VI Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne Juniorów

Szczyrk (Polska), 15 maja 2017 — Zawody indywidualne

1. Znajdź największą liczbę naturalną $n \geqslant 3$, dla której istnieje n-cyfrowa liczba $\overline{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}$, której cyfry a_1, a_2 i a_n są niezerowe i która jest podzielna przez $\overline{a_2 a_3 \ldots a_n}$.

2. Niech ABC będzie trójkątem, w którym $AB + AC = 3 \cdot BC$. Oznaczmy przez D, E takie punkty, że czworokąty $BCDA$ oraz $CBEA$ są równoległobokami, a przez F i G — takie punkty leżące odpowiednio na bokach AC i AB, że $AF = AG = BC$. Udowodnij, że punkt przecięcia prostych DF i EG leży na odcinku BC.

3. Udowodnij, że dla każdej pary liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$(x^2+1)(y^2+1) \geqslant 2(xy-1)(x+y).$$

Dla jakich par liczb całkowitych x, y w powyższej nierówności zachodzi równość?

4. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o obwodzie 2, w którym $\sphericalangle ACB = 90°$. Punkt S jest środkiem okręgu dopisanego do boku AB tego trójkąta, a punkt H jest punktem przecięcia wysokości trójkąta ABS. Wyznaczyć najmniejszą możliwą długość odcinka HS.

5. W każde pole tablicy $(mn+1) \times (mn+1)$ wpisano liczbę rzeczywistą z przedziału $[0,1]$ w taki sposób, że suma liczb wpisanych w pola każdego kwadratu $n \times n$ jest równa n. Znajdź największą możliwą sumę wszystkich liczb wpisanych w pola tablicy.

Czas: 3 godziny 30 minut