



9TH CZECH-POLISH-SLOVAK JUNIOR MATHEMATICAL COMPETITION

JUNE 19TH, 2021 — TEAM COMPETITION

1. Mějme lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD , splňujícími $|AB| > |CD|$. Označme M střed úsečky AB . Nechť bod P leží uvnitř $ABCD$ a platí $|AD| = |PC|$ a $|BC| = |PD|$. Dokaž, že pokud $|\angle CMD| = 90^\circ$, pak čtyřúhelníky $AMPD$ a $BMPC$ mají stejný obsah.

POZNÁMKA. Riešenie tejto úlohy musí byť napísané po poľsky.

2. Mějme dána čísla $x_i \in \{-1, 1\}$ pro $i = 1, 2, \dots, n$, splňující

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = 0.$$

Dokaž, že n je dělitelné 4.

UWAGA. Rozwiązanie tego zadania powinno być napisane po słowacku lub węgiersku.

3. Wyznacz liczbę par (a, b) dodatnich liczb całkowitych o tej własności, że największy wspólny dzielnik liczb a i b jest równy

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 50,$$

a najmniejsza wspólna wielokrotność liczb a i b jest równa

$$1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot 50^2.$$

POZNÁMKA. Řešení této úlohy odevzdejte ve slovenštině nebo maďarštině.

4. Wyznacz najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą n o tej własności, że w zbiorze

$$\{70, 71, 72, \dots, 70 + n\}$$

można wskazać dwie różne liczby, których iloczyn jest kwadratem liczby całkowitej.

POZNÁMKA. Riešenie tejto úlohy musí byť napísané po česky.

5. Najdite všetky trojice reálnych čísel (x, y, z) spĺňajúce sústavu rovníc

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} &= \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x}, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= xy + yz + zx + 4. \end{aligned}$$

UWAGA. Rozwiązanie tego zadania powinno być napisane po czesku.

6. Nech $s(n)$ označuje ciferný súčet kladného celého čísla n . Použitím šiestich rôznych cifier sme vytvorili tri dvojciferné čísla p, q, r také, že

$$p \cdot q \cdot s(r) = p \cdot s(q) \cdot r = s(p) \cdot q \cdot r.$$

Najdite všetky takéto čísla p, q, r .

POZNÁMKA. Řešení této úlohy odevzdejte v polštině.

TIME: 5 HOURS