Matematyczna Olimpiada Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

V Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne Juniorów

Fačkovské sedlo (Słowacja), 17 maja 2016 — Zawody drużynowe

Szkice rozwiązań zadań

1. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o przeciwprostokątnej AB. Punkt D jest rzutem prostokątnym punktu C na prostą AB. Punkty P, Q, R są środkami odpowiednio odcinków CD, AD, BD. Udowodnij, że $\sphericalangle APB + \sphericalangle QCR = 180^\circ$.

Szkic rozwiązania

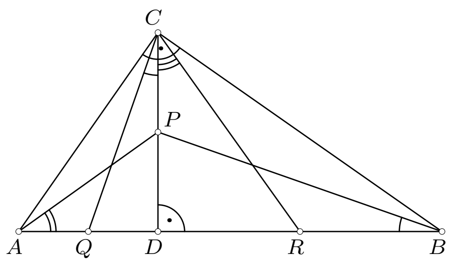
Zauważmy, że trójkąty prostokątne ABC oraz ACD są podobne (cecha kąt–kąt), gdyż mają wspólny kąt ostry $\sphericalangle BAC$. Analogicznie trójkąty ABC oraz CBD są podobne. Zatem

$$\frac{AD}{CD} = \frac{AC}{BC} = \frac{CD}{BD}.$$

Uzyskujemy stąd

$$\frac{QD}{CD} = \frac{\frac{1}{2}AD}{CD} = \frac{\frac{1}{2}CD}{BD} = \frac{PD}{BD},$$

skąd wynika podobieństwo trójkątów prostokątnych CQD oraz BPD (cecha bok–kąt–bok). Wobec tego $\sphericalangle QCD = \sphericalangle PBD$ (rys. 1).



rys. 1

W pełni analogicznie uzasadniamy podobieństwo trójkątów CRD oraz APD i równość $\sphericalangle RCD = \sphericalangle PAD$. Łącząc powyższe rezultaty, otrzymujemy

$$\sphericalangle APB + \sphericalangle QCR = \sphericalangle APB + \sphericalangle QCD + \sphericalangle RCD = \sphericalangle APB + \sphericalangle PBD + \sphericalangle PAD = 180^\circ.$$

---

2. Wyznacz największą liczbę całkowitą d o tej własności, że istnieją parami różne niezerowe cyfry a, b, c takie, że d jest dzielnikiem każdej z liczb $\overline{abc}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$.

Uwaga. Zapis $\overline{xyz}$ oznacza liczbę trzycyfrową (w zapisie dziesiętnym), której pierwszą cyfrą jest x, drugą y, a trzecią z.

Szkic rozwiązania

Zauważmy, że d jest dzielnikiem liczby

$$10 \cdot \overline{abc} - \overline{bca} = 1000a + 100b + 10c - (100b + 10c + a) = 999a.$$

Analogicznie dochodzimy do wniosku, że $d|999b$ oraz $d|999c$. Wobec tego d jest dzielnikiem liczby $3^3 \cdot 37 \cdot \mathrm{NWD}(a,b,c)$. Jeżeli a, b, c są różnymi cyframi to ich wspólny dzielnik może być równy tylko 1, 2 lub 3. Ponadto liczba d jest dzielnikiem liczby

$$\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 3 \cdot 37 \cdot (a+b+c),$$

która, wobec nierówności $a+b+c \leqslant 7+8+9 < 27$, nie może być podzielna przez 3^4. Co więcej, jeśli $111|d$, to dowolna trzycyfrowa wielokrotność d ma równe cyfry. Ostatecznie dochodzimy do wniosku, że d jest dzielnikiem liczby $2 \cdot 3^3 \cdot 37$ i nie jest wielokrotnością liczby 111, a zatem jest jedną z liczb ze zbioru

$$\{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 37, 54, 74\}.$$

Bezpośrednio sprawdzamy, że wśród trzycyfrowych wielokrotności liczby 74:

$$148,\ 222,\ 296,\ 370,\ 444,\ 518,\ 592,\ 666,\ 740,\ 814,\ 888,\ 962$$

nie ma trzech mających żądane własności. Z kolei wśród trzycyfrowych wielokrotności liczby 54 odnajdujemy trzy, które spełniają warunki zadania: 486, 864, 648.

Odpowiedź: Największą liczbą d o zadanej własności jest **54**.

---

3. Na płaszczyźnie poprowadzono pewną liczbę prostych tak, że każda przecina dokładnie 15 innych. Ile prostych poprowadzono? Scharakteryzuj wszystkie możliwe konfiguracje i uzasadnij, że nie ma innych.

Szkic rozwiązania

Niech n będzie szukaną liczbą prostych. Zauważmy, że dwie proste przecinają się wtedy i tylko wtedy, gdy nie są równoległe, tzn. gdy mają różne kierunki. Niech d oznacza liczbę różnych kierunków prostych narysowanych na płaszczyźnie oraz niech $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_d$ oznaczają liczby prostych mających poszczególne kierunki. Z warunków zadania wynika, że

$$15 = n - \ell_i$$

dla każdego $i = 1, 2, \ldots, d$, a zatem liczby $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_d$ są równe; oznaczmy ich wspólną wartość przez ℓ. Otrzymujemy więc

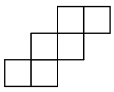
$$n = \ell_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_d = d\ell, \quad \text{skąd} \quad 15 = d\ell - \ell = (d-1)\ell.$$

Wobec tego $d-1$ jest dzielnikiem liczby 15, a zatem (d, ℓ) jest jedną z par $(2, 15)$, $(4, 5)$, $(6, 3)$, $(16, 1)$. Łatwo zauważyć, że każda z konfiguracji opisywanych przez te pary jest osiągalna: wystarczy narysować po ℓ prostych w każdym z ustalonych d różnych kierunków.

Odpowiedź: Na płaszczyźnie narysowano **30**, **20**, **18** lub **16** prostych.

---

4. Pewną liczbę płytek przystających do przedstawionej na rysunku należy umieścić wewnątrz kwadratu o wymiarach 11×11 podzielonego na pola będące kwadratami jednostkowymi w taki sposób, aby każda płytka pokrywała dokładnie 6 pól, żadna nie wystawała poza kwadrat oraz żadne dwie nie pokrywały tego samego pola.

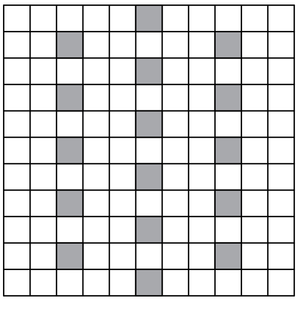


(a) Wyznacz największą możliwą liczbę płytek, którą można umieścić wewnątrz kwadratu w opisany sposób.

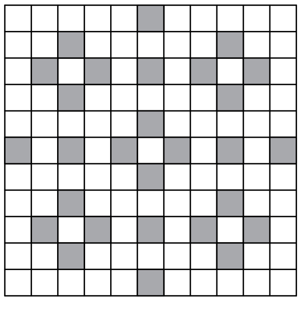
(b) Znajdź wszystkie pola, które muszą zostać przykryte przy każdym pokryciu z użyciem maksymalnej liczby płytek.

Szkic rozwiązania

(a) Zauważmy, że można tak wyróżnić 16 pól tablicy, aby każda poprawnie ułożona płytka pokrywa dokładnie jedno pole wyróżnione pole (rys. 2). Stąd wynika, że zgodnie z warunkami zadania można ułożyć co najwyżej 16 płytek i rzeczywiście liczba ta jest osiągalna (rys. 5-7).



rys. 2



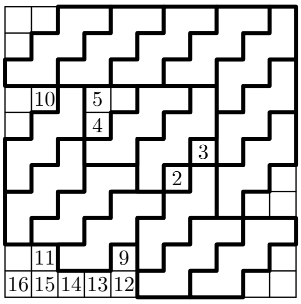
rys. 3

16	15	14	13	12		12	13	14	15	16
15	11		10	9	8	9	10		11	15
14		7		6		6		7		14
13	10		5	4	3	4	5		10	13
12	9	6	4	2		2	4	6	9	12
	8		3		1		3		8	
12	9	6	4	2		2	4	6	9	12
13	10		5	4	3	4	5		10	13
14		7		6		6		7		14
15	11		10	9	8	9	10		11	15
16	15	14	13	12		12	13	14	15	16

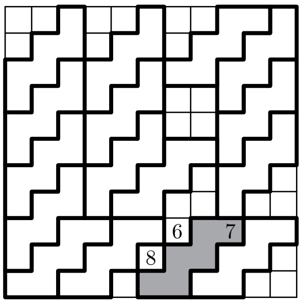
rys. 4

(b) Pola wyróżnione na rysunku 2 muszą być pokryte przy każdym ułożeniu 16 płytek. Podobną własność ma analogiczne wyróżnienie 16 pól, tylko obrócone o 90° wokół środka kwadratu. W sumie otrzymujemy 28 pól, które zostają przykryte przy każdym maksymalnym pokryciu (rys. 3).

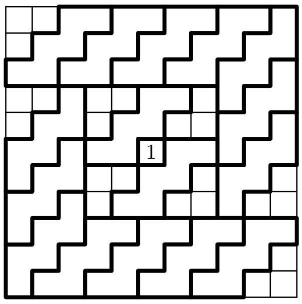
Udowodnimy, że każde z pozostałych pól może pozostać niezakryte przy pewnym pokryciu. Z uwagi na możliwość obracania oraz odbijania symetrycznego poprawnych ułożeń, możemy ograniczyć się do sprawdzenia 16 typów pól (rys. 4), czyli wskazania takiego zestawu pokryć, w którym każdy z typów będzie odsłonięty. Poniższe ułożenia wystarczają do zakończenia dowodu (szara płytka z rysunku 6 może zostać przesunięta w lewo aby odsłonić pole typu „7”).



rys. 5



rys. 6



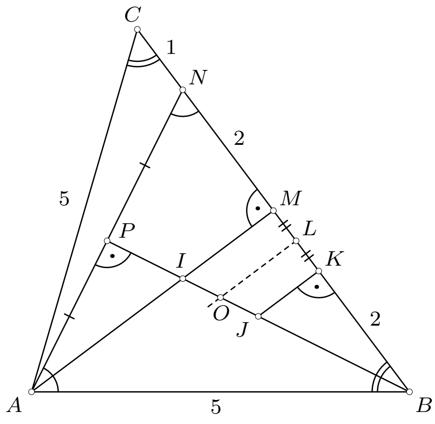
rys. 7

---

5. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB:AC:BC=5:5:6$. Punkt M jest środkiem odcinka BC, a punkt N jest takim punktem wnętrza odcinka BC, że $BN=5\cdot CN$. Wykaż, że środek okręgu opisanego na trójkącie ABN jest środkiem odcinka łączącego środki okręgów wpisanych w trójkąty ABC oraz ABM.

Szkic rozwiązania

Bez straty ogólności przyjmijmy, że obwód trójkąta ABC jest równy 16. Oznaczmy przez P środek odcinka AN, przez O środek okręgu opisanego na trójkącie ABN, przez I oraz J środki okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty ABC oraz ABM, przez K punkt styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABM z prostą BC, zaś przez L — środek odcinka BN (rys. 8).



rys. 8

Ponieważ $BN=\frac{5}{6}BC=5=AB$, więc trójkąt ABN jest równoramienny i odcinek BP zawiera dwusieczną kąta ABN. Wobec tego punkt I leży na przecięciu prostych AM oraz BP, będących dwusiecznymi kątów wewnętrznych w trójkącie ABC, punkt O leży na prostej BP, jako na symetralnej odcinka AN, a punkt J leży na prostej BP, jako na dwusiecznej kąta ABM.

Zauważmy, że $AM=\sqrt{AC^2-MC^2}=4$ oraz $BK=\frac{1}{2}(AB+BM-AM)=2$, a zatem, skoro $MN=2$, punkt L jest środkiem odcinka KM. Proste KJ, AM oraz LO — symetralna odcinka BN — są równoległe. Z twierdzenia Talesa wynika więc, że

$$\frac{IO}{OJ}=\frac{ML}{LK}=1,$$

czyli punkt O jest środkiem odcinka IJ.

---

6. Dana jest dodatnia liczba całkowita k. Znajdź wszystkie trójki dodatnich liczb całkowitych a, b, c, które spełniają równości

$$a+b+c=3k+1,$$
$$ab+bc+ca=3k^2+2k.$$

Szkic rozwiązania

Z warunków zadania wynika, że

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=(3k+1)^2-2(3k^2+2k)=3k^2+2k+1.$$

Wobec tego

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)=2,$$

czyli wśród liczb całkowitych $a-b$, $b-c$, $c-a$ jedna jest równa zero, a dwie mają moduł równy 1. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $a=b$. Mamy wówczas dwa przypadki: $c=a-1$ lub $c=a+1$.

Jeżeli $c=a-1$, to z pierwszej z danych równości wynika, że $3k+1=a+b+c=3a-1$, czyli $2=3(a-k)$. Jednak liczby a i k są całkowite, więc równość ta nie może mieć miejsca. Wobec tego $c=a+1$ i $3k+1=a+b+c=3a+1$, skąd $a=k$ i w konsekwencji $b=k$, $c=k+1$.

Bezpośrednio sprawdzamy, że trójka $(a,b,c)=(k,k,k+1)$ stanowi rozwiązanie danego układu dla każdej dodatniej liczby całkowitej k. Uwalniając się od założenia $a=b$ otrzymujemy dodatkowo dwie analogiczne trójki.

Odpowiedź: Rozwiązaniami układu są trójki (a,b,c): $(\mathbf{k+1},\mathbf{k},\mathbf{k})$, $(\mathbf{k},\mathbf{k+1},\mathbf{k})$, $(\mathbf{k},\mathbf{k},\mathbf{k+1})$.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku