VIII Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne Juniorów

Zuberec (Słowacja), 20 maja 2019 r. — Zawody indywidualne

Matematyczna Olimpiada Juniorów
www.omj.edu.pl

Szkice rozwiązań zadań

1. Wyznacz wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych a, b, dla których
$$\sqrt{a+2\sqrt{b}}=\sqrt{a-2\sqrt{b}}+\sqrt{b}.$$

Szkic rozwiązania

Przy założeniu $a \geqslant 2\sqrt{b}$ daną równość można przekształcić równoważnie
$$\sqrt{a+2\sqrt{b}}-\sqrt{a-2\sqrt{b}}=\sqrt{b},$$
$$(a+2\sqrt{b})-2\sqrt{(a+2\sqrt{b})(a-2\sqrt{b})}+(a-2\sqrt{b})=b,$$
$$2a-b=2\sqrt{a^2-4b}.$$
Zauważmy, że aby rozwiązanie istniało, liczba $2a-b$ musi być nieujemna, a zatem $b \leqslant 2a$. Przy tym założeniu równość można dalej równoważnie przekształcić do postaci
$$4a^2-4ab+b^2=4a^2-16b,$$
$$b(16-4a+b)=0.$$
Skoro $b \neq 0$, to uzyskujemy $b=4a-16$, co wobec nierówności $2a \geqslant b$ oraz $b>0$ prowadzi do wniosku, że $a \leqslant 8$ oraz $a>4$. Bezpośrednio sprawdzamy, że nierówność $a \geqslant 2\sqrt{b}$ przybiera postać
$$a^2-16a+64 \geqslant 0 \quad \text{czyli} \quad (a-8)^2 \geqslant 0,$$
a więc również jest spełniona. Ostatecznie wszystkimi rozwiązaniami danego równania są pary postaci $(a,b)=(a,4a-16)$ dla $5 \leqslant a \leqslant 8$.

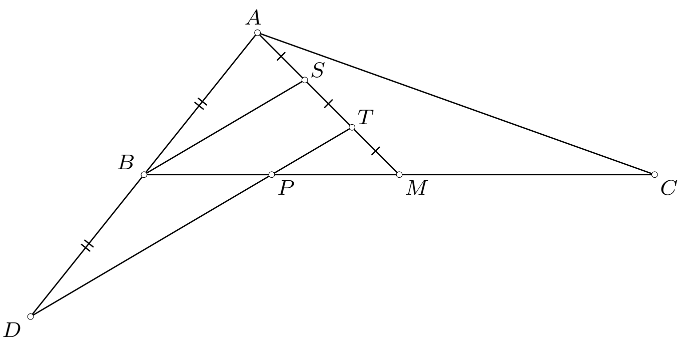
---

2. Punkt T jest środkiem ciężkości trójkąta ABC, a punkt M jest środkiem boku BC. Oznaczmy przez D taki punkt prostej AB różny od A, że $AB=BD$. Podobnie niech E będzie takim punktem prostej AC różnym od A, że $AC=CE$. Odcinki TD i TE przecinają bok BC odpowiednio w punktach P i Q. Wykaż, że punkty P, Q, M dzielą odcinek BC na cztery części o równych długościach.

Szkic rozwiązania

Udowodnimy, że punkt P jest środkiem odcinka BM. Dowód, że punkt Q jest środkiem odcinka CM jest w pełni analogiczny.

Skoro punkt T jest środkiem ciężkości trójkąta ABC, to leży on na odcinku AM w taki sposób, że $AT=2\cdot TM$. Oznaczmy przez S środek odcinka AT. Wówczas $AS=ST=TM$.



Ponieważ $AB=BD$ oraz $AS=ST$, więc proste BS i DT są równoległe. To zaś oznacza, że prosta DT, jako przechodząca przez środek T boku SM trójkąta BSM i równoległa do boku BS, przechodzi także przez środek boku BM. Stąd wniosek, że $BP=PM$.

---

3. Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite n o tej własności, że tablicę o wymiarach $n\times n$ można wypełnić liczbami 1, 2 oraz -3 w taki sposób, aby w każdym wierszu i w każdej kolumnie suma wpisanych liczb była równa 0.

Szkic rozwiązania

Łatwo sprawdzić, że dla $n\leqslant 2$ tablicy $n\times n$ nie można wypełnić zgodnie z warunkami zadania. Wykażemy, że jest to możliwe dla wszystkich liczb całkowitych $n\geqslant 3$.

Zauważmy, że dla każdej liczby całkowitej $n\geqslant 3$ liczba 0 może być przedstawiona w postaci sumy n składników, z których każdy jest równy 1, 2 lub -3:

- jeżeli $n=3k$, to $0=k\cdot 1+k\cdot 2+k\cdot(-3)$;
- jeżeli $n=3k+1$, to $0=(k+2)\cdot 1+(k-1)\cdot 2+k\cdot(-3)$;
- jeżeli $n=3k+2$, to $0=(k-1)\cdot 1+(k+2)\cdot 2+(k+1)\cdot(-3)$.

Niech $a_1+a_2+\ldots+a_n=0$, gdzie każdy ze składników a_i jest równy 1, 2 lub -3. Wystarczy wpisać do pierwszego wiersza tablicy kolejno liczby a_1, a_2, ..., a_n, do drugiego a_2, a_3, ..., a_1, do trzeciego a_3, a_4, ..., a_2 itd. Wówczas w każdym wierszu i w każdej kolumnie każdy ze składników a_i wystąpi dokładnie raz, więc suma będzie równa zero.

Uzyskane wypełnienia dla $n=6,7,8$ są zilustrowane poniżej.

1	1	2	2	−3	−3
1	2	2	−3	−3	1
2	2	−3	−3	1	1
2	−3	−3	1	1	2
−3	−3	1	1	2	2
−3	1	1	2	2	−3

1	1	1	1	2	−3	−3
1	1	1	2	−3	−3	1
1	1	2	−3	−3	1	1
1	2	−3	−3	1	1	1
2	−3	−3	1	1	1	1
−3	−3	1	1	1	1	2
−3	1	1	1	1	2	−3

1	2	2	2	2	−3	−3	−3
2	2	2	2	−3	−3	−3	1
2	2	2	−3	−3	−3	1	2
2	2	−3	−3	−3	1	2	2
2	−3	−3	−3	1	2	2	2
−3	−3	−3	1	2	2	2	2
−3	−3	1	2	2	2	2	−3
−3	1	2	2	2	2	−3	−3

---

4. Niech k będzie okręgiem o średnicy AB. Punkt C wybrano wewnątrz odcinka AB, a punkt D na okręgu k w taki sposób, że trójkąt BCD jest ostrokątny. Oznaczmy środek okręgu opisanego na tym trójkącie przez O, a (różny od B) punkt przecięcia okręgu k z prostą BO przez E. Wykaż, że trójkąty BCD oraz ECA są podobne.

Szkic rozwiązania

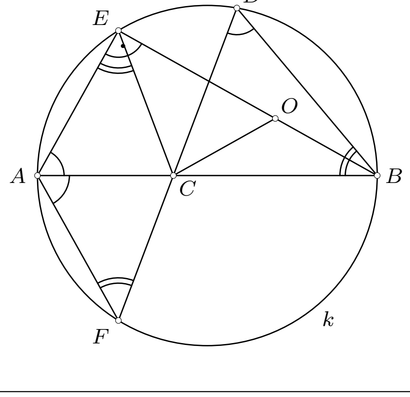
Oznaczmy przez F różny od D punkt przecięcia prostej DC z okręgiem k. Zauważmy, że

$$\sphericalangle BAF=\sphericalangle BDF=\sphericalangle BDC=\tfrac{1}{2}\sphericalangle BOC=90^\circ-\sphericalangle OBC=\sphericalangle BAE,$$

co oznacza, że punkty E i F są symetryczne względem prostej AB, a w konsekwencji — trójkąty ECA oraz FCA są przystające. Ponadto trójkąty FCA oraz BCD są podobne, gdyż

$$\sphericalangle AFC=\sphericalangle AFD=\sphericalangle ABD=\sphericalangle CBD \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle CAF=\sphericalangle BDC.$$

Łącząc powyższe obserwacje, uzyskujemy tezę zadania.



---

5. W pewnej grupie każdy ma dokładnie d znajomych oraz każde dwie osoby, które się nie znają, mają dokładnie jednego wspólnego znajomego. Wykaż, że liczba osób w tej grupie nie przekracza d^2+1.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy dowolną osobę przez A, a jej wszystkich znajomych przez B_1, B_2, $\ldots$, B_d. Dowolna inna osoba C w tej grupie, czyli pewien nieznajomy osoby A, ma z A dokładnie jednego wspólnego znajomego, a zatem C jest znajomym dokładnie jednej spośród osób B_i.

Każda z osób B_i ma dokładnie $d-1$ znajomych różnych od A, a zatem zna co najwyżej $d-1$ nieznajomych osoby A. Stąd wniosek, że A ma co najwyżej $d(d-1)$ nieznajomych i w konsekwencji łączna liczba osób w grupie nie przekracza $1+d+d(d-1)=d^2+1$.

Uwaga

Można udowodnić, że jeśli pewna grupa spełnia warunki zadania, to albo jest $(d+1)$-osobową grupą, w której wszyscy znają się wzajemnie, albo w tej grupie jest *dokładnie* d^2+1 osób. Jedyne znane pary (n,d), dla których istnieje grupa o zadanych własnościach oraz $n \neq d+1$ to: $(5,2)$, $(10,3)$ oraz $(50,7)$.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku