IX Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne Juniorów

18 czerwca 2021 r. — Zawody indywidualne (on-line)

Szkice rozwiązań zadań

1. Dana jest tablica 2×2, w której każdym polu znajduje się dodatnia liczba całkowita. Jeśli dodamy iloczyn liczb z pierwszej kolumny, iloczyn liczb z drugiej kolumny, iloczyn liczb z pierwszego wiersza i iloczyn liczb z drugiego wiersza, otrzymamy 2021.

a) Wyznacz możliwe wartości sumy czterech liczb z tablicy.
b) Znajdź liczbę różnych tablic spełniających dane warunki, które zawierają cztery parami różne liczby.

Szkic rozwiązania

a) Oznaczmy liczby w tablicy przez a, b, c, d jak pokazano na rysunku obok. Warunek zadania można wówczas zapisać jako

a	c
b	d

$$ab+cd+ac+bd=2021, \quad \text{czyli} \quad (a+d)(b+c)=43\cdot 47.$$

Skoro $a+d\geqslant 2$ oraz $b+c\geqslant 2$, to powyższa równość oznacza, że $\{a+d, b+c\}=\{43,47\}$ i w konsekwencji $a+b+c+d=\mathbf{90}$.

b) Jeżeli $a+d=43$ oraz $b+c=47$, to parę dodatnich liczb całkowitych (a,d) można wybrać na 42 sposoby, a parę (b,c) — na 46 sposobów, więc uzyskujemy $42\cdot 46$ tablic. Należy jeszcze odjąć liczbę tablic, w których wpisane liczby nie są parami różne. Rozważmy dowolną taką tablicę. Skoro liczby 43 oraz 47 są nieparzyste, to $a\neq c$ oraz $b\neq d$. Ponadto $a+d\neq b+c$, co oznacza, że zachodzi dokładnie jedna spośród równości $a=b$, $a=c$, $d=b$, $d=c$. Dla każdej z tych równości można wskazać dokładnie 42 tablice, w których jest ona spełniona, co daje $4\cdot 42$ tablice.

W drugim, analogicznym przypadku, gdy $a+d=47$ oraz $b+c=43$, uzyskujemy ten sam wynik. Ostatecznie stwierdzamy, że tablic o szukanej własności jest dokładnie

$$2\cdot(42\cdot 46-4\cdot 42)=\mathbf{3528}.$$

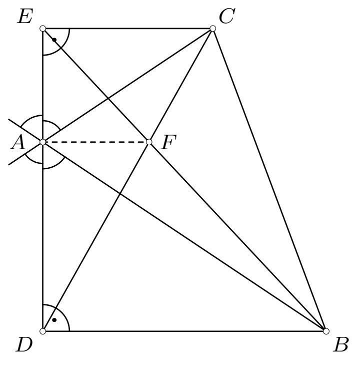
---

2. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Oznaczmy przez D i E rzuty prostokątne odpowiednio punktów B i C na dwusieczną kąta zewnętrznego BAC. Niech F będzie punktem przecięcia prostych BE oraz CD. Wykaż, że proste AF i DE są prostopadłe.

Szkic rozwiązania

Skoro $\sphericalangle BAD=\sphericalangle CAE$, to trójkąty prostokątne ABD i ACE są podobne i w konsekwencji

$$\frac{AD}{AE}=\frac{BD}{CE}.$$



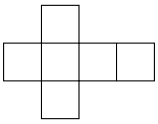
Ponadto proste BD i CE są równoległe, gdyż obie są prostopadłe do prostej DE, wobec czego

$$\frac{BD}{CE}=\frac{FD}{FC}.$$

Łącząc uzyskane równości, dochodzimy do wniosku, że prosta AF jest równoległa do prostej CE, a więc prostopadła do prostej DE, co należało udowodnić.

---

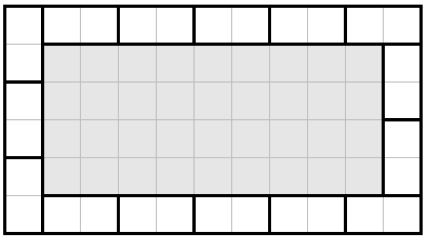
3. *Krzyżem* nazwiemy figurę złożoną z 6 kwadratów jednostkowych przedstawioną poniżej (oraz dowolną figurę powstałą z niej przez obrót).

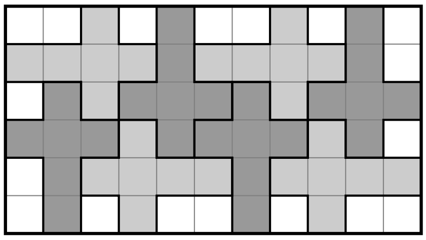


Wyznacz największą liczbę krzyży, które można wyciąć z kartki papieru o wymiarach 6×11 podzielonej na kwadraty jednostkowe (w taki sposób, aby każdy krzyż składał się z sześciu takich kwadratów).

Szkic rozwiązania

Pokryjmy brzegowe pola prostokąta przy użyciu 15 kostek domina, jak pokazano na rysunku po lewej stronie. Zauważmy, że w każdej takiej kostce może znaleźć się co najwyżej jedno pole należące do pewnego z wycinanych krzyży. W konsekwencji łącznie krzyże mogą zajmować co najwyżej $6\cdot 11-15=51$ pól, co oznacza, że krzyży może być co najwyżej **8**. Rysunek po prawej stronie ilustruje sposób wycięcia dokładnie ośmiu krzyży.





---

4. Wyznacz najmniejszą wartość, którą przyjmuje wyrażenie

$$x^4+y^4-x^2y-xy^2,$$

dla liczb dodatnich x i y spełniających nierówność $x+y\leqslant 1$.

Szkic rozwiązania

Zauważmy, że

$$x^4+y^4-x^2y-xy^2=\left(x^2-y^2\right)^2+2x^2y^2-xy(x+y)\geqslant\left(x^2-y^2\right)^2+2\left(xy-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{8}\geqslant-\frac{1}{8},$$

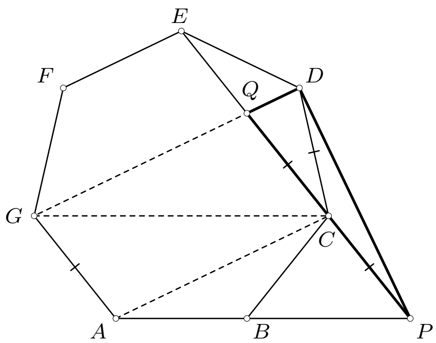
przy czym pierwsza nierówność wynika bezpośrednio z założenia $x+y\leqslant 1$, a druga — z faktu, że kwadraty liczb rzeczywistych są nieujemne. Jeżeli $x=y=\frac{1}{2}$, to dane wyrażenie przyjmuje wartość $-\mathbf{\frac{1}{8}}$, jest to więc szukana najmniejsza osiągana wartość.

---

5. Dany jest siedmiokąt foremny $ABCDEFG$. Proste AB i CE przecinają się w punkcie P. Wyznacz miarę kąta PDG.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez Q punkt przecięcia odcinków DG i CE. Ponieważ dany siedmiokąt jest foremny, więc AB i CG, AC i DG, AG i CE to pary prostych równoległych. Stąd wynika, że czworokąty $APCG$ i $ACQG$ to równoległoboki i w konsekwencji $CP=CQ=AG=CD$. To zaś oznacza, że trójkąt DPQ jest prostokątny, skąd $\sphericalangle PDG=\mathbf{90}^\circ$.



Ministerstwo Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki