IX Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne Juniorów

19 czerwca 2021 r. — Zawody drużynowe (on-line)

Szkice rozwiązań zadań

1. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB, CD, w którym $AB > CD$. Punkt M jest środkiem odcinka AB, a punkt P leży wewnątrz czworokąta $ABCD$, przy czym spełnione są równości $AD = PC$ oraz $BC = PD$. Wykaż, że jeśli $\sphericalangle CMD = 90^\circ$, to pola czworokątów $AMPD$ oraz $BMPC$ są równe.

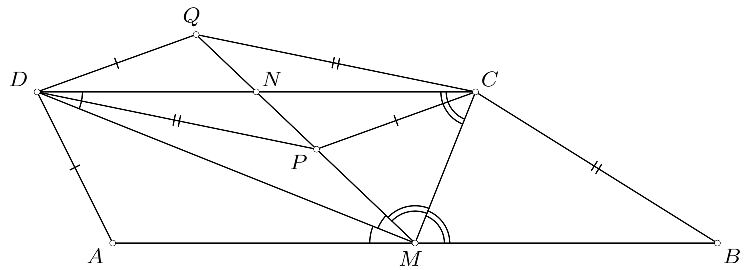
Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez N środek odcinka CD. Ponieważ trójkąt CMD jest prostokątny, więc $CN = DN = MN$ i w konsekwencji

$$\sphericalangle DMN = \sphericalangle MDN = \sphericalangle DMA \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle CMN = \sphericalangle MCN = \sphericalangle CMB.$$

Oznaczmy przez Q taki punkt na półprostej $MN^{\rightarrow}$, że $QM = AM = BM$. Wówczas AMD i QMD oraz BMC i QMC to pary trójkątów przystających (cecha bok–kąt–bok). Stąd

$$QD = AD = PC \quad \text{oraz} \quad QC = BC = PD.$$



Ponadto $QM = \frac{1}{2}AB > \frac{1}{2}CD = MN$, co oznacza, że punkt Q leży po przeciwnej stronie prostej CD niż punkt P. Z powyższych równości wynika więc, że czworokąt $CPDQ$ jest równoległobokiem o środku N. Stąd wniosek, że punkt P leży na odcinku MN. Pozostaje zauważyć, że $[PDN] = [PCN]$ (trójkąty o wspólnej wysokości i równych podstawach) oraz $[AMND] = [BMNC]$ (trapezy o wspólnej wysokości i równych podstawach), skąd

$$[AMPD] = [AMND] - [DPN] = [BMNC] - [CPN] = [BMPC],$$

gdzie $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$.

2. Dana jest dodatnia liczba całkowita n oraz liczby x_1, x_2, …, x_n, z których każda jest równa 1 lub -1, spełniające równość

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = 0.$$

Wykaż, że n jest liczbą podzielną przez 4.

Szkic rozwiązania

Zauważmy, że każdy z iloczynów obecnych w sumie po lewej stronie jest równy 1 lub -1. Skoro suma jest równa 0, to dokładnie $\frac{1}{2}n$ z tych iloczynów ma wartość 1 i dokładnie $\frac{1}{2}n$ ma wartość -1; w szczególności — n jest liczbą parzystą. Wobec tego

$$1 = (x_1x_2x_3\ldots x_n)^2 = x_1x_2 \cdot x_2x_3 \cdot \ldots \cdot x_{n-1}x_n \cdot x_nx_1 = 1^{\frac{1}{2}n} \cdot (-1)^{\frac{1}{2}n},$$

skąd wniosek, że $\frac{1}{2}n$ jest liczbą parzystą i w konsekwencji n jest liczbą podzielną przez 4.

3. Wyznacz liczbę par (a,b) dodatnich liczb całkowitych o tej własności, że największy wspólny dzielnik liczb a i b jest równy $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 50$, a najmniejsza wspólna wielokrotność liczb a i b jest równa $1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot\ldots\cdot 50^2$.

Szkic rozwiązania

W rozkładzie na czynniki pierwsze liczb a i b występuje dokładnie 15 różnych liczb pierwszych: są to wszystkie liczby pierwsze nie większe od 50. Oznaczmy przez $v_p(n)$ liczbę wystąpień czynnika pierwszego p w rozkładzie na czynniki liczby n. Zauważmy, że

$$v_p(\mathrm{NWD}(a,b)) = \min(v_p(a), v_p(b)) \quad \text{oraz} \quad v_p(\mathrm{NWW}(a,b)) = \max(v_p(a), v_p(b)).$$

Ponadto dla każdej liczby pierwszej $p \leqslant 50$ mamy

$$x_p := v_p(1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot\ldots\cdot 50^2) = 2\cdot v_p(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 50) > v_p(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 50) =: y_p.$$

Wynika z tego, że para (a,b) spełnia warunki zadania dokładnie wtedy, gdy dla każdej z rozważanych 15 liczb pierwszych prawdziwa jest jedna z dwóch równości: $(v_p(a), v_p(b)) = (x_p, y_p)$ lub $(v_p(a), v_p(b)) = (y_p, x_p)$. To oznacza, że szukana liczba par jest równa $\mathbf{2^{15} = 32768}$.

---

4. Wyznacz najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą n o tej własności, że w zbiorze

$$\{70, 71, 72, \ldots, 70+n\}$$

można wskazać dwie różne liczby, których iloczyn jest kwadratem liczby całkowitej.

Szkic rozwiązania

Zauważmy, że $81\cdot 100 = 90^2$, co oznacza, że $n \leqslant 30$.

Przypuśćmy, że $70 \leqslant a < b \leqslant 99$ oraz ab jest kwadratem liczby całkowitej. To oznacza, że $a = kc^2$ oraz $b = kd^2$ dla pewnych dodatnich liczb całkowitych k, c, d, przy czym $c < d$ oraz liczba k nie jest podzielna przez kwadrat żadnej liczby całkowitej większej od 1.

Zauważmy, że jeśli $c = 1$, to $d \geqslant 2$ oraz $k \geqslant 70$, skąd $b = kd^2 \geqslant 280 > 100$. To oznacza, że $c \geqslant 2$ i w konsekwencji $d \geqslant 3$ oraz $c+d \geqslant 5$. Zatem

$$29 \geqslant b-a = k(d^2-c^2) = k(d-c)(d+c) \geqslant k\cdot 1\cdot 5 = 5k,$$

czyli $k \leqslant 5$. Liczby a i b są więc k-krotnościami kwadratów liczb całkowitych, przy czym k jest jedną z liczb 1, 2, 3, 5. Bezpośrednio sprawdzamy, że pośród liczb od 70 do 99:

- jest jedna liczba będąca kwadratem liczby całkowitej: 81;
- są dwie liczby będące dwukrotnościami kwadratów liczb całkowitych: 72 oraz 98;
- jest jedna liczba będąca trzykrotnością kwadratu liczby całkowitej: 75;
- jest jedna liczba będąca pięciokrotnością kwadratu liczby całkowitej: 80.

To oznacza, że jedyna możliwa para (a,b) to $(72,98)$. W konsekwencji $n = \mathbf{28}$ to najmniejsza liczba o własności opisanej w treści zadania.

---

5. Wyznacz wszystkie trójki (x,y,z) liczb rzeczywistych spełniających równości

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x} = \frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x} \quad \text{oraz} \quad x^2+y^2+z^2 = xy+yz+zx+4.$$

Szkic rozwiązania

Pierwszą z rozważanych równości można przekształcić równoważnie do postaci

$$x^2z+y^2x+z^2y = x^2y+z^2x+y^2z, \quad \text{czyli} \quad (x-y)(y-z)(z-x) = 0,$$

przy założeniu $xyz \neq 0$. To oznacza, że co najmniej dwie spośród liczb x, y, z są równe.

Przypuśćmy, że $y = z$, pozostałe dwa przypadki są analogiczne. Wówczas druga z rozważanych równości przybiera postać $x^2+y^2 = 2xy+4$ lub równoważnie $(x-y)^2 = 4$, skąd wniosek, że $|x-y| = 2$, czyli $y = x+2$ lub $y = x-2$. Uwzględniając rozwiązania w pozostałych przypadkach, otrzymujemy odpowiedź: warunki zadania spełniają następujące trójki (x,y,z):

$$(\mathbf{t}, \mathbf{t+2}, \mathbf{t+2}),\ (\mathbf{t+2}, \mathbf{t}, \mathbf{t+2}),\ (\mathbf{t+2}, \mathbf{t+2}, \mathbf{t}), \text{ dla } t \notin \{0,-2\},$$
$$(\mathbf{t}, \mathbf{t-2}, \mathbf{t-2}),\ (\mathbf{t-2}, \mathbf{t}, \mathbf{t-2}),\ (\mathbf{t-2}, \mathbf{t-2}, \mathbf{t}), \text{ dla } t \notin \{0,2\}.$$

---

6. Niech $s(n)$ oznacza sumę cyfr dodatniej liczby całkowitej n. Sześć różnych cyfr zostało użytych do utworzenia trzech dwucyfrowych liczb p, q, r spełniających równości

$$pqs(r)=ps(q)r=s(p)qr.$$

Wyznacz wszystkie możliwe wartości liczb p, q, r.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy cyfry użyte do utworzenia liczb p, q, r przez a, b, c, d, e, f w taki sposób, że

$$p=10a+b, \quad q=10c+d, \quad r=10e+f.$$

Równość $pqs(r)=ps(q)r$ po podzieleniu obustronnie przez p przybiera równoważną postać

$$(10c+d)(e+f)=(c+d)(10e+f), \quad \text{skąd} \quad cf=de.$$

Podobnie uzyskujemy równości $ad=bc$ oraz $af=be$. Zadanie sprowadza się więc do znalezienia sześciu różnych cyfr, dla których spełnione są równości

$$cf=de, \quad ad=bc, \quad af=be.$$

Zauważmy, że wszystkie równości postaci $xy=zt$, gdzie x, y, z, t są czterema różnymi cyframi, są następujące:

(I) $1\cdot 6=2\cdot 3$, (II) $1\cdot 8=2\cdot 4$, (III) $2\cdot 6=3\cdot 4$, (IV) $2\cdot 9=3\cdot 6$, (V) $3\cdot 8=4\cdot 6$.

Nietrudno sprawdzić, że jedyną trójką równości spełniających warunki zadania jest (I), (II), (V). Istotnie, w szukanej trójce równości każda cyfra musi łącznie pojawić się dwa razy, co wyklucza pojawienie się równości (IV) (cyfra 9 nie pojawia się nigdzie indziej) oraz (III) (usunięcie innej równości prowadzi do sytuacji w której 2, 4 lub 6 pojawi się trzykrotnie). Stąd uzyskujemy, że pary $\{a,b\}$, $\{c,d\}$, $\{e,f\}$ to $\{1,2\}$, $\{3,6\}$, $\{4,8\}$. Warunki zadania spełniają więc trójki liczb

$$\{p,q,r\}=\{\mathbf{12},\mathbf{36},\mathbf{48}\} \quad \text{oraz} \quad \{p,q,r\}=\{\mathbf{21},\mathbf{63},\mathbf{84}\}.$$

Ministerstwo Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki