Obóz Naukowy
Olimpiady Matematycznej
Juniorów — poziom OM

Konkurs Zadaniowy

28 czerwca – 2 lipca 2021

Wstęp

Konkurs Zadaniowy stanowił nieobowiązkową aktywność popołudniową podczas zdalnego Obozu Naukowego OMJ. Złożony był z 5 serii po trzy zadania każda, przy czym na rozwiązywanie każdej serii przewidziane były po 3 godziny. Prace uczestników Obozu oceniane były w skali olimpijskiej 0, 2, 5, 6. Trzy najwyższe uzyskane sumy punktów to 70, 66 oraz 60. Rozkład ocen przyznanych za rozwiązania zadań przedstawiony jest w poniższej tabeli.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.
6 p.	11	6	2	10	1	0	6	4	6	8	6	6	0	2	3
5 p.	1	0	0	1	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0
2 p.	0	2	1	0	0	2	0	0	1	0	1	0	0	0	0
0 p.	0	5	4	1	3	1	1	1	0	0	2	0	3	3	1

W niniejszym opracowaniu zgromadzone są wszystkie zadania konkursowe wraz z rozwiązaniami. Zachęcamy do wykorzystania tych materiałów w przygotowaniach do startów w kolejnych edycjach Olimpiady Matematycznej Juniorów. Miłej lektury!

Kadra Obozu

Uczestnicy Obozu Naukowego OMJ (poziom OM)

Uczniowie: Wiktoria Bazan, Dagna Czubla, Karol Daniewski, Jan Dorosiński, Maja Dworakowska, Dominik Figurski, Patricia Frevel, Mateusz Froncek, Ewa Gołaszewska, Michał Jacek, Weronika Janeczek, Tymoteusz Jędrzejewski, Grzegorz Kaczmarek, Jakub Kajkowski, Marek Kamiński, Jan Lorenc, Miłosz Płatek, Łukasz Próchniak, Magdalena Pudełko, Mateusz Wawrzyniak, Inga Zasowska.

Kadra: Tomasz Szymczyk (kierownik), Łukasz Bożyk, Tomasz Cieśla, Mateusz Dębowski, Paweł Gadziński, Arkadiusz Męcel, Waldemar Pompe, Bartłomiej Zawalski, Radosław Żak.

Treści zadań

Zadanie 1.

Każdą dodatnią liczbę całkowitą pomalowano na dokładnie jeden kolor: czerwony albo niebieski, przy czym każdego koloru użyto co najmniej raz. Okazało się, że każde dwie liczby, z których jedna jest czerwona, a druga niebieska, mają czerwoną sumę i niebieski iloczyn. Wykaż, że nie istnieją dwie kolejne liczby naturalne, z których każda jest niebieska.

Zadanie 2.

Wyznacz wszystkie trójki a, b, c liczb całkowitych nieujemnych o tej własności, że liczba $10^a + 10^b + 10^c$ jest podzielna przez 111.

Zadanie 3.

Dany jest zbiór 101 liczb rzeczywistych większych od 1. Udowodnij, że można wybrać z tego zbioru dwie liczby $a > b$, dla których zachodzi nierówność

$$100(a - b) < ab.$$

Zadanie 4.

Znajdź największą wartość wyrażenia

$$a^2 + ab + bc$$

dla liczb nieujemnych a, b, c, dla których $a + b + c = 3$.

Zadanie 5.

Pięciokąt foremny $ABCDE$ oraz trójkąt równoboczny KLM są ułożone w taki sposób, że punkty C i D leżą na odcinku LM, punkt B leży na odcinku KL, a punkt E leży na odcinku KM. Wyznacz miarę kąta CKD.

Zadanie 6.

W każdym z 99 pudełek umieszczono pewną liczbę jabłek i pewną liczbę pomarańczy. Udowodnij, że można wybrać 50 pudełek w taki sposób, aby w wybranych pudełkach znalazła się co najmniej połowa wszystkich jabłek i co najmniej połowa wszystkich pomarańczy.

Zadanie 7.

Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle BAC = 90^\circ$. Punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB, przy czym $\sphericalangle EDF = 90^\circ$. Wykaż, że długość odcinka EF jest nie mniejsza od długości wysokości trójkąta ABC opuszczonej z wierzchołka A.

Zadanie 8.

W tabeli o wymiarach 3×7 każde pole jest białe albo czerwone, przy czym dla każdej pary wierszy i każdej pary kolumn co najmniej jedno z czterech pól znajdujących się na ich przecięciach jest białe. Wyznacz największą możliwą liczbę czerwonych pól w tabeli.

Zadanie 9.

Dane są liczby całkowite a, b, c, dla których zachodzi równość

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2ab + 2bc + 2ca.$$

Wykaż, że ab jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 10.

Wyznacz wszystkie liczby całkowite $\overline{abcde}$, dla których spełnione są równości

$$\overline{abc} = 9 \cdot \overline{de} \quad \text{oraz} \quad \overline{cde} = 7 \cdot \overline{ab}.$$

Uwaga. Zapis $\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}$ oznacza dodatnią liczbę m-cyfrową, której kolejnymi cyframi w zapisie dziesiętnym (od lewej) są x_1, x_2, ..., x_m.

Zadanie 11.

Dodatnie liczby a, b, c są takie, że $a > 100c$. Wykaż, że

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} > 20.$$

Zadanie 12.

Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkty M oraz N leżą na odcinku AC, przy czym $\sphericalangle ADM = \sphericalangle BDC$ oraz $AM = CN$. Udowodnij, że $\sphericalangle CBN = \sphericalangle DBA$.

Zadanie 13.

Na tablicy zapisano 2021 jedynek. W każdym ruchu można zastąpić parę liczb a, b liczbą $a^2 + b^2$. Wykazać, że na końcu zostanie zapisana liczba nie mniejsza niż 2^{2020}.

Zadanie 14.

Dana jest liczba pierwsza p oraz taka liczba całkowita n, że liczby

$$1, \quad 1+n, \quad 1+n+n^2, \quad \ldots, \quad 1+n+n^2+\ldots+n^{p-1}$$

dają parami różne reszty przy dzieleniu przez p. Wykaż, że liczba n daje resztę 1 przy dzieleniu przez p.

Zadanie 15.

Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym

$$BA = BC, \quad EA = ED \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle BAC + \sphericalangle EAD = 90^\circ.$$

Punkt M jest środkiem odcinka CD. Wykaż, że $\sphericalangle BME = 90^\circ$.

Rozwiązania zadań

Zadanie 1.

Każdą dodatnią liczbę całkowitą pomalowano na dokładnie jeden kolor: czerwony albo niebieski, przy czym każdego koloru użyto co najmniej raz. Okazało się, że każde dwie liczby, z których jedna jest czerwona, a druga niebieska, mają czerwoną sumę i niebieski iloczyn. Wykaż, że nie istnieją dwie kolejne liczby naturalne, z których każda jest niebieska.

Rozwiązanie: Przypuśćmy, że liczba 1 jest niebieska. Niech c będzie dowolną liczbą czerwoną. Z warunków zadania wynika, że liczba $c \cdot 1 = c$ jest niebieska. Uzyskana sprzeczność oznacza, że liczba 1 jest czerwona.

Niech n będzie dowolną liczbą niebieską. Wówczas liczba $n + 1$ jest czerwona, jako suma liczby niebieskiej i czerwonej. To oznacza, że nie istnieją dwie kolejne liczby naturalne, z których każda jest niebieska.

Uwaga: Zachęcamy do zastanowienia się nad trudniejszą wersją zadania: *scharakteryzuj* wszystkie kolorowania spełniające warunki zadania.

Zadanie 2.

Wyznacz wszystkie trójki a, b, c liczb całkowitych nieujemnych o tej własności, że liczba $10^a + 10^b + 10^c$ jest podzielna przez 111.

Rozwiązanie: Wykażemy, że warunki zadania spełniają wszystkie trójki liczb dających parami różne reszty przy dzieleniu przez 3.

Sposób I

Zauważmy, że $111 = 3 \cdot 37$, a suma cyfr liczby $10^a + 10^b + 10^c$ jest równa 3. Do rozwiązania zadania wystarczy więc rozstrzygnąć, kiedy liczba $10^a + 10^b + 10^c$ jest podzielna przez 37.

Zauważmy, że liczba 10^n daje przy dzieleniu przez 37 resztę 1 gdy n jest liczbą podzielną przez 3, resztę 10 gdy n daje resztę 1 przy dzieleniu przez 3 oraz resztę 26 gdy n daje resztę 2 przy dzieleniu przez 3. Bezpośrednio sprawdzamy, że jedyną kombinacją trzech reszt dających w sumie liczbę podzielną przez 37 jest $1 + 10 + 26$, co oznacza, że liczby a, b, c dają parami różne reszty przy dzieleniu przez 3.

Sposób II

Trójka (a, b, c) spełnia dany warunek dokładnie wtedy, gdy trójka $(a+k, b+k, c+k)$ spełnia ten warunek. Możemy więc bez straty ogólności założyć, że $c = 0$, a wszystkie pozostałe rozwiązania uzyskamy w razie potrzeby zmieniając kolejność a, b, c oraz dodając do wszystkich trzech liczb tę samą wartość.

Zauważmy, że $10^3 - 1 = 999 = 9 \cdot 111$. Stąd wniosek, że dla $b \geqslant 3$ liczba $10^a + 10^b + 1$ jest podzielna przez 111 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba

$$10^a + 10^b + 1 - 10^{b-3} \cdot (10^3 - 1) = 10^a + 10^{b-3} + 1$$

jest podzielna przez 111. To oznacza, że trójka $(a, b, 0)$, gdzie $b \geqslant 3$ spełnia warunki zadania wtedy i tylko wtedy, gdy trójka $(a, b-3, 0)$ spełnia warunki zadania. Podobną redukcję możemy przeprowadzić w przypadku $a \geqslant 3$. Ostatecznie wystarczy więc rozważyć tylko przypadek, w którym obie liczby a, b są mniejsze od 3. Bezpośrednio sprawdzamy, że wówczas jedynie dla $(a, b, c) = (2, 1, 0)$ oraz $(a, b, c) = (1, 2, 0)$ warunki zadania są spełnione.

Uwaga: Można udowodnić (za pomocą podobnego rozumowania, co w drugim sposobie), że dla $a \geqslant 3$ trójka (a, b, c) spełnia warunki zadania wtedy i tylko wtedy, gdy trójka $(a-3, b, c)$ spełnia warunki zadania i podobnie dla b oraz c. To wystarcza do stwierdzenia, że o spełnianiu tych warunków decydują wyłącznie reszty z dzielenia przez 3 liczb a, b, c.

Zadanie 3.

Dany jest zbiór 101 liczb rzeczywistych większych od 1. Udowodnij, że można wybrać z tego zbioru dwie liczby $a > b$, dla których zachodzi nierówność

$$100(a - b) < ab.$$

Rozwiązanie: Daną nierówność można przekształcić równoważnie do postaci

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} < \frac{1}{100}.$$

Warunek mówiący, że liczby a, b są większe od 1, jest równoważny temu, że liczby $\frac{1}{a}$ i $\frac{1}{b}$ są dodatnie i mniejsze od 1. Zadanie sprowadza się do wykazania następującego faktu:

Spośród dowolnych 101 *liczb rzeczywistych z przedziału* $(0, 1)$ *da się wybrać takie dwie, które są odległe o mniej niż* $\frac{1}{100}$.

Rozpatrzmy następujące przedziały

$$\left\langle 0, \frac{1}{100} \right\rangle, \left(\frac{1}{100}, \frac{2}{100} \right\rangle, \ldots, \left(\frac{98}{100}, \frac{99}{100} \right\rangle, \left(\frac{99}{100}, 1 \right).$$

Skoro liczb jest 101, a przedziałów 100, to pewne dwie należą do jednego przedziału. Wówczas różnica między większą a mniejszą z nich jest mniejsza od $\frac{1}{100}$.

Uwaga: Istnieje zbiór 100 liczb, który nie ma postulowanej własności. Są to na przykład liczby postaci $\frac{200}{2k-1}$ dla $k = 1, 2, \ldots, 100$.

Zadanie 4.

Znajdź największą wartość wyrażenia

$$a^2 + ab + bc$$

dla liczb nieujemnych a, b, c, dla których $a + b + c = 3$.

Rozwiązanie: Odpowiedź: Szukaną największą wartością jest 9.

Zauważmy, że $a + b \leqslant a + b + c = 3$ oraz $a + c \leqslant a + b + c = 3$. Wobec tego

$$a^2 + ab + bc \leqslant a^2 + ab + bc + ac = (a + b)(a + c) \leqslant 3 \cdot 3 = 9.$$

Równość jest osiągana dla $a = 3$, $b = 0$, $c = 0$.

Zadanie 5.

Pięciokąt foremny $ABCDE$ oraz trójkąt równoboczny KLM są ułożone w taki sposób, że punkty C i D leżą na odcinku LM, punkt B leży na odcinku KL, a punkt E leży na odcinku KM. Wyznacz miarę kąta CKD.

Rozwiązanie: Zauważmy, że cała konfiguracja jest symetryczna względem prostej AK, w szczególności trójkąt BEK jest równoboczny. Ponadto odcinki BD, BE są równej długości, jako przekątne pięciokąta foremnego. Wobec tego $BD = BE = BK$, czyli trójkąt DBK jest równoramienny. Ponieważ

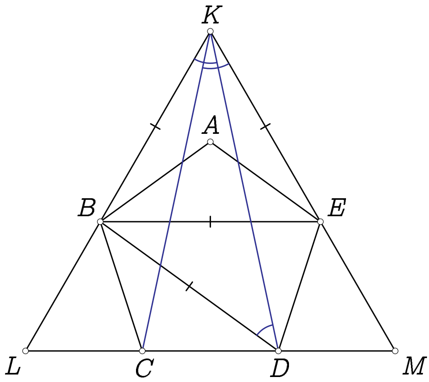
$$\sphericalangle DBK = \sphericalangle DBE + \sphericalangle EBK = 36^\circ + 60^\circ = 96^\circ,$$

więc

$$\sphericalangle BKD = 90^\circ - \frac{1}{2} \sphericalangle DBK = 90^\circ - \frac{1}{2} \cdot 96^\circ = 42^\circ.$$

Z symetrii rysunku mamy również $\sphericalangle CKE = 42^\circ$. Wobec tego

$$\sphericalangle CKD = \sphericalangle BKD + \sphericalangle CKE - \sphericalangle BKE = 42^\circ + 42^\circ - 60^\circ = 24^\circ.$$



Uwaga: Równość $BD = BE = BK$ oznacza, że punkty D, E, K leżą na okręgu o środku B. Do uzyskania wyniku innym sposobem można więc wykorzystać zależności między kątami wpisanym i środkowym. Przykładowo $\sphericalangle DKE = \frac{1}{2}\sphericalangle DBE = 18^\circ$ i symetrycznie $\sphericalangle CKB = 18^\circ$, skąd $\sphericalangle CKD = 60^\circ - 2 \cdot 18^\circ = 24^\circ$.

Zadanie 6.

W każdym z 99 pudełek umieszczono pewną liczbę jabłek i pewną liczbę pomarańczy. Udowodnij, że można wybrać 50 pudełek w taki sposób, aby w wybranych pudełkach znalazła się co najmniej połowa wszystkich jabłek i co najmniej połowa wszystkich pomarańczy.

Rozwiązanie: Ponumerujmy pudełka liczbami $1, 2, \ldots, 99$ nierosnąco pod względem liczby jabłek. To znaczy, jeśli oznaczymy liczbę jabłek w i-tym pudełku przez x_i, to

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \ldots \geqslant x_{99}.$$

Rozważmy następujące dwie grupy pudełek: te o numerach $2, 4, 6, \ldots, 98$ i te o numerach $3, 5, 7, \ldots, 99$. Wybierzmy tę grupę, w której jest łącznie więcej pomarańczy. Wykażemy, że dołączając do niej pudełko o numerze 1, otrzymujemy zestaw 50 pudełek, które łącznie zawierają co najmniej połowę wszystkich jabłek i co najmniej połowę wszystkich pomarańczy.

Rzeczywiście: to, że pudełka te zawierają co najmniej połowę wszystkich pomarańczy wynika wprost z wyboru grupy pudełek. Z kolei to, że wybrane pudełka zawierają co najmniej połowę wszystkich jabłek wynika z nierówności

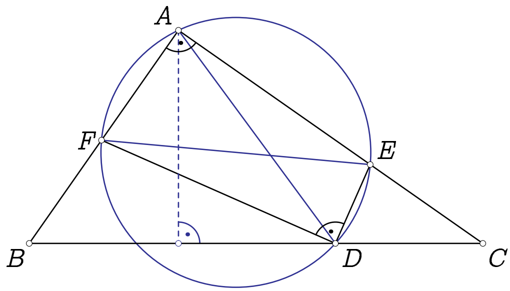
$$x_1+x_2+x_4+\ldots+x_{98} \geqslant x_3+x_5+\ldots+x_{99}, \quad x_1+x_3+x_5+\ldots+x_{99} \geqslant x_2+x_4+\ldots+x_{98},$$

które są prawdziwe na mocy nierówności $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \ldots \geqslant x_{99}$.

Zadanie 7.

Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle BAC = 90^\circ$. Punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB, przy czym $\sphericalangle EDF = 90^\circ$. Wykaż, że długość odcinka EF jest nie mniejsza od długości wysokości trójkąta ABC opuszczonej z wierzchołka A.

Rozwiązanie: Skoro $\sphericalangle EAF = \sphericalangle EDF = 90^\circ$, to punkty A i D leżą na okręgu o średnicy EF. Stąd wniosek, że $AD \leqslant EF$, bo długość cięciwy okręgu nie przekracza długości jego średnicy. Ponadto odcinek AD łączy punkt A z pewnym punktem prostej BC, więc jego długość jest nie mniejsza od odległości punktu A od tej prostej, czyli odpowiedniej wysokości trójkąta ABC.



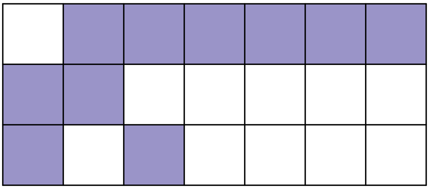
Zadanie 8.

W tabeli o wymiarach 3×7 każde pole jest białe albo czerwone, przy czym dla każdej pary wierszy i każdej pary kolumn co najmniej jedno z czterech pól znajdujących się na ich przecięciach jest białe. Wyznacz największą możliwą liczbę czerwonych pól w tabeli.

Rozwiązanie: Udowodnimy, że w tabeli może znajdować się maksymalnie 10 czerwonych pól. Przykład rozmieszczenia dokładnie 10 czerwonych pól jest przedstawiony na rysunku (pola czerwone zaznaczono kolorem).

Przypuśćmy, że tabela o 7 kolumnach i 3 wierszach zawiera co najmniej 11 czerwonych pól.

Zauważmy, że jeżeli pewna kolumna k_1 tabeli ma czerwone pola we wszystkich trzech wierszach, to każda z pozostałych sześciu kolumn może mieć co najwyżej jedno czerwone pole. Rzeczywiście, gdyby pewna kolumna k_2 miała czerwone pola w dwóch wierszach w_1 i w_2, to wszystkie pola na przecięciach kolumn k_1, k_2 oraz wierszy w_1, w_2 byłyby czerwone, wbrew założeniu. W tym przypadku uzyskujemy więc co najwyżej $3+6\cdot 1=9$ czerwonych pól w całej tabeli, co przeczy temu, że czerwonych pól jest co najmniej 11.



Jeżeli każda kolumna tabeli ma co najwyżej dwa czerwone pola, to co najmniej cztery kolumny mają dokładnie dwa czerwone pola (w przeciwnym przypadku w tabeli byłoby co najwyżej $3\cdot 2+4\cdot 1=10$ czerwonych pól). Wynika stąd, że co najmniej dwie z tych czterech kolumn mają czerwone pola w tych samych dwóch wierszach — sprzeczność.

Zadanie 9.

Dane są liczby całkowite a, b, c, dla których zachodzi równość

$$a^2+b^2+c^2=2ab+2bc+2ca.$$

Wykaż, że ab jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie: Zauważmy, że

$$(a+b-c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca=4ab,$$

skąd wniosek, że $a+b-c$ jest liczbą parzystą, a więc ab jest kwadratem liczby całkowitej $\frac{1}{2}(a+b-c)$.

Zadanie 10.

Wyznacz wszystkie liczby całkowite $\overline{abcde}$, dla których spełnione są równości

$$\overline{abc}=9\cdot\overline{de} \quad \text{oraz} \quad \overline{cde}=7\cdot\overline{ab}.$$

Uwaga. Zapis $\overline{x_1x_2\ldots x_m}$ oznacza dodatnią liczbę m-cyfrową, której kolejnymi cyframi w zapisie dziesiętnym (od lewej) są x_1, x_2, …, x_m.

Rozwiązanie: Z warunków zadania wynika, że

$$63 \cdot \overline{ab} = 9 \cdot \overline{cde} = 900c + 9 \cdot \overline{de} = 900c + \overline{abc} = 901c + 10 \cdot \overline{ab},$$

skąd wniosek, że $53 \cdot \overline{ab} = 901c$, czyli $\overline{ab} = 17c$. Podobnie

$$63 \cdot \overline{de} = 7 \cdot \overline{abc} = 7c + 70 \cdot \overline{ab} = 7c + 10 \cdot \overline{cde} = 1007c + 10 \cdot \overline{de},$$

skąd wniosek, że $53 \cdot \overline{de} = 1007c$, czyli $\overline{de} = 19c$. Liczby $17c$ oraz $19c$ są dwucyfrowe tylko dla $1 \leqslant c \leqslant 5$. Uzyskujemy więc pięć liczb pięciocyfrowych spełniających warunki zadania:

$$17119, \quad 34238, \quad 51357, \quad 68476, \quad 85595.$$

Zadanie 11.

Dodatnie liczby a, b, c są takie, że $a > 100c$. Wykaż, że

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} > 20.$$

Rozwiązanie: Z nierówności między średnimi arytmetyczną i geometryczną zastosowanej dla liczb $\frac{a}{b}$ i $\frac{b}{c}$ oraz warunku $\frac{a}{c} > 100$ wynika, że

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqslant 2\sqrt{\frac{a}{c}} + \frac{c}{a} \geqslant 20 + \frac{c}{a} > 20.$$

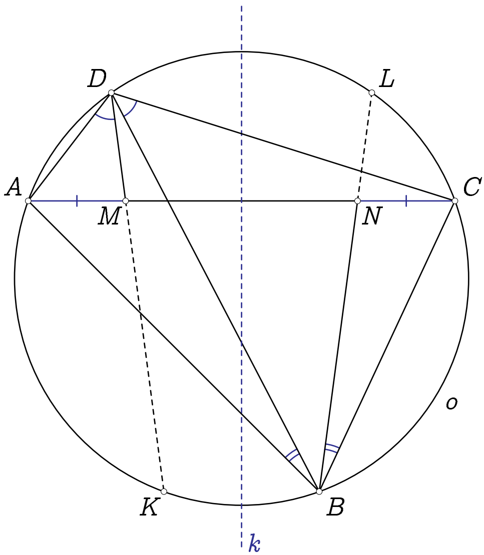
Uwaga: Można udowodnić nieco silniejszą nierówność, mianowicie, że lewa strona dowodzonej nierówności jest większa od $20,01$. Wynika to na przykład z faktu, że funkcja $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x}$ jest dla $x \geqslant 100$ ściśle rosnąca.

Zadanie 12.

Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkty M oraz N leżą na odcinku AC, przy czym $\sphericalangle ADM = \sphericalangle BDC$ oraz $AM = CN$. Udowodnij, że $\sphericalangle CBN = \sphericalangle DBA$.

Rozwiązanie: Oznaczmy okrąg opisany na czworokącie $ABCD$ przez o, a wspólną symetralną odcinków AC i MN — przez k. Niech K będzie różnym od D punktem przecięcia prostej DM z okręgiem o, a L — różnym od B punktem przecięcia prostej BN z okręgiem o.

Równość $\sphericalangle ADK = \sphericalangle BDC$ oznacza, że łuki AK i BC okręgu o, na których oparte są te kąty, są przystające. W szczególności wynika z tego, że punkty K i B są symetryczne względem k. W konsekwencji proste KM i BN są symetryczne względem prostej k, czyli także punkty L i D są względem niej symetryczne. To zaś oznacza, że łuki CL i AD, na których oparte są kąty CBL i DBA, są przystające, skąd wynika postulowana równość.



Zadanie 13.

Na tablicy zapisano 2021 jedynek. W każdym ruchu można zastąpić parę liczb a, b liczbą a^2+b^2. Wykazać, że na końcu zostanie zapisana liczba nie mniejsza niż 2^{2020}.

Rozwiązanie: Ponieważ $a^2+b^2 \geqslant 2ab$, więc iloczyn wszystkich liczb napisanych na tablicy po każdym ruchu zwiększa się co najmniej dwukrotnie. W związku z tym, skoro początkowo wynosi 1, to po 2020 ruchach będzie równy co najmniej 2^{2020}.

Uwaga: Ostatnia liczba będzie nawet ściśle większa od 2^{2020}, gdyż w pewnym ruchu będą musiały zostać wybrane dwie różne liczby, co oznacza, że w tym ruchu iloczyn zwiększy się więcej niż dwukrotnie.

Zadanie 14.

Dana jest liczba pierwsza p oraz taka liczba całkowita n, że liczby

$$1, \quad 1+n, \quad 1+n+n^2, \quad \ldots, \quad 1+n+n^2+\ldots+n^{p-1}$$

dają parami różne reszty przy dzieleniu przez p. Wykaż, że liczba n daje resztę 1 przy dzieleniu przez p.

Rozwiązanie: Sposób I

Przypuśćmy nie wprost, że p nie jest dzielnikiem liczby $n-1$. Wówczas liczby postaci

$$(n-1)(1+n+n^2+\ldots+n^i) = n^{i+1}-1$$

dla $i = 0, 1, \ldots, p-1$ na mocy warunków zadania dają parami różne reszty przy dzieleniu przez p. Wobec tego dla pewnego i liczba $n^{i+1}-1$ daje resztę $p-1$ z dzielenia przez p, co oznacza, że n jest liczbą podzielną przez p. Wówczas jednak wszystkie dane w zadaniu liczby dają resztę 1 przy dzieleniu przez p — uzyskana sprzeczność kończy dowód.

Sposób II

Oznaczmy liczbę $1+n+n^2+\ldots+n^i$ przez A_i dla $i = 0, 1, \ldots, p-1$.

Skoro reszty przy dzieleniu przez p liczb A_i są parami różne, a jest ich p, to dla pewnego i mamy resztę zero, czyli $p \mid A_i$. Jeśli $i \neq p-1$, to $A_{i+1} = nA_i + 1$ daje resztę 1 przy dzieleniu przez p, czyli tę samą resztę, co A_0 — sprzeczność. Wobec tego $i = p-1$, czyli liczba A_{p-1} jest podzielna przez p. W konsekwencji liczba

$$(n-1)A_{p-1} = n^p - 1$$

dzieli się przez p. Tymczasem z małego twierdzenia Fermata wynika, że n^p daje tę samą resztę co n przy dzieleniu przez p i w konsekwencji — liczba $n-1$ dzieli się przez p, co należało udowodnić.

Zadanie 15.

Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym

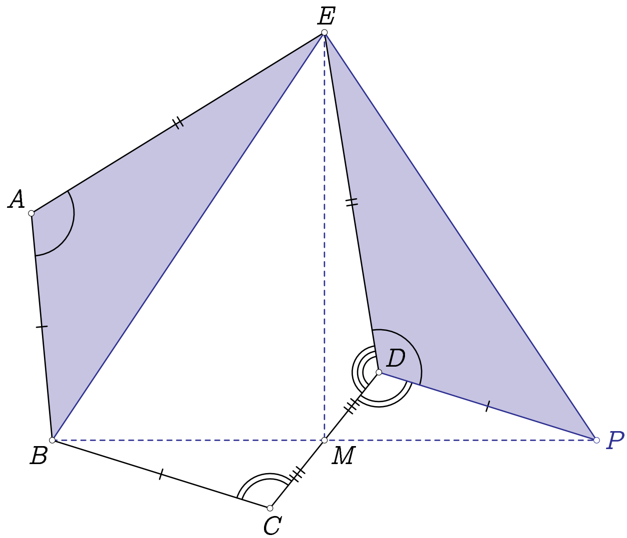
$$BA = BC, \quad EA = ED \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle BAC + \sphericalangle EAD = 90^\circ.$$

Punkt M jest środkiem odcinka CD. Wykaż, że $\sphericalangle BME = 90^\circ$.

Rozwiązanie: Zauważmy, że dana w treści zadania równość kątów oznacza, że

$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle AED = (180^\circ - 2\sphericalangle BAC) + (180^\circ - 2\sphericalangle EAD) = 180^\circ,$$

a w konsekwencji $\sphericalangle EAB + \sphericalangle BCD + \sphericalangle CDE = 360^\circ$.



Oznaczmy przez P punkt symetryczny do B względem M, czyli taki punkt, że czworokąt $BCPD$ jest równoległobokiem. Wówczas $DP = BC = AB$, $DE = AE$,

$$\sphericalangle PDE = 360^\circ - \sphericalangle CDE - \sphericalangle PDC = 360^\circ - \sphericalangle CDE - \sphericalangle BCD = \sphericalangle EAB,$$

skąd wniosek, że trójkąty DEP oraz AEB są przystające (cecha bok–kąt–bok). W konsekwencji $BE = PE$. Punkt M jest środkiem podstawy BP trójkąta równoramiennego BEP, więc $\sphericalangle BME = 90^\circ$, co należało udowodnić.