



VI Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia trzeciego

(19 marca 2011 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych



1. Czy istnieją takie liczby całkowite a i b , że liczby

$$a^2 + b \quad \text{oraz} \quad a + b^2$$

są kolejnymi liczbami całkowitymi? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że takie liczby a oraz b istnieją. Wtedy liczba $(a^2 + b) - (b^2 + a)$ jest równa 1 lub -1 . Z drugiej strony,

$$(a^2 + b) - (a + b^2) = a(a - 1) - b(b - 1).$$

Obie liczby $a(a - 1)$ i $b(b - 1)$ są parzyste, skąd wynika, że liczba $a(a - 1) - b(b - 1)$ jest także parzysta. Wobec tego liczba $(a^2 + b) - (b^2 + a)$ nie może być równa ani 1 ani -1 . Zatem liczby a , b o postulowanej własności nie istnieją.

2. Dany jest 99-kąt foremny. Wyznacz liczbę trójkątów równoramiennych, których wierzchołki pokrywają się z wierzchołkami danego wielokąta.

Rozwiązanie

Wybermy dowolny wierzchołek C danego 99-kąta. Wyznamy najpierw liczbę trójkątów ABC spełniających równość $AC = BC$, których wierzchołki pokrywają się z wierzchołkami danego 99-kąta.

Rozpatrzmy okrąg opisany na 99-kącie oraz niech k będzie prostą przechodzącą przez punkt C i zawierającą średnicę tego okręgu. Wówczas punkty A i B są symetryczne względem prostej k . Ponadto prosta k zawiera punkt C i nie przechodzi przez żaden inny wierzchołek danego 99-kąta. Zatem po każdej stronie prostej k leży $(99 - 1)/2 = 49$ wierzchołków 99-kąta. Punkt A możemy więc wybrać na 49 sposobów; punkt B jest wtedy wyznaczony jednoznacznie. Wobec tego istnieje 49 trójkątów ABC spełniających powyższe warunki.

Z kolei wierzchołek C możemy wybrać na 99 sposobów. Zatem łączną liczbę trójkątów spełniających warunki zadania uzyskamy, mnożąc 49 przez 99 i odejmując od wyniku podwojoną liczbę trójkątów równobocznych, których wierzchołki pokrywają się z wierzchołkami danego 99-kąta. A tych trójkątów równobocznych jest $99/3 = 33$.

Reasumując: Łączna liczba trójkątów spełniających warunki zadania wynosi

$$49 \cdot 99 - 2 \cdot 33 = 4785.$$

3. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Okrąg styczny do prostej AI w punkcie I i przechodzący przez punkt B przecina bok BC w punkcie P (różnym od B). Proste IP i AC przecinają się w punkcie Q . Wykaż, że punkt I jest środkiem odcinka PQ .

Rozwiązanie

Ponieważ punkt I leży na dwusiecznej kąta ACB , więc wystarczy wykazać, że $\sphericalangle PIC = 90^\circ$. Oznaczmy przez D punkt przecięcia prostych AI i BC . Wówczas $\sphericalangle DIP = \sphericalangle IBP$ oraz $\sphericalangle CID = \sphericalangle CAI + \sphericalangle ACI$. Wobec tego

$$\sphericalangle PIC = \sphericalangle DIP + \sphericalangle CID = \sphericalangle IBP + \sphericalangle CAI + \sphericalangle ACI = \frac{1}{2}(\sphericalangle ABC + \sphericalangle CAB + \sphericalangle ACB) = 90^\circ,$$

co kończy dowód.



4. Liczby p i q są różnymi liczbami pierwszymi. Udowodnij, że liczba $p^2 + q^2$ nie jest podzielna przez liczbę $p + q$.

Rozwiązanie

Z równości $(p + q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq$ wynika, że jeśli liczba $p^2 + q^2$ jest podzielna przez $p + q$, to także liczba $2pq$ jest podzielna przez $p + q$.

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $p < q$. Liczby $p + q$ i q są względnie pierwsze. Wobec tego z podzielności $p + q \mid 2pq$ wynika, że $p + q \mid 2p$. Jednak podzielność ta nie może być spełniona, bowiem $p + q > 2p$.

Uzyskaliśmy sprzeczność, z której wynika, że liczba $p^2 + q^2$ nie może być podzielna przez $p + q$, jeśli p i q są różnymi liczbami pierwszymi.

5. Wewnątrz koła o promieniu 1 znajdują się punkty $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{100}$. Udowodnij, że na brzegu tego koła istnieje taki punkt P , dla którego

$$PA_1 + PA_2 + \dots + PA_{100} \geq 100.$$

Rozwiązanie

Wybermy dowolną średnicę danego koła i oznaczmy jej końce przez P_1 i P_2 . Wykażemy, że co najmniej jeden z punktów P_1, P_2 spełnia postulowaną w treści zadania nierówność.

Wybermy dowolny punkt A_i ($i = 1, 2, \dots, 100$). Wykorzystując nierówność trójkąta dla trójkąta $P_1P_2A_i$, otrzymujemy

$$P_1A_i + P_2A_i \geq P_1P_2 = 2.$$

A zatem

$$(P_1A_1 + P_1A_2 + \dots + P_1A_{100}) + (P_2A_1 + P_2A_2 + \dots + P_2A_{100}) \geq 2 \cdot 100 = 200.$$

Wobec tego co najmniej jedna z liczb

$$P_1A_1 + P_1A_2 + \dots + P_1A_{100} \quad \text{lub} \quad P_2A_1 + P_2A_2 + \dots + P_2A_{100}$$

jest większa lub równa 100.
