XI Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody trzeciego stopnia

(19 marca 2016 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Dane są takie dodatnie liczby całkowite m i n, że liczba $m+n^2$ jest podzielna przez $m+n$. Wykaż, że liczba $m+n^3$ jest podzielna przez $m+n$.

Szkic rozwiązania

Sposób I

Jeżeli liczba $m+n$ jest dzielnikiem liczby $m+n^2$, to $m+n$ jest także dzielnikiem liczby

$$(n+1)(m+n^2),$$

i w konsekwencji również dzielnikiem liczby

$$(n+1)(m+n^2)-n(m+n)=mn+m+n^3+n^2-mn-n^2=m+n^3.$$

Sposób II

Liczba $m+n$ jest dzielnikiem liczby $m+n^2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m+n$ jest dzielnikiem liczby

$$m+n^2-(m+n)=n^2-n=n(n-1).$$

Z kolei $m+n$ jest dzielnikiem liczby $m+n^3$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m+n$ jest dzielnikiem liczby

$$m+n^3-(m+n)=n^3-n=n(n^2-1)=n(n-1)(n+1).$$

Zauważmy, że $n(n-1)$ jest dzielnikiem liczby $n(n-1)(n+1)$. Wobec tego jeżeli pierwsza z tych liczb dzieli się przez $m+n$, to druga także, co kończy rozwiązanie.

---

2. Dodatnie liczby a, b, c są nie większe od 2. Udowodnij, że

$$a+b+c+2 \geqslant abc.$$

Szkic rozwiązania

Sposób I

Z nierówności $a \leqslant 2$, $b \leqslant 2$, $c \leqslant 2$ wynika, że $ab \leqslant 4$, $bc \leqslant 4$, $ca \leqslant 4$ oraz $abc \leqslant 8$, a stąd

$$\frac{1}{ab} \geqslant \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{bc} \geqslant \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{ca} \geqslant \frac{1}{4} \quad \text{oraz} \quad \frac{2}{abc} \geqslant \frac{1}{4}.$$

Dodając powyższe cztery nierówności stronami, dostajemy

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{2}{abc} \geqslant \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1.$$

Mnożąc stronami uzyskaną nierówność przez liczbę dodatnią abc, otrzymujemy

$$a+b+c+2 \geqslant abc,$$

co należało udowodnić.

Sposób II

Bez straty ogólności załóżmy, że c jest najmniejszą spośród liczb a, b, c. Zachodzą wówczas nierówności $a \geqslant c$, $b \geqslant c$, skąd

$$a+b+c+2 \geqslant 3c+2.$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Z założenia $2 \geqslant c$ wynika, że

$$3c+2 \geqslant 4c.$$

Z kolei z nierówności $2 \geqslant a$, $2 \geqslant b$ otrzymujemy $4 \geqslant ab$, skąd

$$4c \geqslant abc.$$

Wobec tego $a+b+c+2 \geqslant 3c+2 \geqslant 4c \geqslant abc$, co kończy rozwiązanie zadania.

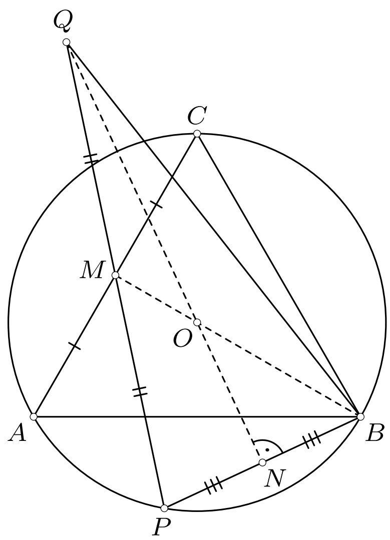
---

3. Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Punkt P leży na krótszym łuku AB okręgu opisanego na tym trójkącie. Punkt M jest środkiem odcinka AC. Punkt Q jest symetryczny do punktu P względem punktu M. Wykaż, że $BQ=PQ$.

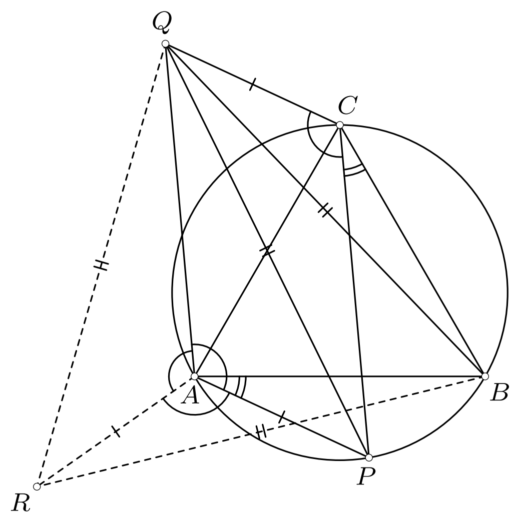
Szkic rozwiązania

Sposób I

Niech O będzie środkiem trójkąta ABC, a N — środkiem odcinka BP (rys. 1). Zauważmy, że w trójkącie BPQ punkt O jest środkiem ciężkości, gdyż leży na środkowej BM oraz $OB=2\cdot OM$. Wobec tego punkt O należy także do odcinka QN, czyli punkt Q leży na prostej NO. Prosta NO jest z kolei symetralną odcinka BP, skąd wniosek, że $BQ=PQ$. To kończy rozwiązanie zadania.



rys. 1



rys. 2

Sposób II

Zauważmy, że $\sphericalangle APC=\sphericalangle ABC=60^\circ$, więc miary kątów wewnętrznych równoległoboku $APCQ$ to 60° oraz 120°. W szczególności, $\sphericalangle PAQ=120^\circ$ oraz $\sphericalangle BCQ=120^\circ+\sphericalangle PCB$.

Niech R będzie obrazem punktu Q przy obrocie o 60° wokół punktu B, przeprowadzającym punkt C na punkt A (rys. 2). Wówczas $BQ=BR$ i $\sphericalangle QBR=60^\circ$, skąd wynika, że trójkąt BQR jest równoboczny. W szczególności więc $BQ=RQ$.

Przy rozpatrywanym obrocie trójkąt BCQ jest przeprowadzany na trójkąt BAR, więc $AR=CQ=AP$ oraz $\sphericalangle BAR=\sphericalangle BCQ$. Wobec tego

$$\sphericalangle PAR=\sphericalangle BAR-\sphericalangle PAB=\sphericalangle BCQ-\sphericalangle PCB=120^\circ.$$

Uzasadniliśmy wcześniej, że $\sphericalangle PAQ=120^\circ$, skąd otrzymujemy $\sphericalangle RAQ=120^\circ$. Trójkąty PAQ oraz RAQ są zatem przystające (cecha bok–kąt–bok). Stąd wniosek, że

$$PQ=RQ=BQ,$$

co kończy dowód.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

4. Czy z 32 prostopadłościennych klocków o wymiarach $2\times3\times3$ można ułożyć prostopadłościan o wymiarach $8\times8\times9$? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Wykażemy, że nie jest to możliwe.

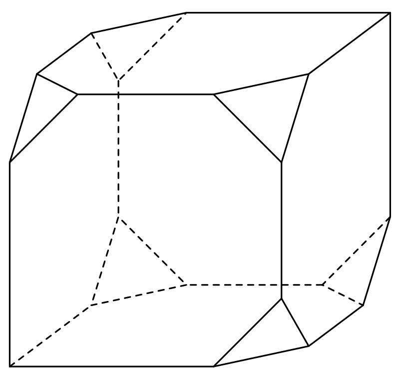
Przypuśćmy, że prostopadłościan o wymiarach $8\times8\times9$ został zbudowany z prostopadłościennych klocków o wymiarach $2\times3\times3$. Rozpatrzmy jedną wartwę $8\times8\times1$ danego prostopadłościanu. Ponieważ cały prostopadłościan został wypełniony klockami o wymiarach $2\times3\times3$, więc warstwa ta musiała zostać wypełniona prostopadłościanami o wymiarach $3\times3\times1$ lub $2\times3\times1$. Jednak nie jest to możliwe, gdyż objętość każdego z prostopadłościanów $3\times3\times1$ lub $2\times3\times1$ jest podzielna przez 3, podczas gdy objętość warstwy $8\times8\times1$ nie jest podzielna przez 3. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

---

5. Czy istnieje taki wielościan wypukły, w którym każda krawędź jest bokiem pewnej ściany siedmiokątnej tego wielościanu? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Taki wielościan istnieje, podamy jego konstrukcję. Rozważmy sześcian i od każdego jego naroża oprócz dwóch przeciwległych odetnijmy wierzchołek, uzyskując nową ścianę trójkątną (rys. 3). Wówczas każda krawędź otrzymanego w ten sposób wielościanu jest bokiem pewnej ściany siedmiokątnej tego wielościanu.



rys. 3