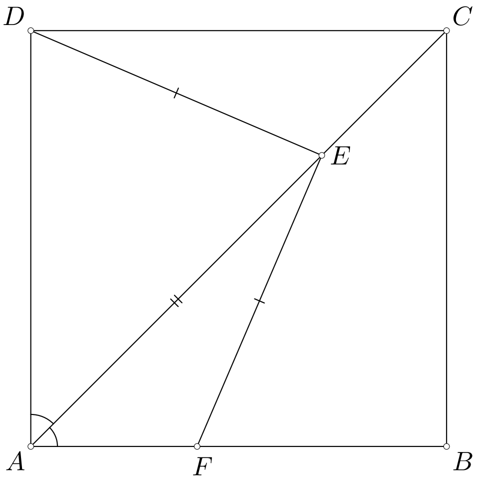
Życzenie: Jest tylko jedno, bardzo szczególne położenie punktu E, dla którego założenia zadania są spełnione.

Rzeczywistość: Punkt E może być dowolnym punktem wewnątrz odcinka AC spełniającym założenie $AE > EC$ (rys. 4). Co więcej, założenie to wyklucza sytuację, w której punkt E jest punktem przecięcia przekątnych kwadratu.

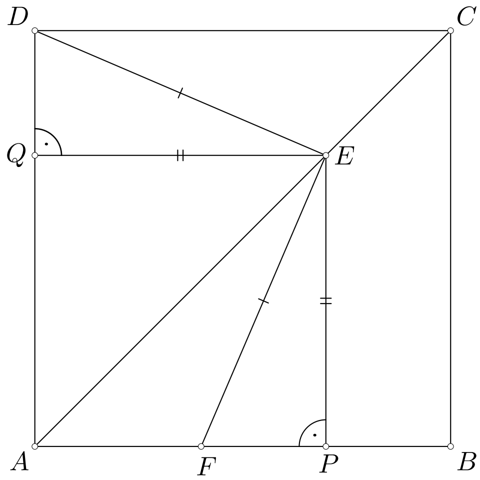
Pułapka 4. „Falsyfikat na życzenie”, czyli tworzenie nieprawdziwych twierdzeń, podobnych do znanych faktów.

Przykład 4.1. *Zauważmy, że* $FE = ED$ *oraz* $\sphericalangle FAE = 45^\circ = \sphericalangle EAD$ *(rys. 5). Trójkąty* AFE *i* ADE*, mające dodatkowo wspólny bok* AE*, są więc przystające na mocy cechy przystawania bok-kąt-bok.*

> *Życzenie:* W cesze przystawania bok-kąt-bok nie jest istotne, które pary boków i który kąt bierzemy pod uwagę.
>
> *Rzeczywistość:* Już na pierwszy rzut oka widać, że trójkąt AFE jest rozwartokątny, w przeciwieństwie do trójkąta ADE. Nie mogą być więc one przystające. Korzystając z cechy przystawania bok-kąt-bok, musimy zadbać o to, aby równy kąt znajdował się pomiędzy odpowiednimi parami równych boków. W podanym przykładzie próbowaliśmy skorzystać z nieprawdziwej w ogólności cechy przystawania bok-bok-kąt.



rys. 5



rys. 6

Przykład 4.2. *Niech* P, Q *będą rzutami prostokątnymi punktu* E *odpowiednio na boki* AB, AD *(rys. 6). Skoro prosta* AC *jest dwusieczną kąta* BAD*, to* $EP = EQ$*. Dodatkowo* $EF = ED$ *oraz* $\sphericalangle EPF = \sphericalangle EQD$*, czyli na mocy cechy przystawania bok-kąt-bok, trójkąty* EPF *i* EQD *są przystające.*

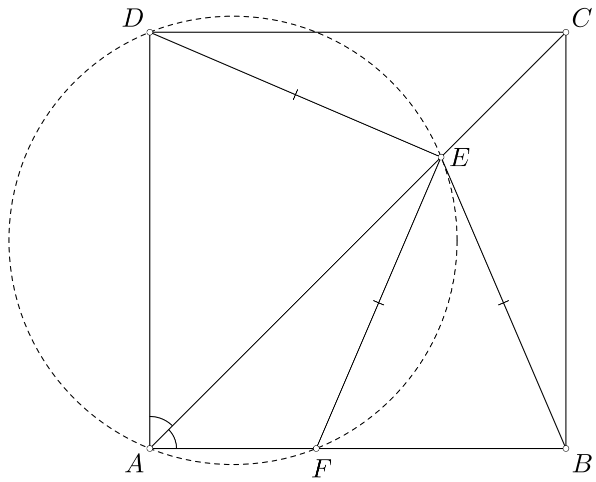
> *Życzenie:* W cesze przystawania bok-kąt-bok nie jest istotne, które pary boków i który kąt bierzemy pod uwagę.
>
> *Rzeczywistość:* Tak naprawdę próbujemy skorzystać z cechy przystawania bok-bok-kąt, która — jak już wiemy z poprzedniego przykładu — w ogólności nie zachodzi. W szczególnym przypadku, gdy rozważane równe kąty mają miarę 90 stopni, cecha przystawania bok-bok-kąt jest jednak prawdziwa. Szczegóły uzasadnienia pozostawiamy Czytelnikowi.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej

Przykład 4.3. *Ponieważ $\sphericalangle FAE = 45^\circ = \sphericalangle EAD$ oraz $FE = ED$, więc na mocy równości kątów wpisanych w okrąg opartych na równych cięciwach, punkty A, F, E, D leżą na jednym okręgu (rys. 7).*

Życzenie: Z równości odcinków i kątów na nich opartych można wywnioskować, że pewne cztery punkty leżą na jednym okręgu.

Rzeczywistość: Zauważmy, że $\sphericalangle BAE = 45^\circ = \sphericalangle EAD$ oraz $BE = ED$. Moglibyśmy więc w taki sam sposób uzasadnić, że punkty A, B, E, D leżą na jednym okręgu — co nie jest prawdą. To, że punkty A, F, E, D leżą na jednym okręgu, wymaga więc dodatkowego uzasadnienia.



rys. 7

Pułapka 5. „Teza na życzenie", czyli obserwacja niebędąca dowodem.

Przykład 5.1. *Zaznaczam na przekątnej AC taki punkt E, że $AE > EC$. Następnie przy pomocy cyrkla wyznaczam na boku AB taki punkt F, różny od punktu B, że $ED = EF$. Przy pomocy ekierki sprawdzam, że kąt DEF jest prosty.*

Życzenie: konstrukcja geometryczna dowodzi, że teza zadania jest prawdziwa.

Rzeczywistość: Konstrukcja może być pomocna w wykonaniu dokładnego rysunku. Nie możemy jednak wyciągać wniosków jedynie na podstawie konstrukcji. Narzędzia, którymi dysponujemy, nie są dokładne — może kąt DEF ma tak naprawdę miarę $89,9$ stopnia?
Mimo to wyobraźmy sobie na chwilę, że staliśmy się posiadaczami cyrkla i ekierki doskonałych, nieomylnych. Nawet wtedy konstrukcja nie staje się dowodem. Przeprowadzając konstrukcję, rozważamy bowiem bardzo szczególne położenie punktu E. Pomijamy wszystkie pozostałe położenia, których jest przecież nieskończenie wiele.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej