V Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne Juniorów
Fačkovské sedlo, 15 – 18 maja 2016 r.

Zawody indywidualne

(poniedziałek, 16 maja)

1. Dany jest odcinek AB, którego środkiem jest punkt M. Rozważmy zbiór trójkątów prostokątnych ABC o przeciwprostokątnej AB. Oznaczmy przez D spodek wysokości poprowadzonej z wierzchołka C, zaś przez K i L rzuty prostokątne punktu D odpowiednio na boki BC i AC. Wyznacz największe możliwe pole czworokąta $MKCL$.

2. Dane są liczby rzeczywiste x, y, spełniające warunek $x^2 + y^2 - 1 < xy$. Udowodnij, że $x + y - |x - y| < 2$.

3. Wyznacz wszystkie takie liczby całkowite $n \geq 3$, że w wierzchołkach graniastosłupa prawidłowego o podstawie n-kątnej można tak umieścić parami różne dodatnie liczby całkowite, aby wierzchołki o numerach a i b były połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy $a \mid b$ lub $b \mid a$.

4. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB < AC < BC$. Na odcinkach AC i BC wybrano odpowiednio takie punkty K i L, że $AB = CK = CL$. Symetralne odcinków AK i BL przecinają prostą AB odpowiednio w punktach P i Q. Odcinki KP i LQ przecinają się w punkcie M. Udowodnij, że $AK + KM = BL + LM$.

5. Wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą j o tej własności, że można wypełnić pola tablicy 10×10 liczbami naturalnymi od 1 do 100 w taki sposób, że każde 10 kolejnych liczb naturalnych leży wewnątrz pewnego kwadratu $j \times j$ złożonego z pól tablicy.