Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Juniorów — poziom OMJ

Olimpiada Matematyczna Juniorów
www.omj.edu.pl

21–28 maja 2023 r.

Skład komputerowy: Kosma Kasprzak, Bartosz Głowacki, Hai An Mai, Arkadiusz Męcel, Piotr Miernik, Witold Sikora

Rysunki: Hai An Mai

Recenzent: dr Arkadiusz Męcel

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Juniorów
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
ul. Śniadeckich 8
00-656 Warszawa
www.omj.edu.pl

Wstęp

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Juniorów (poziom OMJ) odbył się w dniach 21–28 maja 2023 r. w Domu Rekolekcyjno-Konferencyjnym „Wieczernik” w Świętej Katarzynie (woj. świętokrzyskie). Do udziału w Obozie zakwalifikowano uczniów z klas 5-7 szkół podstawowych z najlepszymi wynikami w XVIII OMJ.

Każdego dnia uczestnicy Obozu rozwiązywali zadania w formule konkursowej, pracując zarówno indywidualnie, jak i w grupach. Popołudnia poświęcone były na wykłady tematyczne i zajęcia warsztatowe. W piątek odbył się spacer do Świętokrzyskiego Parku Narodowego, a w sobotę przeprowadzony został mecz matematyczny.

W niniejszym opracowaniu zebrane są zadania konkursowe wraz z rozwiązaniami. Zachęcamy do wykorzystania tych materiałów w przygotowaniach do startów w kolejnych edycjach Olimpiady Matematycznej Juniorów — zwłaszcza w ramach treningu przed zawodami finałowymi, a także w przygotowaniach do rozpoczęcia przygody z Olimpiadą Matematyczną dla szkół ponadpodstawowych — podejmowanych jeszcze w trakcie lub bezpośrednio po zakończeniu nauki w szkole podstawowej.

Poziom trudności niektórych problemów zawartych w niniejszym opracowaniu przewyższa zdecydowanie poziom trudności zadań ostatnich edycji OMJ — nawet tych proponowanych na zawody finałowe. Tematyka podejmowana na Obozie odnosi się przy tym do programu merytorycznego Olimpiady, czerpiąc inspiracje z międzynarodowych zawodów matematycznych rozgrywanych na poziomie juniorskim.

Miłej lektury!

Kadra Obozu

Uczestnicy Obozu Naukowego OMJ (poziom OMJ)

Uczniowie: Dawid Bociąga, Aleksander Dembny, Piotr Dybich, Adam Heine, Nina Hołda, Marek Konieczny, Krzysztof Kowalik, Emilia Królikowska, Aleksander Lada, Szymon Lipiński, Matylda Maciejewska, Michał Maciołka, Szymon Michalik, Szymon Pilipczuk, Artur Smoleński, Rafał Sobolewski, Krzysztof Suligowski, Mateusz Śmietanko, Paweł Warchoł, Piotr Zalewski.

Kadra: Paweł Dziuba (kierownik), Kosma Kasprzak, Bartosz Głowacki, Hai An Mai, Arkadiusz Męcel, Piotr Miernik, Witold Sikora.

Treści zadań

Zadanie 1.

Czy istnieją dodatnie liczby całkowite a, b, c spełniające równość $2^{a^2} + 2^{b^2} = 2^{c^2}$? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 2.

Punkt X leży na odcinku AB, a punkty C i D — po przeciwnych stronach tego odcinka, przy czym spełnione są równości

$$AX = CX = 3, \quad BX = DX = 7, \quad AC = BC, \quad AD = BD.$$

Wykaż, że $CD < 9$.

Zadanie 3.

Niech $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ oraz $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$, dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej k zachodzi nierówność $a_k \leqslant 2^k$.

Zadanie 4.

Na płaszczyźnie dany jest niepusty zbiór S o tej własności, że dowolny punkt w S jest środkiem pewnego odcinka (niezerowej długości) o końcach ze zbioru S. Udowodnij, że zbiór S jest nieskończony.

Zadanie 5.

Wyznacz wszystkie pary (a, b) dodatnich liczb całkowitych, dla których wartości ułamków

$$\frac{a^2 + b}{b^2 - a} \quad \text{oraz} \quad \frac{b^2 + a}{a^2 - b}$$

są liczbami całkowitymi.

Zadanie 6.

W czworokącie wypukłym $ABCD$ przekątne AC i BD są równej długości i przecinają się w punkcie X. Załóżmy, że $\sphericalangle AXB = 60^\circ$. Wykaż, że istnieje taki punkt Y, że trójkąty ABY i CDY są równoboczne.

Zadanie 7.

Czy istnieją liczby naturalne n, a i b, takie że $n - 2$ jest liczbą pierwszą i spełnione są równości $2n + 1 = 3a^2$ oraz $5n + 5 = b^2$?

Zadanie 8.

W kółku usiadło 2023 dzieci. Każde dziecko dostało 10 kamieni. Co minutę jedno dziecko, które ma co najmniej 2 kamienie, może rozdać po jednym kamieniu sąsiadom. Czy w pewnej chwili może się okazać, że co najmniej 1012 dzieci nie ma żadnego kamienia?

Zadanie 9.

Wyznacz liczbę pięciocyfrowych liczb naturalnych n spełniających jednocześnie dwa warunki:

- n oraz jej suma cyfr są podzielne przez 5,
- pierwsza i ostatnia cyfra n są takie same.

Zadanie 10.

Niech a_n będzie liczbą naturalną, której zapis dziesiętny powstaje poprzez złączenie zapisu kolejnych liczb naturalnych od 1 do n. Mamy więc na przykład $a_4 = 1234$, $a_{11} = 1234567891011$. Znajdź wszystkie liczby naturalne n, dla których liczba a_n jest niepodzielna przez 3.

Zadanie 11.

Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym kąt wewnętrzny CDA jest wklęsły. Przypuśćmy, że $\sphericalangle DAB = \sphericalangle BCD$ oraz $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDA - 180^\circ$. Wykaż, że czworokąt $ABCD$ ma dwie pary boków prostopadłych.

Zadanie 12.

Liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają warunek $a + b + c + d = 0$. Udowodnij, że

$$\max(a, b) + \max(a, c) + \max(a, d) + \max(b, c) + \max(b, d) + \max(c, d) \geqslant 0,$$

gdzie $\max(x, y)$ oznacza nie mniejszą spośród liczb x i y.

Zadanie 13.

Marek pomyślał o pięciu liczbach rzeczywistych a, b, c, d, e, dodał każde dwie z nich, i zapisał na kartce wartości dziesięciu uzyskanych w ten sposób sum. Następnie Marek przekazał tę kartkę Szymonowi. Czy Szymon, tylko na podstawie zapisanych na kartce dziesięciu liczb, może wywnioskować o jakich pięciu liczbach pomyślał Marek?

Zadanie 14.

Kolejne liczby naturalne od 1 do 100 wypisano od lewej do prawej w pewnej kolejności. Liczbę występującą w tym ciągu nazwiemy *prawostronnie maksymalną*, jeśli jest ona większa od każdej liczby znajdującej się w tym ciągu na prawo od niej. Analogicznie definiujemy liczbę *lewostronnie maksymalną*. Załóżmy, że w rozważanym ciągu jest dokładnie k liczb prawostronnie maksymalnych i dokładnie k liczb lewostronnie maksymalnych. Znajdź największą możliwą wartość k.

Zadanie 15.

Dany jest równoległobok $ABCD$, w którym kąt DAB jest ostry. Niech $X \neq B$ będzie punktem na prostej AB spełniającym $XC = BC$. Analogicznie, niech $Y \neq B$ będzie punktem na prostej BC spełniającym $AB = AY$. Udowodnij, że $\sphericalangle DYX = \sphericalangle DXY$.

Zadanie 16.

Ile jest liczb całkowitych dodatnich n mniejszych od 2023, dla których istnieje dodatnia liczba rzeczywista x, taka że $n = x \cdot \lfloor x \rfloor$? Odpowiedź uzasadnij.

Uwaga: $\lfloor x \rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x.

Zadanie 17.

Czy można wpisać w każde pole nieskończonej szachownicy pewną dodatnią liczbę całkowitą w taki sposób, aby suma liczb wpisanych w pola w każdego prostokąta rozmiaru $n \times m$ złożonego z nm pól tej szachownicy była podzielna przez $n + m$?

Zadanie 18.

Para dodatnich liczb całkowitych (x, y) spełnia równość

$$2x + 4y = \mathrm{NWD}(x, y) + \mathrm{NWW}(x, y).$$

Znajdź wszystkie możliwe wartości ilorazu

$$\frac{\mathrm{NWW}(x, y)}{\mathrm{NWD}(x, y)}.$$

Zadanie 19.

Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB = 90^\circ$. Punkt M jest środkiem boku AB, a prosta równoległa do prostej BC i przechodząca przez punkt M przecina prostą AC w punkcie D. Oznaczmy środek odcinka CD przez E. Załóżmy, że proste BD i CM są prostopadłe. Wykaż, że proste EM i AB są prostopadłe.

Zadanie 20.

Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite n o tej własności, że w zapisie dziesiętnym liczby n^2 wszystkie cyfry są równe.

Zadanie 21.

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Niech D będzie spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka A, a punkty P i Q niech będą rzutami prostokątnymi punktu D odpowiednio na boki AB i AC. Wykaż, że trójkąty APQ i ABC są podobne.

Zadanie 22.

Znajdź wszystkie liczby całkowite m, które można przedstawić w postaci sumy co najmniej dwóch kolejnych dodatnich liczb nieparzystych.

Zadanie 23.

Na obwodzie trójkąta równobocznego o boku $2n$ zaznaczono $6n$ punktów, w tym wierzchołki trójkąta. Każde dwa kolejne zaznaczone punkty są końcami odcinka o długości 1. Spośród zaznaczonych punktów pewne $4n+1$ pomalowano na czerwono. Wykaż, że istnieje trójkąt równoboczny o czerwonych wierzchołkach.

Zadanie 24.

Na obwodzie trójkąta równobocznego o boku $2n$ zaznaczono $6n$ punktów, w tym wierzchołki trójkąta. Każde dwa kolejne zaznaczone punkty są końcami odcinka o długości 1. Spośród zaznaczonych punktów pewne $3n+2$ pomalowano na czerwono. Wykaż, że istnieje trapez równoramienny o czerwonych wierzchołkach.

Zadanie 25.

Niech x, y, z będą liczbami rzeczywistymi, takimi że $x \neq 1$, $y \neq 1$ oraz $x \neq y$. Załóżmy również, że dla pewnej liczby rzeczywistej k spełniony jest warunek.

$$\frac{yz - x^2}{1 - x} = \frac{xz - y^2}{1 - y} = k.$$

Wykaż, że $k = x + y + z$.

Zadanie 26.

Czy istnieją liczby całkowite a, b, c spełniające warunek $a + b + c = 0$, dla których liczba $a^7 + b^7 + c^7$ jest pierwsza?

Zadanie 27.

Okrąg ω jest styczny do boków AB, BC i CD równoległoboku $ABCD$ odpowiednio w punktach K, L i M. Wykaż, że odcinek KL przechodzi przez środek odcinka łączącego punkt C z rzutem prostopadłym punktu C na prostą AB.

Zadanie 28.

Nazwijmy *schodami* figurę powstałą przez usunięcie z szachownicy 15×15 wszystkich pól, które są w pełni nad jej przekątną, tzn. tych pól, które znajdują się w i-tym wierszu i j-tej kolumnie szachownicy, dla $j > i$. Dowolną szachownicę rozmiaru $k \times k$, dla pewnego naturalnego k, nazwijmy natomiast *kwadratem*. Wyznacz najmniejszą liczbę kwadratów, na które rozciąć można schody.

Zadanie 29.

Liczbę naturalną n nazwiemy *mocarną*, jeśli jest ona równa m^2+1, dla pewnej liczby całkowitej m. Wykaż, że istnieje nieskończenie wiele liczb mocarnych k których jedynymi dodatnimi dzielnikami mocarnymi są liczby 1 oraz k.

Zadanie 30.

Każdych dwóch nieznajomych w pewnym gronie n osób ma w nim wspólnego znajomego. Wykaż, że najmniejsza możliwa liczba par znajomych w tym gronie wynosi $n - 1$.

Zadanie 31.

Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku 3. Na odcinkach AB i AD leżą odpowiednio takie punkty E i F, że $AE = AF = 2$. Wyznacz długość cięciwy okręgu opisanego na trójkącie AEF zawartej w prostej BD.

Zadanie 32.

W rombie $ABCD$ kąt przy wierzchołku B ma miarę $120°$. Punkty E i F znajdują się odpowiednio na bokach AB i BC, przy czym $\sphericalangle EDF = 30°$. Wykaż, że środek okręgu opisanego na trójkącie EFD leży na przekątnej BD.

Zadanie 33.

Na płaszczyźnie dane są wielokąt wypukły W oraz punkt P znajdujący się we wnętrzu W. Załóżmy, że dowolna prosta przechodząca przez punkt P dzieli obwód wielokąta W na dwie łamane o równych długościach. Wykaż, że wielokąt W jest środkowosymetryczny.

Zadanie 34.

Janosik ponumerował wierzchołki pewnego sześcianu liczbami $1, 2, \ldots, 8$, a następnie zapisał na każdej krawędzi tego sześcianu sumę liczb znajdujących się na jej końcach. Czy jest możliwe, aby wszystkie liczby zapisane na krawędziach były parami różne?

Zadanie 35.

Liczby rzeczywiste x, y spełniają równość $(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1}) = 1$. Wyznacz wartość liczby $x + y$.

Zadanie 36.

Na nieskończonej szachownicy złożonej z pól rozmiaru 1×1 położono sześcian rozmiaru $1 \times 1 \times 1$ tak, by jego podstawa pokrywa dokładnie jedno pole szachownicy. Na górnej ścianie sześcianu (przeciwległej do położonej na szachownicy) napisana jest litera A. W dowolnym momencie możemy obrócić sześcian na sąsiednie pole szachownicy w taki sposób, żeby krawędź sześcianu przylegająca do granicy między polami nie oderwała się od szachownicy podczas obrotu. Czy po pewnej liczbie takich obrotów sześcian może znaleźć się na polu sąsiadującym z polem, na który został pierwotnie położony, i być ułożonym tak, by na górnej ścianie litera A zorientowana była w tym samym kierunku jak na początku?

Zadanie 37.

Dany jest czworokąt $ABCD$ spełniający warunki $\sphericalangle BCD = 90^\circ$, $\sphericalangle CDA = 150^\circ$ oraz $BC = AD$. Punkty M i N są środkami odpowiednio boków AB i CD. Wyznacz miarę kąta między prostymi MN i CD.

Zadanie 38.

Niech A będzie dowolnym zbiorem n parami różnych dodatnich liczb całkowitych. Wykaż, że nie więcej niż $n-1$ różnych potęg dwójki może być zapisane w postaci sumy dwóch różnych elementów zbioru A.

Zadanie 39.

Wykaż, że 6 jest najmniejszą liczbą naturalną n spełniającą następujący warunek: „W przedziale $(-1, 1)$ istnieją liczby rzeczywiste $x_1, \ldots, x_n$ o sumie równej 0 i sumie kwadratów równej 4.”

Zadanie 40.

Dla jakich dodatnich liczb całkowitych n możemy rozbić zbiór ułamków

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ \ldots \ , \frac{n-1}{n}\right\}$$

na takie dwa rozłączne podzbiory, że iloczyny elementów tych podzbiorów są równe?

Zadanie 41.

Znajdź wszystkie pary (p, q) liczb pierwszych, dla których $p + q = (p - q)^3$.

Zadanie 42.

Niech (a_n), (b_n) będą ciągami dodatnich liczb całkowitych spełniającymi warunek

$$a_n + b_n\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^n,$$

dla wszystkich całkowitych dodatnich n. Wykaż, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n liczby a_n i b_n są względnie pierwsze.

Zadanie 43.

Niech p będzie dowolną liczbą pierwszą. Wykaż, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, że liczba całkowita a_n postaci

$$a_n = n^1 + (n-1)^2 + (n-2)^3 + \ldots + 3^{n-2} + 2^{n-1} + 1^n$$

daje przy dzieleniu przez p resztę 2023.

Rozwiązania zadań

Zadanie 1.

Czy istnieją dodatnie liczby całkowite a, b, c spełniające równość $2^{a^2} + 2^{b^2} = 2^{c^2}$? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie: Odpowiedź jest negatywna. Aby to uzasadnić, przypuśćmy nie wprost, że istnieją dodatnie liczby całkowite a, b, c spełniające warunki zadania. Bez straty ogólności możemy założyć, że $a \geqslant b$. Jeżeli $a \neq b$, to $a^2 = b^2 + x$, gdzie x jest dodatnią liczbą całkowitą. Wówczas liczba

$$2^{a^2} + 2^{b^2} = 2^{b^2+x} + 2^{b^2} = 2^{b^2}(2^x + 1)$$

ma nieparzysty dzielnik równy $2^x + 1$, który jest większy od 1, więc nie może być potęgą dwójki. To oznacza, że $a^2 = b^2$, czyli $a = b$. Możemy zatem wykonać ciąg równoważnych przekształceń wyjściowego warunku:

$$\begin{aligned} 2^{a^2} + 2^{b^2} &= 2^{c^2}, \\ 2^{a^2+1} &= 2^{c^2}, \\ a^2 + 1 &= c^2, \\ c^2 - a^2 &= 1, \\ (c-a)(a+c) &= 1. \end{aligned}$$

Skoro $a + c > 0$, to także $c - a > 0$, a stąd $a + c = 1$ oraz $c - a = 1$, skąd $c = 1$ i $a = 0$, co przeczy założeniu, że a jest liczbą dodatnią.

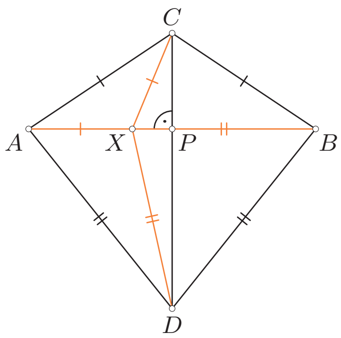
Zadanie 2.

Punkt X leży na odcinku AB, a punkty C i D — po przeciwnych stronach tego odcinka, przy czym spełnione są równości

$$AX = CX = 3, \quad BX = DX = 7, \quad AC = BC, \quad AD = BD.$$

Wykaż, że $CD < 9$.

Rozwiązanie: Niech P będzie punktem przecięcia odcinków AB oraz CD (rys. 1). Zauważmy, że prosta CD jest osią symetrii czworokąta $ADBC$. Odcinki AB oraz CD są więc prostopadłe i $\sphericalangle APC = 90^\circ = \sphericalangle APD$.



rys. 1

Punkt P jest środkiem odcinka AB, skąd wnioskujemy, że

$$AP = \frac{AX + BX}{2} = 5.$$

Mamy również $XP = AP - AX = 5 - 3 = 2$.

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów CPX oraz DPX:

$$CP = \sqrt{XC^2 - XP^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5},$$
$$DP = \sqrt{XD^2 - XP^2} = \sqrt{49-4} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

W rezultacie

$$CD = CP + DP = 4\sqrt{5} = \sqrt{80} < \sqrt{81} = 9.$$

Zadanie 3.

Niech $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ oraz $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$, dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej k zachodzi nierówność $a_k \leqslant 2^k$.

Rozwiązanie: Załóżmy nie wprost, że teza nie jest spełniona i oznaczmy przez k najmniejszą liczbę naturalną, dla której $a_k > 2^k$. Oczywiście $k > 2$, wobec czego możemy zapisać

$$a_{k-3} \leqslant 2^{k-3}, \quad a_{k-2} \leqslant 2^{k-2}, \quad a_{k-1} \leqslant 2^{k-1}.$$

Stąd uzyskujemy

$$a_k = a_{k-1} + a_{k-2} + a_{k-3} \leqslant 2^{k-1} + 2^{k-2} + 2^{k-3} = 2^{k-3}(4+2+1) < 2^{k-3} \cdot 8 = 2^k,$$

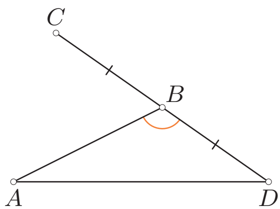
co przeczy założeniu $a_k > 2^k$.

Zadanie 4.

Na płaszczyźnie dany jest niepusty zbiór S o tej własności, że dowolny punkt w S jest środkiem pewnego odcinka (niezerowej długości) o końcach ze zbioru S. Udowodnij, że zbiór S jest nieskończony.

Rozwiązanie: Załóżmy nie wprost, że dany zbiór S jest skończony. Skoro par punktów ze zbioru S jest skończenie wiele, to możemy wybrać taką parę punktów A, B zbioru S, dla której długość wyznaczonego przez nią odcinka AB jest największa.

Z opisu zbioru S wiemy, że punkt B jest środkiem pewnego odcinka CD, gdzie C i D są punktami ze zbioru S. Bez straty ogólności (ewentualnie zamieniając nazwy punktów C i D) możemy założyć, że kąt ABD ma miarę co najmniej 90° (rys. 2).



rys. 2

Zgodnie z przyjętym przez nas założeniem, w trójkącie ABD kąt przy wierzchołku B ma największą miarę. Wobec tego naprzeciw tego kąta znajduje się najdłuższy bok tego trójkąta. Stąd $AB < AD$, co jest jednak sprzeczne wyborem AB jako najdłuższego odcinka o końcach ze zbioru S. Uzyskana sprzeczność oznacza, że zbiór S nie może być skończony.

Zadanie 5.

Wyznacz wszystkie pary (a, b) dodatnich liczb całkowitych, dla których wartości ułamków

$$\frac{a^2+b}{b^2-a} \quad \text{oraz} \quad \frac{b^2+a}{a^2-b}$$

są liczbami całkowitymi.

Rozwiązanie: Dla dowolnej pary (a, b) dodatnich liczb całkowitych liczby $a^2 + b$ oraz $b^2 + a$ są dodatnie. Aby ułamki o dodatnich licznikach były liczbami całkowitymi konieczne jest, aby w każdym z nich licznik był nie mniejszy od mianownika. Otrzymujemy w ten sposób nierówności

$$a^2 + b \geqslant b^2 - a \quad \text{oraz} \quad b^2 + a \geqslant a^2 - b.$$

Przekształcając równoważnie pierwszą nierówność, otrzymujemy $a^2 - b^2 \geqslant -(a+b)$ skąd, dzieląc przez dodatnią liczbę $a+b$, dostajemy $a-b \geqslant -1$. Postępując podobnie z drugą nierównością, uzyskujemy $a - b \leqslant 1$. Łącząc uzyskane warunki, uzyskujemy $-1 \leqslant a-b \leqslant 1$. W rezultacie prawdziwa jest jedna z równości $a = b$ lub $a = b \pm 1$.

Jeżeli $a = b$, to

$$\frac{a^2+b}{a^2-b} = \frac{b^2+a}{b^2-a} = \frac{a^2+a}{a^2-a} = \frac{a+1}{a-1} = 1 + \frac{2}{a-1}.$$

Liczba ta jest całkowita wtedy i tylko wtedy, gdy $a - 1$ jest dzielnikiem liczby 2, co w świetle założenia $a > 0$ oznacza, że $a = b = 2$ lub $a = b = 3$.

Jeżeli $a = b \pm 1$, to biorąc pod uwagę, że dane ułamki są symetryczne ze względu na a, b, możemy założyć bez straty ogólności, że $b = a + 1$. Sprawdzimy, kiedy liczby

$$\frac{a^2+a+1}{a^2+a+1}, \quad \frac{a^2+3a+1}{a^2-a-1}$$

są całkowite. Pierwsza z nich jest równa 1. Odejmując natomiast od drugiego ułamka liczbę 1, uzyskujemy ułamek

$$\frac{4a+2}{a^2-a-1}.$$

Ponownie wykorzystując obserwację, że ułamek o wartości całkowitej i dodatnim liczniku oraz mianowniku ma licznik nie mniejszy od mianownika, uzyskujemy nierówność $4a + 2 \geqslant a^2 - a - 1$. Przekształcamy tę nierówność równoważnie:

$$\begin{aligned}
0 &\geqslant a^2 - 5a - 3, \\
0 &\geqslant 4a^2 - 20a - 12, \\
0 &\geqslant (2a-5)^2 - 37, \\
37 &\geqslant (2a-5)^2.
\end{aligned}$$

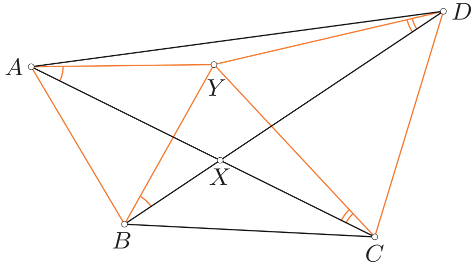
Uzyskujemy $a \leqslant 5$. Bezpośrednio sprawdzając pięć możliwych wartości a, przekonujemy się, że warunki zadania są spełnione jedynie gdy $a = 1$ lub $a = 2$.

Łącząc wyniki uzyskane w obydwu przypadkach, uzyskujemy wszystkie możliwe pary (a,b), czyli $(2,2)$, $(3,3)$, $(2,1)$, $(1,2)$.

Zadanie 6.

W czworokącie wypukłym $ABCD$ przekątne AC i BD są równej długości i przecinają się w punkcie X. Załóżmy, że $\sphericalangle AXB = 60^\circ$. Wykaż, że istnieje taki punkt Y, że trójkąty ABY i CDY są równoboczne.

Rozwiązanie: Niech Y będzie takim punktem leżącym po tej samej stronie prostej AB, co punkt X, że trójkąt ABY jest równoboczny (rys. 3). Wykażemy, że trójkąt CDY jest równoboczny. W tym celu uzasadnimy, że zachodzą równości $CY = DY$ oraz $\sphericalangle CYD = 60^\circ$.



rys. 3

W celu wykazania, że $CY = DY$ uzasadnimy, że trójkąty ACY i BDY są przystające (cecha bok–kąt–bok). Istotnie, mamy

$$\begin{aligned} \sphericalangle BAY + \sphericalangle ABY &= 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ - 60^\circ \\ &= \sphericalangle BAX + \sphericalangle ABX \\ &= \sphericalangle BAY - \sphericalangle XAY + \sphericalangle ABY + \sphericalangle XBY, \end{aligned}$$

co oznacza, że $\sphericalangle XAY = \sphericalangle XBY$. Ponieważ $AY = BY$, $\sphericalangle XAY = \sphericalangle XBY$ oraz $AC = BD$, więc trójkąty ACY i BDY są przystające. Pozostaje zauważyć, że

$$\begin{aligned} \sphericalangle CYD &= \sphericalangle BYD - \sphericalangle BYC \\ &= \sphericalangle AYC - \sphericalangle BYC = \sphericalangle AYB = 60^\circ. \end{aligned}$$

Stąd rzeczywiście $\sphericalangle CYD = 60^\circ$, a to w połączeniu z równością $CY = DY$ oznacza, że trójkąt CYD jest równoboczny.

Uwaga. Warto odnotować, że punkt Y jest środkiem takiego obrotu o kąt 60°, który przeprowadza punkt C na punkt D (oraz punkt A na punkt B).

Zadanie 7.

Czy istnieją liczby naturalne n, a i b, takie że $n-2$ jest liczbą pierwszą i spełnione są równości $2n+1=3a^2$ oraz $5n+5=b^2$?

Rozwiązanie: Załóżmy, ze istnieją takie liczby n, a i b. Zauważmy, że

$$n-2=3(2n+1)-(5n+5)=9a^2-b^2=(3a-b)(3a+b).$$

Dowolna liczba pierwsza p ma dwa przedstawienia w postaci iloczynu dwóch liczb całkowitych: $(-1)\cdot(-p)$ oraz $1\cdot p$. Skoro $3a+b>0$ oraz $n-2>0$, to także $3a-b>0$. Skoro zaś $3a+b>3a-b$, to $3a-b=1$ oraz $3a+b=n-2$. W rezultacie $6a=n-1$, czyli również $12a=2n-2=3a^2-3$. Liczba a spełnia więc równość

$$0=a^2-4a-1=(a-2)^2-5,$$

co jest niemożliwe, ponieważ 5 nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Uwaga. W istocie nie istnieją liczby naturalne n, a i b spełniające postawione w zadaniu warunki $2n+1=3a^2$ oraz $5n+5=b^2$. Przepisując bowiem drugą równość w postaci $5(n+1)=b^2$, wnioskujemy że b^2 jest liczbą podzielną przez 25, a zatem liczba $n+1$ jest podzielna przez 5. W rezultacie n daje resztę 4 z dzielenia przez 5. Zatem liczba $2n+1$ również daje resztę 4 przy dzieleniu przez 5. Tymczasem liczba postaci $3a^2$ daje może przy dzieleniu przez 5 dawać wyłącznie reszty 0, 2 lub 3.

Zadanie 8.

W kółku usiadło 2023 dzieci. Każde dziecko dostało 10 kamieni. Co minutę jedno dziecko, które ma co najmniej 2 kamienie, może rozdać po jednym kamieniu sąsiadom. Czy w pewnej chwili może się okazać, że co najmniej 1012 dzieci nie ma żadnego kamienia?

Rozwiązanie: Przypuśćmy nie wprost, że odpowiedź jest pozytywna. Twierdzimy, że wówczas pewna para sąsiadów nie ma żadnych kamieni. Rzeczywiście, gdyby każde dziecko bez kamieni siedziało pomiędzy dziećmi mającymi co najmniej jeden kamień, to tych drugich byłoby nie mniej od tych pierwszych (gdyż każdemu dziecku bez kamienia można przyporządkować prawego sąsiada, czyli pewne dziecko z kamieniami). Rozważmy pierwszy moment, w którym pojawiła się para sąsiadów bez kamieni. To oznacza, że w tym momencie jeden z nich pozbył się swoich kamieni, co przeczy temu, że drugi nie ma ani jednego (bo właśnie dostał jeden kamień). Odpowiedź na pytanie postawione w zadaniu jest zatem negatywna.

Zadanie 9.

Wyznacz liczbę pięciocyfrowych liczb naturalnych n spełniających jednocześnie dwa warunki:

- n oraz jej suma cyfr są podzielne przez 5,
- pierwsza i ostatnia cyfra n są takie same.

Rozwiązanie: Niech $n = \overline{abcde}$, gdzie a, b, c, d, e to kolejne cyfry w zapisie dziesiętnym liczby n. Zgodnie z cechą podzielności przez 5, cyfra e jest równa 0 lub 5. Z drugiego warunku opisującego liczbę n wynika, że $e = a \neq 0$, więc $a = e = 5$.

Zgodnie z założeniem, suma cyfr liczby n, równa $10+b+c+d$, jest podzielna przez 5. Twierdzimy, że dla każdego wyboru pary cyfr b i c (po 10 wyborów dla każdej cyfry) cyfra d przyjąć może dokładnie 2 wartości. Rzeczywiście, oznaczając przez r resztę z dzielenia liczby $b + c$ przez 5, widzimy że dla $r \neq 0$, cyfra d może być równa $5 - r$ lub $10 - r$, a dla $r = 0$ mamy możliwości $d = 0$ lub $d = 5$. W rezultacie liczba pięciocyfrowych liczb spełniających warunki zadania równa jest $1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 1 = 200$.

Zadanie 10.

Niech a_n będzie liczbą naturalną, której zapis dziesiętny powstaje poprzez złączenie zapisu kolejnych liczb naturalnych od 1 do n. Mamy więc na przykład $a_4 = 1234$, $a_{11} = 1234567891011$. Znajdź wszystkie liczby naturalne n, dla których liczba a_n jest niepodzielna przez 3.

Rozwiązanie: Oznaczmy przez $S(n)$ sumę cyfr liczby naturalnej n. Skorzystamy z faktu, że $S(n) \equiv n \pmod 3$. Innymi słowy, liczba n daje tę samą resztę przy dzieleniu przez 3 co jej suma cyfr. Uzyskujemy stąd, że złączenie zapisu dziesiętnego liczb naturalnych r i s daje liczbę (oznaczmy ją przez $\overline{rs}$), która przy dzieleniu przez 3 daje taką samą resztę, co ich suma $r + s$, to znaczy: $S(\overline{rs}) = S(r) + S(s) \equiv r + s \pmod 3$.

Korzystając z powyższej obserwacji, stwierdzamy, że reszta z dzielenia liczby a_n przez 3 równa jest reszcie z dzielenia sumy liczb naturalnych od 1 do n przez 3, czyli

$$a_n \equiv 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \pmod 3.$$

Zatem żeby liczba a_n była niepodzielna przez 3 potrzeba i wystarcza, aby zarówno n jak i $n + 1$ nie były podzielne przez 3. Stąd szukane liczby n to wszystkie dodatnie liczby całkowite postaci $3k + 1$, gdzie k jest nieujemną liczbą całkowitą.

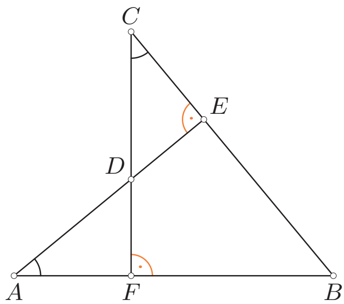
Zadanie 11.

Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym kąt wewnętrzny CDA jest wklęsły. Przypuśćmy, że $\sphericalangle DAB = \sphericalangle BCD$ oraz $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDA - 180^\circ$. Wykaż, że czworokąt $ABCD$ ma dwie pary boków prostopadłych.

Rozwiązanie: Oznaczmy przez E punkt przecięcia prostych AD oraz BC, a przez F punkt przecięcia prostych CD oraz AB (rys. 4). Z warunków zadania mamy

$$\sphericalangle CDE = \sphericalangle CDA - 180^\circ = \sphericalangle ABC \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle DCE = \sphericalangle BAE,$$

więc korzystając z równości sum miar kątów w trójkątach CDE i ABE, uzyskujemy $\sphericalangle DEC = \sphericalangle AEB = 90^\circ$. Analogicznie uzyskujemy $\sphericalangle CFB = 90^\circ$.



rys. 4

Zadanie 12.

Liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają warunek $a + b + c + d = 0$. Udowodnij, że

$$\max(a, b) + \max(a, c) + \max(a, d) + \max(b, c) + \max(b, d) + \max(c, d) \geqslant 0,$$

gdzie $\max(x, y)$ oznacza nie mniejszą spośród liczb x i y.

Rozwiązanie: Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$\max(x, y) \geqslant \frac{1}{2}(x + y),$$

przy czym równość ma miejsce jedynie, gdy $x = y$. Zatem rozważana suma maksimów ograniczona jest z dołu przez liczbę

$$\frac{(a + b) + (a + c) + (a + d) + (b + c) + (b + d) + (c + d)}{2} = \frac{3(a + b + c + d)}{2} = 0.$$

Zadanie 13.

Marek pomyślał o pięciu liczbach rzeczywistych a, b, c, d, e, dodał każde dwie z nich, i zapisał na kartce wartości dziesięciu uzyskanych w ten sposób sum. Następnie Marek przekazał tę kartkę Szymonowi. Czy Szymon, tylko na podstawie zapisanych na kartce dziesięciu liczb, może wywnioskować o jakich pięciu liczbach pomyślał Marek?

Rozwiązanie: Zauważmy, że suma wszystkich dziesięciu liczb zapisanych na kartce to $4(a+b+c+d+e)$. W szczególności Szymon zna wartość sumy $a+b+c+d+e$.

Problem postawiony w zadaniu nie zależy od kolejności liczb a, b, c, d, e. Załóżmy więc bez straty ogólności, że $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e$. Wtedy najmniejszą liczbą na kartce Marka jest $a+b$, drugą najmniejszą liczbą jest zaś $a+c$. Podobnie największą liczbą na kartce jest $d+e$, a drugą największą — $c+e$.

Z powyższych obserwacji wynika, że jeśli Szymon odejmie od sumy $a+b+c+d+e$ najmniejszą oraz największą z liczb napisanych na kartce, to otrzyma liczbę c. Na tej podstawie, znając wartości $a+c$ oraz $c+e$, Szymon wyznacza liczby a oraz e

$$(a+c)-c=a \quad \text{oraz} \quad (c+e)-c=e,$$

a następnie wyznacza liczby b oraz d

$$(a+b)-a=b \quad \text{oraz} \quad (d+e)-e=d.$$

W rezultacie Szymon umie rozpozna liczby a, b, c, d, e pomyślane przez Marka.

Zadanie 14.

Kolejne liczby naturalne od 1 do 100 wypisano od lewej do prawej w pewnej kolejności. Liczbę występującą w tym ciągu nazwiemy *prawostronnie maksymalną*, jeśli jest ona większa od każdej liczby znajdującej się w tym ciągu na prawo od niej. Analogicznie definiujemy liczbę *lewostronnie maksymalną*. Załóżmy, że w rozważanym ciągu jest dokładnie k liczb prawostronnie maksymalnych i dokładnie k liczb lewostronnie maksymalnych. Znajdź największą możliwą wartość k.

Rozwiązanie: Jeśli wypiszemy liczby od 1 do 100 w następujący sposób:

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 48,\ 49,\ 100,\ 50,\ 99,\ 98,\ \ldots,\ 53,\ 52,\ 51,$$

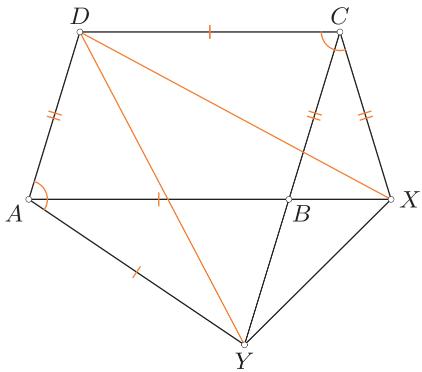
to pierwsze 50 wypisanych liczb stanowi zbiór wszystkich liczb lewostronnie maksymalnych, zaś liczby prawostronnie maksymalne to: 100 oraz liczby od 99 do 51.

Rozważmy teraz dowolny ciąg liczb od 1 do 100. Z uwagi na obecność liczby 100 wśród wypisanych liczb, żadna liczba mniejsza od 100 nie może być jednocześnie lewostronnie i prawostronnie maksymalna. Gdyby jednak liczba k była większa od 50, wtedy co najmniej dwie z liczb od 1 do 100 byłyby jednocześnie lewostronnie i prawostronnie maksymalne. Zatem największa możliwa wartość k równa jest 50.

Zadanie 15.

Dany jest równoległobok $ABCD$, w którym kąt DAB jest ostry. Niech $X \neq B$ będzie punktem na prostej AB spełniającym $XC = BC$. Analogicznie, niech $Y \neq B$ będzie punktem na prostej BC spełniającym $AB = AY$. Udowodnij, że $\sphericalangle DYX = \sphericalangle DXY$.

Rozwiązanie: Uzasadnimy, że trójkąty DAY oraz XCD są przystające (rys. 5).



rys. 5

Z danych równości odcinków oraz z założenia, że czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem, mamy równości długości odpowiednich boków trójkątów DAY oraz XCD

$$AY = AB = CD \quad \text{oraz} \quad CX = CB = AD.$$

Pozostaje wykazać równość miar kątów YAD oraz XCD. Skoro $\sphericalangle ABY = \sphericalangle CBX$, i skoro trójkąty ABY oraz CBX są równoramienne, to mamy $\sphericalangle YAB = \sphericalangle XCB$. Ponadto, ponieważ $ABCD$ jest równoległobokiem, więc także $\sphericalangle DAB = \sphericalangle BCD$. W konsekwencji

$$\sphericalangle YAD = \sphericalangle YAB + \sphericalangle DAB = \sphericalangle XCB + \sphericalangle BCD = \sphericalangle XCD.$$

Wykazaliśmy więc, że trójkąty DAY oraz XCD są przystające (cecha bok–kąt–bok). Stąd $DY = DX$ i w konsekwencji $\sphericalangle DYX = \sphericalangle DXY$.

Zadanie 16.

Ile jest liczb całkowitych dodatnich n mniejszych od 2023, dla których istnieje dodatnia liczba rzeczywista x, taka że $n = x \cdot \lfloor x \rfloor$? Odpowiedź uzasadnij.

Uwaga: $\lfloor x \rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x.

Rozwiązanie: Zauważmy, że jeśli $a > 0$ jest liczbą całkowitą i $n = a^2$, to $n = \lfloor a \rfloor \cdot a$. Rozważać będziemy kolejne liczby od a^2 do a^2+2a (liczba a^2+2a+1 jest już kolejnym kwadratem). Jak się okaże, dokładnie a spośród nich ma żądane przedstawienie.

Przypuśćmy, ze $n = a^2 + b$, dla dodatniej liczby całkowitej $b < a$. Skoro $\frac{b}{a} < 1$, to

$$n = a \cdot \left(a + \frac{b}{a}\right) = \left\lfloor a + \frac{b}{a} \right\rfloor \cdot \left(a + \frac{b}{a}\right).$$

Widzimy zatem, że dla dowolnej liczby całkowitej z przedziału od a^2 do $a^2 + a - 1$ umiemy wskazać odpowiednią liczbę rzeczywistą x spełniającą warunki zadania.

Rozważmy przypadek, gdy $n = a^2 + b$, dla liczby całkowitej b spełniającej warunek $a \leqslant b \leqslant 2a$. Dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ mamy zatem

$$n = a^2 + b > a \cdot (a + 1 - \varepsilon) = \lfloor a + 1 - \varepsilon \rfloor \cdot (a + 1 - \varepsilon) = a^2 + a - a\varepsilon.$$

Stąd dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ mamy

$$\lfloor a + 1 \rfloor \cdot (a + 1) > a^2 + b > \lfloor a + 1 - \varepsilon \rfloor \cdot (a + 1 - \varepsilon)$$

Stąd rozważana liczba n nie może być przedstawiona w postaci $\lfloor x \rfloor \cdot x$. To oznacza, że dla n postaci a^2+b, gdzie $a \leqslant b \leqslant 2a$, nie jest możliwe dobranie liczby x spełniającej warunki zadania.

Pozostało zatem policzyć ile jest takich $n < 2023$, które można zapisać w postaci $a^2 + b$, gdzie b jest dodatnią liczbą całkowitą i $b < a$.

Zauważmy, że największa liczba całkowita c, taka że $c^2 < 2023$, równa jest 44, gdyż $2025 = 45^2$. To oznacza, że liczba a jest mniejsza od 45. Zauważmy, że jeżeli $a = 1$, to $b = 0$, z kolei jeżeli $a = 2$, to $b = 0$ lub $b = 1$, i tak dalej. Jeśli $a = k$, to istnieje k możliwości wyboru b.

Stąd liczba szukanych liczb n równa jest

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 43 + 44 = \frac{44 \cdot 45}{2} = 22 \cdot 45 = 990.$$

Zadanie 17.

Czy można wpisać w każde pole nieskończonej szachownicy pewną dodatnią liczbę całkowitą w taki sposób, aby suma liczb wpisanych w pola w każdego prostokąta rozmiaru $n \times m$ złożonego z nm pól tej szachownicy była podzielna przez $n+m$?

Rozwiązanie: Przypuśćmy nie wprost, że odpowiedź na pytanie postawione w treści zadania jest twierdząca. Niech $N > 1$ będzie liczbą całkowitą.

Zauważmy, że dowolny prostokąt rozmiaru $2 \times (N-1)$ można podzielić na dwa prostokąty rozmiarów $1 \times (N-1)$. Suma liczb wpisanych w pola każdego z tych prostokątów jest podzielna przez N. A zatem także suma liczb wpisanych w prostokąt rozmiaru $2 \times (N-1)$ jest podzielna przez N.

Z drugiej strony, prostokąt rozmiaru $2 \times (N-1)$ można podzielić na prostokąt rozmiaru $2 \times (N-2)$ i prostokąt rozmiaru 2×1. Skoro zarówno suma liczb wpisanych w prostokąt rozmiaru $2 \times (N-1)$ jest podzielna przez N, jak i suma liczb wpisanych w prostokąt rozmiaru $2 \times (N-2)$ jest podzielna przez N, to również suma liczb wpisanych w prostokąt rozmiaru 2×1 jest podzielna przez N.

Uzyskaliśmy sprzeczność, gdyż suma dwóch dodatnich liczb całkowitych nie może być podzielna przez dowolną liczbę całkowitą większą od 1.

Zadanie 18.

Para dodatnich liczb całkowitych (x, y) spełnia równość

$$2x + 4y = \mathrm{NWD}(x, y) + \mathrm{NWW}(x, y).$$

Znajdź wszystkie możliwe wartości ilorazu

$$\frac{\mathrm{NWW}(x, y)}{\mathrm{NWD}(x, y)}.$$

Rozwiązanie: Oznaczmy $\mathrm{NWD}(x, y)$ jako d. Z definicji największego wspólnego dzielnika istnieją względnie pierwsze dodatnie liczby całkowite a, b, takie że

$$x = da \quad \text{oraz} \quad y = db.$$

Skoro a oraz b są liczbami względnie pierwszymi, to

$$\mathrm{NWD}(x, y) = d \cdot \mathrm{NWD}(a, b) = dab.$$

Szukany w treści zadania iloraz jest więc równy ab.

Podstawiając a oraz dab do warunku $2x + 4y = \mathrm{NWD}(x, y) + \mathrm{NWW}(x, y)$, otrzymujemy równość $2da + 4db = d + dab$, którą można przekształcić równoważnie do postaci

$$\begin{aligned} 2a + 4b &= 1 + ab, \\ 7 &= ab - 2a - 4b + 8, \\ 7 &= (a - 4)(b - 2). \end{aligned}$$

Liczby a oraz b są dodatnie, więc wystarczy rozważyć dwie możliwości:

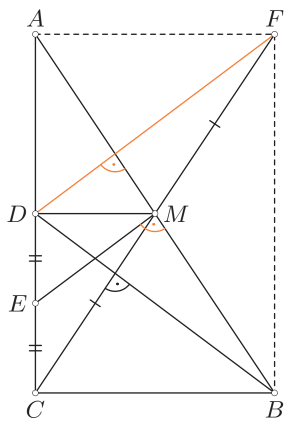
$$\begin{cases} a - 4 = 7, \\ b - 2 = 1 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} a - 4 = 1, \\ b - 2 = 7. \end{cases}$$

Stąd $(a, b) = (11, 3)$ lub $(a, b) = (5, 9)$. Otrzymujemy zatem $ab = 11 \cdot 3 = 33$ lub $ab = 5 \cdot 9 = 45$, czyli jedyne możliwe wartości szukanego ilorazu wynoszą 33 i 45.

Zadanie 19.

Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB = 90^\circ$. Punkt M jest środkiem boku AB, a prosta równoległa do prostej BC i przechodząca przez punkt M przecina prostą AC w punkcie D. Oznaczmy środek odcinka CD przez E. Załóżmy, że proste BD i CM są prostopadłe. Wykaż, że proste EM i AB są prostopadłe.

Rozwiązanie: Niech punkt F będzie odbiciem punktu C względem punktu M (rys. 6). Powstały czworokąt $ACBF$ jest wówczas prostokątem oraz $CM = MF$.



rys. 6

Proste DM i BC są równoległe oraz punkt M jest środkiem boku AB, co oznacza, że punkt D jest środkiem odcinka AC. Zatem z symetrii zauważamy, że prosta DF jest prostopadła do prostej AB, skoro proste BD i CM są prostopadłe.

Punkt E jest środkiem odcinka DC, a punkt M jest środkiem odcinka CF, zatem EM jest linią środkową w trójkącie DCF, czyli jest równoległa do prostej DF. Stąd wynika, że proste EM oraz DF są równoległe, co oznacza z kolei, że proste EM i AB są prostopadłe.

Zadanie 20.

Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite n o tej własności, że w zapisie dziesiętnym liczby n^2 wszystkie cyfry są równe.

Rozwiązanie: Zauważmy, że liczby 1, 4, 9 spełniają założenia zadania. W dalszej części rozwiązania rozważamy liczby co najmniej dwucyfrowe.

Przypomnijmy dwie własności liczb całkowitych, z których będziemy dalej korzystać.

- Cyfrą jedności kwadratu liczby całkowitej może być jedynie 0, 1, 4, 5, 6 lub 9.
- Przy dzieleniu przez 4 kwadrat liczby całkowitej daje resztę 0 lub 1.

Będziemy korzystać również z faktu, że dowolna liczba naturalna daje taką samą resztę z dzielenia przez 4, jak liczba utworzona z dwóch jej ostatnich cyfr. W ten sposób możemy wyeliminować liczby kończące się cyframi 11, 55, 66, 99, gdyż

- liczba kończąca się cyframi 66 daje resztę 2 z dzielenia przez 4,
- liczba kończąca się cyframi 11, 55 lub 99 daje resztę 3 z dzielenia przez 4.

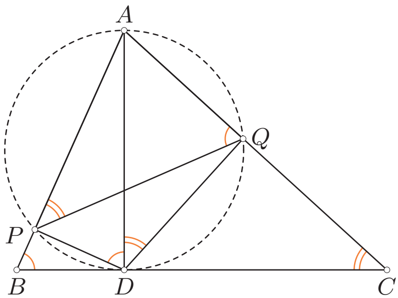
Pozostaje rozważyć kwadraty postaci $44\ldots44$. Zauważmy jednak, że po podzieleniu dowolnej takiej liczby przez liczbę 4, która także jest kwadratem, uzyskujemy liczbę postaci $11\ldots11$. Ta jednak kończy się cyframi 11, więc jak już wiemy nie może być kwadratem. Zatem jedynymi liczbami spełniającymi warunki zadania są 1, 4, 9.

Uwaga. Uzasadnimy, że przy dzieleniu przez 4 kwadrat liczby całkowitej daje resztę 0 lub 1. Kwadrat liczby parzystej jest liczbą podzielną przez 4. Dowolną liczbę nieparzystą można natomiast zapisać w postaci $4k+1$ lub $4k+3$, gdzie k jest liczbą całkowitą. Tymczasem $(4k+1)^2 = 4(4k^2+2k)+1$ oraz $(4k+3)^2 = 4(4k^2+6k)+1$. Zatem kwadrat dowolnej liczby nieparzystej daje przy dzieleniu przez 4 resztę 1.

Zadanie 21.

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Niech D będzie spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka A, a punkty P i Q niech będą rzutami prostokątnymi punktu D odpowiednio na boki AB i AC. Wykaż, że trójkąty APQ i ABC są podobne.

Rozwiązanie: Z racji tego, że punkty P i Q są rzutami punktu D na boki AB i AC, mamy $\sphericalangle DPA = \sphericalangle DQA = 90°$. Na czworokącie $APDQ$ można zatem opisać okrąg.



rys. 7

Wystarczy więc zauważyć, że $\sphericalangle ABC = 90° - \sphericalangle BDP = \sphericalangle PDA = \sphericalangle PQA$, przy czym ostatnia równość wynika z tego, że PDA oraz PQA to kąty wpisane oparte na tym samym łuku. Analogicznie można uzasadnić, że $\sphericalangle ACB = \sphericalangle APQ$. Zatem trójkąty APQ i ABC są podobne na mocy cechy kąt–kąt–kąt.

Zadanie 22.

Znajdź wszystkie liczby całkowite m, które można przedstawić w postaci sumy co najmniej dwóch kolejnych dodatnich liczb nieparzystych.

Rozwiązanie: Wykażemy, że dodatnie liczby całkowite m spełniające warunki zadania to wszystkie liczby podzielne przez 4 oraz wszystkie nieparzyste liczby złożone. Rozważmy przypadki: gdy m jest liczbą parzystą, i gdy m jest liczbą nieparzystą.

Jeżeli m jest liczbą parzystą, to każdy jej rozkład na sumę liczb nieparzystych ma parzyście wiele składników. W szczególności, jeśli m jest sumą parzyście wielu kolejnych dodatnich liczb nieparzystych, to suma każdych kolejnych dwóch składników nieparzystych tej sumy jest podzielna przez 4. Stąd także m jest liczbą podzielną przez 4. Definiujemy liczby całkowite l, k warunkami

$$l = \frac{m+4}{4} \quad \text{oraz} \quad k = \frac{m-4}{4}.$$

Twierdzimy, że liczbę m można przedstawić jako różnicę sumy pierwszych l liczb nieparzystych oraz sumy pierwszych k liczb nieparzystych, czyli w postaci

$$m = (1 + 3 + \ldots + 2l - 1) - (1 + 3 + \ldots + 2k - 1).$$

Korzystamy z faktu, że suma pierwszych n liczb nieparzystych równa jest n^2:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \ldots + (2n - 1) &= \frac{1}{2}(1 + (2n - 1) + 3 + (2n - 3) + \ldots + 1 + (2n - 1)) \\ &= \frac{1}{2}(n \cdot 2n) = n^2. \end{aligned}$$

W ten sposób rozważana przez nas różnica jest rzeczywiście równa m:

$$(1 + 3 + \ldots + 2l - 1) - (1 + 3 + \ldots + 2k - 1) = l^2 - k^2 = (l - k)(l + k) = m.$$

Jeżeli m jest liczbą nieparzystą i jest sumą $l - k$ kolejnych dodatnich liczb nieparzystych, gdzie $l - k > 1$ oraz k, l są nieujemnymi liczbami całkowitymi, to z rozumowania wyżej wnioskujemy, że $m = l^2 - k^2 = (l - k)(l + k)$.

Zatem liczba m mająca żądane przedstawienie jest złożona. Biorąc liczby nieparzyste $p \geqslant q > 1$, spełniające warunek $n = pq$, definiujemy liczby l, k warunkami $l - k = q$ oraz $l + k = p$, uzyskując przedstawienie dowolnej złożonej liczby nieparzystej m w postaci sumy kolejnych $l - k$ dodatnich liczb nieparzystych.

Zadanie 23.

Na obwodzie trójkąta równobocznego o boku $2n$ zaznaczono $6n$ punktów, w tym wierzchołki trójkąta. Każde dwa kolejne zaznaczone punkty są końcami odcinka o długości 1. Spośród zaznaczonych punktów pewne $4n+1$ pomalowano na czerwono. Wykaż, że istnieje trójkąt równoboczny o czerwonych wierzchołkach.

Rozwiązanie: Zauważmy, że zbiór zaznaczonych na obwodzie trójkąta $6n$ punktów możemy rozbić na $2n$ trójek punktów, tak by każda trójka stanowiła zbiór wierzchołków trójkąta równobocznego. Rzeczywiście, jeśli ponumerujemy kolejne zaznaczone punkty jako $P_1, \ldots, P_{6n}$, to każda trójka punktów postaci P_k, P_{2n+k}, gdzie $1 \leqslant k \leqslant 2n$, stanowi wierzchołki trójkąta równobocznego.

Mamy $6n$ zaznaczonych punktów, z czego $4n + 1$ jest pomalowanych na czerwono. Zatem w pewnej z $2n$ trójek wskazanych wyżej wszystkie trzy punkty są pomalowane na czerwono. To zaś oznacza, że istnieje trójkąt równoboczny o wszystkich wierzchołkach pomalowanych na czerwono.

Zadanie 24.

Na obwodzie trójkąta równobocznego o boku $2n$ zaznaczono $6n$ punktów, w tym wierzchołki trójkąta. Każde dwa kolejne zaznaczone punkty są końcami odcinka o długości 1. Spośród zaznaczonych punktów pewne $3n+2$ pomalowano na czerwono. Wykaż, że istnieje trapez równoramienny o czerwonych wierzchołkach.

Rozwiązanie: Parą nazywać będziemy każde dwa zaznaczone punkty, które albo oba są wierzchołkami wyjściowego trójkąta, albo są końcami odcinka równoległego do jednego z boków wyjściowego trójkąta, ale nie leżą na tym samym boku. Powiemy też, że dwie pary mają wspólny *kierunek*, jeśli są równoległe do tego samego boku trójkąta.

Zauważmy, że wszystkich par jest $6n$. Rzeczywiście, mamy po $2n$ par o tym samym kierunku. Odnotujmy też, że jeśli pomalujemy na czerwono dwie pary (zaznaczonych punktów) o tym samym kierunku, to 4 punkty stanowiące te pary wyznaczają trapez równoramienny spełniający warunki zadania.

Wystarczy zatem wykazać, że wśród $4n$ punktów tworzących $2n$ par o tym samym kierunku co najmniej $2n+2$ punktów jest pomalowanych na czerwono. Stąd wynikać będzie, że istnieją dwie pokolorowane pary o tym samym kierunku, wyznaczające odpowiedni trapez równoramienny.

Przypuśćmy więc, że w każdym z trzech zbiorów $4n$ punktów tworzących pary o tym samym kierunku, nie więcej niż $2n+1$ punktów jest pomalowanych. Zauważmy, że każdy zaznaczony punkt należy do dokładnie 2 par i mamy 3 różne kierunki. To oznacza, że łącznie jest pomalowanych co najwyżej

$$\frac{3 \cdot (2n+1)}{2} < \frac{6n+4}{2} = 3n+2$$

zaznaczonych punktów — sprzeczność.

Jak już wykazaliśmy, ta sprzeczność dowodzi tezę zadania.

Zadanie 25.

Niech x, y, z będą liczbami rzeczywistymi, takimi że $x \neq 1$, $y \neq 1$ oraz $x \neq y$. Załóżmy również, że dla pewnej liczby rzeczywistej k spełniony jest warunek.

$$\frac{yz - x^2}{1-x} = \frac{xz - y^2}{1-y} = k.$$

Wykaż, że $k = x + y + z$.

Rozwiązanie: Przypomnijmy znaną obserwację mówiącą, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c, d, takich że $b \neq 0$, $d \neq 0$, $b \neq d$ oraz $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ mamy

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}.$$

Rzeczywiście, warunek $\frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b}$ przekształcamy równoważnie, po przemnożeniu przez $(b-d)b$, do warunku $ab - bc = ab - ad$, równoważnego oczywiście $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Używając powyższej obserwacji w rozwiązywanym zadaniu, uzyskujemy:

$$\frac{yz-x^2}{1-x} = \frac{zx-y^2}{1-y} = \frac{(yz-x^2)-(xz-y^2)}{(1-x)-(1-y)} = \frac{z(y-x)+(y+x)(y-x)}{y-x} = x+y+z.$$

Zadanie 26.

Czy istnieją liczby całkowite a, b, c spełniające warunek $a+b+c=0$, dla których liczba $a^7+b^7+c^7$ jest pierwsza?

Rozwiązanie: Sposób I

Wykażemy, że dla dowolnej dodatniej liczby nieparzystej m liczba $a^m+b^m+c^m$ jest parzysta i różna od ± 2, więc nie jest liczbą pierwszą.

W przypadku, gdy liczby a, b, c są wszystkie parzyste, liczba $a^m+b^m+c^m$ jest podzielna przez 4. Załóżmy zatem, że dokładnie dwie z liczb a, b, c są nieparzyste. Przypuśćmy nie wprost, że liczba $a^m+b^m+c^m$ jest pierwsza. Z uwagi na symetrię możemy założyć, że liczby b, c są nieparzyste. Liczby b^m oraz c^m również są nieparzyste, a ich suma — parzysta. Po dodaniu liczby parzystej a^m uzyskujemy, że liczba $a^m+b^m+c^m$ jest parzysta, czyli jest równa -2 lub 2.

Zauważmy, że żadna z liczb a, b, c nie może być równa 0. Gdyby na przykład $a=0$, to $b+c=0$ i $a^m+b^m+c^m = 0+b^m-b^m \neq \pm 2$.

Przypomnijmy też, że dla dowolnej liczby naturalnej n mamy

$$x^{2n+1}+y^{2n+1} = (x+y)(x^{2n}-x^{2n-1}y+x^{2n-2}y^2-\ldots-xy^{2n-1}+y^{2n}).$$

Z wzoru tego wynika, że istnieją liczy naturalne p, q, r, takie że

$$a^m+b^m+c^m = a^m+(b+c)p = b^m+(a+c)q = c^m(a+b)r,$$

co wobec równości $b+c=-a$, $a+c=-b$ oraz $a+b=-c$ pociąga za sobą

$$a^m+b^m+c^m = a^m-ap = b^m-bq = c^m-cr.$$

Powyższe równości oznaczają, że liczba $a^m+b^m+c^m$ jest podzielna zarówno przez a, jak i przez b oraz c. Skoro jednak mamy $a^m+b^m+c^m=\pm 2$, a liczby b, c są nieparzyste, to $b=\pm 1$, $c=\pm 1$. Stąd zaś $a=\pm 2$. Sprawdzamy bezpośrednio, że żadna z tych możliwości nie może mieć miejsca, jeśli $a+b+c=0$ oraz $a^m+b^m+c^m=\pm 2$.

Sposób II

Podobnie jak wyżej wnioskujemy, że $a^7+b^7+c^7$ jest liczbą parzystą. Z małego twierdzenia Fermata wynika zaś przystawanie

$$a^7+b^7+c^7 \equiv a+b+c \equiv 0 \pmod 7.$$

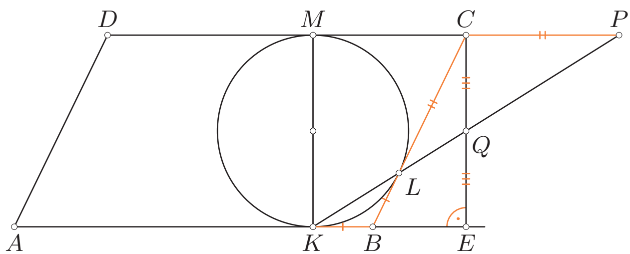
Stąd liczba $a^7+b^7+c^7$ jest podzielna zarówno przez 2, jak i przez 7. Nie jest to więc liczba pierwsza.

Zadanie 27.

Okrąg ω jest styczny do boków AB, BC i CD równoległoboku $ABCD$ odpowiednio w punktach K, L i M. Wykaż, że odcinek KL przechodzi przez środek odcinka łączącego punkt C z rzutem prostopadłym punktu C na prostą AB.

Rozwiązanie: W rozwiązaniu korzystamy z tzw. twierdzenia o czapeczce mówiącego, że jeśli punkt X leży na zewnątrz okręgu ω oraz jeśli Y, Z są punktami styczności prostych przechodzących przez punkt X i stycznych do okręgu ω, wówczas $XY = XZ$. Jest to natychmiastowa konsekwencja faktu, że jeśli O jest środkiem okręgu ω, to trójkąty prostokątne XYO oraz XZO są przystające.

Niech E będzie rzutem prostopadłym punktu C na prostą AB. Niech P oraz Q będą punktami przecięcia prostej KL odpowiednio z prostymi CD oraz CE.



rys. 8

Z faktu przytoczonego wyżej wynika, że $CM = CL$, oraz że $BK = BL$, czyli trójkąt BKL jest równoramienny. Proste AB i BC są równoległe, więc $\sphericalangle BKL = \sphericalangle LPC$.

Kąty BLK oraz PLC są wierzchołkowe, więc trójkąt CPL jest równoramienny i stąd otrzymujemy $PC = CL$. Łącząc uzyskane równości otrzymujemy

$$CM = CL = CP.$$

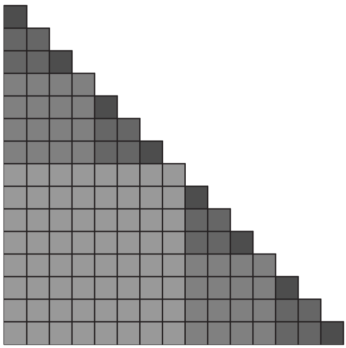
W rezultacie punkt C jest środkiem odcinka PM. Do tego odcinki CE i KM są równoległe i równej długości, więc odcinek CQ jest linią środkową w trójkącie PKM, skąd mamy

$$CQ = \frac{1}{2}KM = \frac{1}{2}CE.$$

Zadanie 28.

Nazwijmy *schodami* figurę powstałą przez usunięcie z szachownicy 15×15 wszystkich pól, które są w pełni nad jej przekątną, tzn. tych pól, które znajdują się w i-tym wierszu i j-tej kolumnie szachownicy, dla $j > i$. Dowolną szachownicę rozmiaru $k \times k$, dla pewnego naturalnego k, nazwijmy natomiast *kwadratem*. Wyznacz najmniejszą liczbę kwadratów, na które rozciąć można schody.

Rozwiązanie: Odpowiedź na pytanie postawione w zadaniu to 15. Zauważmy, że możliwe jest wypełnienie schodów 15 kwadratami:



rys. 9

Twierdzimy, że nie jest możliwe rozcięcie schodów na mniej niż 15 kwadratów.

Rozważmy stopnie naszych schodów, czyli 15 pól znajdujących się na przekątnej pierwotnej szachownicy (15 pól, na które byśmy stanęli wchodząc po schodach). Wycinając z szachownicy kwadrat, możemy w nim zawrzeć nie więcej niż 1 z 15 takich stopni. To oznacza, że kwadratów, na które można rozciąć schody, jest co najmniej 15.

Zadanie 29.

Liczbę naturalną n nazwiemy *mocarną*, jeśli jest ona równa m^2+1, dla pewnej liczby całkowitej m. Wykaż, że istnieje nieskończenie wiele liczb mocarnych k których jedynymi dodatnimi dzielnikami mocarnymi są liczby 1 oraz k.

Rozwiązanie: Załóżmy nie wprost, że zbiór M liczb mocarnych spełniających warunki zadania jest skończony. Największy element tego zbioru oznaczmy przez n_k. Oczywiście $n_k > 1$, gdyż 2 jest liczbą mocarną. Rozważmy liczbę mocarną

$$n = ((1^2+1)(2^2+1)(3^2+1)\dots(n_k^2+1))^2+1.$$

Skoro $n > n_k$, to liczba n nie należy do zbioru M. Liczba ta ma więc najmniejszy dzielnik mocarny różny od 1 oraz n, który oznaczymy przez a. W szczególności liczba a jest mocarna i nie ma dzielników mocarnych różnych od 1 oraz a. W przeciwnym przypadku dzielniki te byłyby również dzielnikami mocarnymi n, mniejszymi od a. Stąd liczbę a należy do zbioru M. Zauważmy jednak, że $a > n_k^2+1$, gdyż każda liczba mocarna od 2^2+1 do n_k^2+1 daje przy dzieleniu przez n resztę 1. Uzyskujemy zatem sprzeczność z wyborem n_k jako największego elementu zbioru M.

Zadanie 30.

Każdych dwóch nieznajomych w pewnym gronie n osób ma w nim wspólnego znajomego. Wykaż, że najmniejsza możliwa liczba par znajomych w tym gronie wynosi $n-1$.

Rozwiązanie: Przykładowa sytuacja, w której liczba par znajomych w gronie n osób spełniającym warunki zadania wynosi $n-1$, zachodzi w przypadku, gdy pewna osoba zna $n-1$ osób, a pozostałe osoby nie znają się. Wystarczy więc wykazać, że przy zachowaniu warunków zadania nie może być mniej niż $n-1$ par znajomych.

Wybierzmy więc dowolną osobę X i oznaczmy przez k liczbę jej znajomych. Wtedy, zgodnie z warunkami zadania, każda z pozostałych $n-k-1$ osób (poza X oraz jej znajomymi) musi znać któregoś ze znajomych X. Otrzymujemy zatem co najmniej $n-k-1$ par znajomych, wśród których nie ma osoby X. W połączeniu z k parami zawierającymi X daje nam to co najmniej $n-1$ par znajomych w grupie.

Zadanie 31.

Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku 3. Na odcinkach AB i AD leżą odpowiednio takie punkty E i F, że $AE = AF = 2$. Wyznacz długość cięciwy okręgu opisanego na trójkącie AEF zawartej w prostej BD.

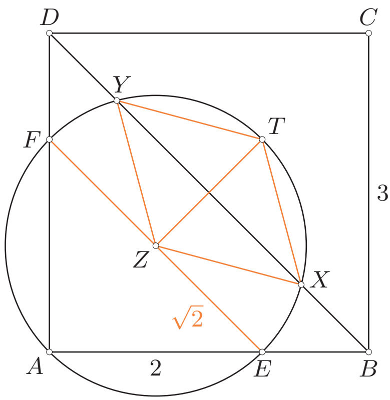
Rozwiązanie: Oznaczmy tę cięciwę jako XY, przyjmując $BX < BY$. Niech punkt Z będzie środkiem odcinka EF, a punkt T — obrazem punktu Z w symetrii względem prostej BD.

Zauważmy, że punkt Z jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie AEF, jako środek przeciwprostokątnej. Co więcej, trójkąty AEF oraz ABD są prostokątne równoramienne, więc proste EF oraz BD są równoległe. Stąd wynika, że punkty A, Z, T leżą na prostej prostopadłej do prostej BD.

Środek odcinka ZT leży na prostej BD, z czego wynika, że $AZ = ZT$ i punkt T leży na okręgu opisanym na trójkącie AEF. Zatem mamy równości $ZX = ZT = ZY$, oraz poprzez symetrię $YT = ZY = ZX = XT$.

W konsekwencji trójkąty ZXT i ZYT są przystającymi trójkątami równobocznymi o boku równym promieniowi okręgu. Cięciwa XY ma długość równą dwukrotności wysokości każdego (dowolnego) z tych trójkątów. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, uzyskujemy $AE^2 + AF^2 = EF^2$, czyli $EF = 2\sqrt{2}$, więc promień okręgu wynosi $\sqrt{2}$. Stąd

$$XY = 2 \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}.$$



rys. 10

Zadanie 32.

W rombie $ABCD$ kąt przy wierzchołku B ma miarę 120°. Punkty E i F znajdują się odpowiednio na bokach AB i BC, przy czym $\measuredangle EDF = 30^\circ$. Wykaż, że środek okręgu opisanego na trójkącie EFD leży na przekątnej BD.

Rozwiązanie: Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie EFD. Korzystając z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym opartych na tym samym łuku okręgu, uzyskujemy

$$\measuredangle EOF = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ.$$

W rezultacie

$$\measuredangle ABC + \measuredangle EOF = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ,$$

skąd stwierdzamy, że na czworokącie $EBFO$ można opisać okrąg.

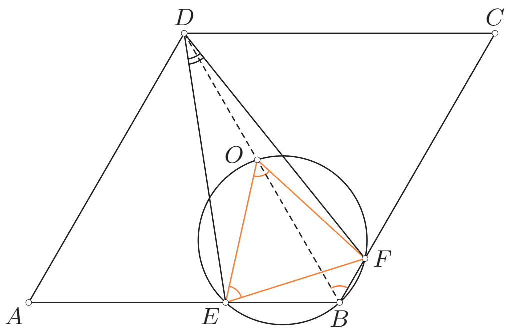
Równości promieni $EO = OF$ implikują, że EOF jest trójkątem równobocznym, zatem

$$\measuredangle OEF = \measuredangle OFE = 60^\circ.$$

Teraz wystarczy zauważyć, że na mocy twierdzenia o kącie wpisanym oraz z tego, że przekątne rombu są dwusiecznymi jego kątów wewnętrznych mamy

$$\measuredangle OBF = \measuredangle OEF = 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = \frac{1}{2}\measuredangle ABC = \measuredangle DBC,$$

czyli punkty D, O i B są współliniowe.



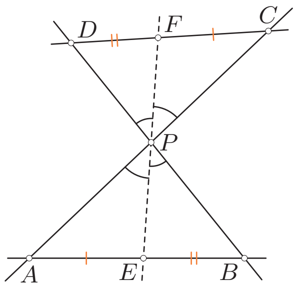
rys. 11

Zadanie 33.

Na płaszczyźnie dane są wielokąt wypukły W oraz punkt P znajdujący się we wnętrzu W. Załóżmy, że dowolna prosta przechodząca przez punkt P dzieli obwód wielokąta W na dwie łamane o równych długościach. Wykaż, że wielokąt W jest środkowosymetryczny.

Rozwiązanie: Rozważmy dowolny punkt A na obwodzie wielokąta W, i niech C będzie drugim punktem przecięcia prostej AP z tym obwodem. Nietrudno zauważyć, że znajdziemy takie punkty B i D na obwodzie W, że punkty B, P, D są współliniowe i odcinki AB i CD są zawarte w pewnych krawędziach W. Rzecz jasna mamy $AB = CD$, bo inaczej warunki zadania nie byłyby spełnione — prosta AC lub BD nie dzieliłaby obwodu wielokąta W na połowy.

Poprowadźmy dwusieczne kątów APB i CPD, a ich punkty przecięcia z odcinkami AB i CD nazwijmy odpowiednio E i F. Podobnie jak wcześniej, z warunków zadania uzyskujemy, że $AE = CF$ i $EB = FD$.



rys. 12

Łącząc te równości z twierdzeniem o dwusiecznej uzyskujemy, że

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AE}{EB} = \frac{CF}{FD} = \frac{CP}{PD}.$$

W rezultacie trójkąty APB i CPD są podobne (cecha bok–kąt–bok). Skoro dodatkowo mamy $AB = CD$, to trójkąty te są w istocie przystające. W szczególności, $AP = PC$, skąd wynika, że punkt C jest obrazem punktu A w symetrii środkowej względem punktu P. Zatem odbicie dowolnego punktu z obwodu W względem P również leży na obwodzie W, skąd dostajemy tezę.

Uwaga. Figurę W nazywamy środkowosymetryczną, gdy istnieje taki punkt S, że obraz każdego punktu W w symetrii względem punktu S należy do W.

Zadanie 34.

Janosik ponumerował wierzchołki pewnego sześcianu liczbami $1, 2, \ldots, 8$, a następnie zapisał na każdej krawędzi tego sześcianu sumę liczb znajdujących się na jej końcach. Czy jest możliwe, aby wszystkie liczby zapisane na krawędziach były parami różne?

Rozwiązanie: Największa możliwa wartość zapisana na krawędzi sześcianu równa jest $8 + 7 = 15$, a najmniejsza możliwa wartość wynosi $1 + 2 = 3$. W rezultacie możliwe jest zapisanie na krawędziach sześcianu jedynie jednej z 13 wartości.

Wykażemy, że nie jest możliwe, by każda z liczb 3, 4, 5, 6 wystąpiła na pewnej krawędzi sześcianu. Przypuśćmy nie wprost, że każda z nich się pojawia. Oznacza to, że Janosik nadał liczby 1 i 2 wierzchołkom połączonym krawędzią — inaczej nie istniałaby krawędź o wartości 3. Podobnie wierzchołki ponumerowane liczbami 1 oraz 3 mają wspólną krawędź o wartości 4. Z tego wynika, że wierzchołki ponumerowane liczbami 2 oraz 3 nie są połączone krawędzią, więc żeby powstała krawędź o wartości 5, wierzchołek o numerze 4 musi być połączony krawędzią z wierzchołkiem o numerze 1. Z tego zaś wynika, że wierzchołek 4 nie jest połączony krawędzią z wierzchołkiem o numerze 2. Skoro jednak mamy na pewnej krawędzi wartość 6, to wierzchołek 1 musi mieć wspólną krawędź również z wierzchołkiem 5, co oznacza, że jeden wierzchołek sześcianu połączony jest krawędziami z czterema innymi wierzchołkami. Uzyskaliśmy sprzeczność.

Analogicznie wykluczamy przypadek jednoczesnego wystąpienia krawędzi z liczbami 12, 13, 14, 15. Zatem spośród 13 możliwych wartości liczb na krawędziach faktycznie może pojawić się tylko 11. Jednakże krawędzi jest 12, więc któraś liczba będzie musiała się powtórzyć.

Zadanie 35.

Liczby rzeczywiste x, y spełniają równość $(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1}) = 1$. Wyznacz wartość liczby $x + y$.

Rozwiązanie: Żadna z liczb $x^2 + \sqrt{x^2+1}$ oraz $y^2 + \sqrt{y^2+1}$ nie jest równa zero, gdyż ich iloczyn jest niezerowy. Zatem

$$x + \sqrt{x^2+1} = \frac{1}{y + \sqrt{y^2+1}} = \frac{\sqrt{y^2+1} - y}{y^2 + 1 - y^2} = \sqrt{y^2+1} - y,$$

czyli $x + y = \sqrt{y^2+1} - \sqrt{x^2+1}$. Analogicznie, zamieniając role x i y, uzyskujemy równość $x + y = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{y^2+1}$. Dodając te równości dostajemy $2(x+y) = 0$. W rezultacie liczba $x + y$ jest równa 0.

Zadanie 36.

Na nieskończonej szachownicy złożonej z pól rozmiaru 1×1 położono sześcian rozmiaru $1 \times 1 \times 1$ tak, by jego podstawa pokrywa dokładnie jedno pole szachownicy. Na górnej ścianie sześcianu (przeciwległej do położonej na szachownicy) napisana jest litera A. W dowolnym momencie możemy obrócić sześcian na sąsiednie pole szachownicy w taki sposób, żeby krawędź sześcianu przylegająca do granicy między polami nie oderwała się od szachownicy podczas obrotu. Czy po pewnej liczbie takich obrotów sześcian może znaleźć się na polu sąsiadującym z polem, na który został pierwotnie położony, i być ułożonym tak, by na górnej ścianie litera A zorientowana była w tym samym kierunku jak na początku?

Rozwiązanie: Odpowiedź jest negatywna. Załóżmy nie wprost, że odpowiedź jest przeciwna. Pokolorujmy każdy punkt kratowy rozważanej przez nas nieskończonej szachownicy (tzn. wierzchołek pola rozmiaru 1×1) na biało lub czarno tak, by każde dwa sąsiednie punkty kratowe (połączone krawędzią pola) miały różne kolory.

Kolorujemy również na biało lub czarno każdy punkt kratowy na płaszczyźnie równoległej do szachownicy leżącej nad nią w odległości 1 tak, by nad każdym dotychczas pokolorowanym punktem wyjściowej szachownicy znajdował się (w odległości 1) punkt, który otrzymał kolor przeciwny do punktu pod nim.

Zauważmy, że gdy umiejscowimy nasz sześcian na nieskończonej szachownicy, to cztery jego wierzchołki będą w białych punktach, a pozostałe cztery — w czarnych. Bez straty ogólności możemy więc założyć, że po położeniu sześcianu na nieskończonej szachownicy przy lewej nóżce litery A jest czarny punkt kratowy.

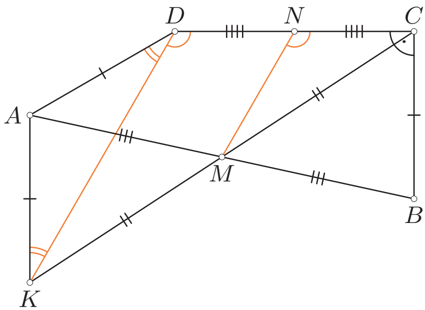
Zauważmy dalej, że gdy obracamy sześcian zgodnie z warunkami zadania, wtedy te wierzchołki sześcianu, które były w białych punktach, przechodzą również na punkty białe, a te wierzchołki, które były czarne, przechodzą na punkty czarne.

Zauważmy wreszcie, że gdy po pewnej liczbie obrotów sześcian znajduje się na polu sąsiadującym z polem, na którym sześcian ten był pierwotnie położony, to w dalszym ciągu przy lewej nóżce litery A znajduje się punkt czarny. To jednak oznacza, że litera A jest zorientowana inaczej niż na początku. Uzyskaliśmy sprzeczność.

Zadanie 37.

Dany jest czworokąt $ABCD$ spełniający warunki $\sphericalangle BCD = 90^\circ$, $\sphericalangle CDA = 150^\circ$ oraz $BC = AD$. Punkty M i N są środkami odpowiednio boków AB i CD. Wyznacz miarę kąta między prostymi MN i CD.

Rozwiązanie: Niech punkt K będzie obrazem punktu C w symetrii względem punktu M. Skoro $AM = MB$, to czworokąt $ACBK$ jest równoległobokiem, skąd $AK = BC = AD$. W szczególności trójkąt ADK jest równoramienny.



rys. 13

Skoro czworokąt $ACBK$ jest równoległobokiem, to $\sphericalangle KAB = \sphericalangle ABC$ oraz:

$$\sphericalangle KAD = \sphericalangle BAD + \sphericalangle KAB = \sphericalangle BAD + \sphericalangle ABC = 360^\circ - 150^\circ - 90^\circ = 120^\circ.$$

Zauważmy wreszcie, że proste DK i MN są równoległe, gdyż MN jest linią środkową w trójkącie DCK. Zatem proste MN i CD przecinają się pod kątem

$$\sphericalangle DNM = 180^\circ - \sphericalangle CDK = \sphericalangle ADK + 180^\circ - \sphericalangle CDA = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ.$$

Zadanie 38.

Niech A będzie dowolnym zbiorem n parami różnych dodatnich liczb całkowitych. Wykaż, że nie więcej niż $n-1$ różnych potęg dwójki może być zapisane w postaci sumy dwóch różnych elementów zbioru A.

Rozwiązanie: Przyjmijmy, że elementy zbioru A są postaci $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Załóżmy, że istnieje liczba całkowita x, taka że dla pewnych liczb $1 \leqslant i < j \leqslant n$ mamy $a_i + a_j = 2^x$. Zakładając bez straty ogólności, że $a_i \geqslant a_j$, mamy $2^{x-1} \leqslant a_i < 2^x$.

Wnioskujemy stąd, że jeśli suma różnych elementów ze zbioru A jest równa 2^x, to jeden z tych elementów należy do przedziału $\left[2^{x-1}, 2^x\right)$. Zauważmy dodatkowo, że jeśli $x \neq y$ są różnymi liczbami całkowitymi, dla których liczby 2^x, 2^y można przedstawić w postaci sum różnych elementów A, wtedy przedziały $[2^{x-1}, 2^x)$ oraz $[2^{y-1}, 2^y)$ są rozłączne. Oznacza to, że element zbioru A może tylko raz być większym ze składników sumy elementów zbioru A, która jest potęgą dwójki. Wśród owych większych składników nie występuje natomiast najmniejszy element zbioru A. W rezultacie różnych potęg liczby 2, które można przedstawić w postaci sumy różnych elementów zbioru A, jest co najwyżej $n-1$.

Zadanie 39.

Wykaż, że 6 jest najmniejszą liczbą naturalną n spełniającą następujący warunek: „W przedziale $(-1,1)$ istnieją liczby rzeczywiste $x_1, \ldots, x_n$ o sumie równej 0 i sumie kwadratów równej 4."

Rozwiązanie: Załóżmy, że dla pewnego n istnieją liczby rzeczywiste $x_1, \ldots, x_n$ o sumie równej zero i sumie kwadratów równej 4. Możemy założyć, że liczby x_i są niezerowe, dla $1 \leqslant i \leqslant n$, skoro szukamy najmniejszego możliwego n.

Równość $x_1 + \ldots + x_n = 0$ możemy przekształcić do takiej postaci, by z jednej strony znalazły się jedynie składniki dodatnie, a z drugiej strony liczby przeciwne do składników ujemnych. Przykładowo, dla $n=8$ możemy przekształcić równość

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

do równości, w której po obydwu stronach są liczby dodatnie

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = -\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Zauważmy, że po obydwu stronach uzyskanej równości znajdują się w istocie wartości bezwzględne oryginalnych składników $x_1, \ldots, x_n$.

Dla dowolnej liczby rzeczywistej x z przedziału $(-1,1)$ zachodzi nierówność $x^2 \leqslant |x|$. Co więcej, dla dowolnych dwóch liczb x, y z przedziału $(-1,1)$ mamy $|x|+|y|<2$.

W szczególności, dla $n \leqslant 5$, po dokonaniu operacji wyżej, z jednej ze stron tak przekształconego warunku $x_1 + \ldots + x_n = 0$ znajdą się nie więcej niż 2 składniki, których suma jest, jak już wiemy, mniejsza od 2. Oznacza to, że również suma wyrazów po drugiej stronie równości jest mniejsza od 2. A zatem suma wyrazów po obydwu stronach równości jest mniejsza od 4. Stąd dla $n \leqslant 5$ mamy:

$$4 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| < 4,$$

co jest niemożliwe. Widzimy więc, że liczba n jest równa co najmniej 6.

Dla $n=6$ można przyjąć $x_1 = x_2 = x_3 = \sqrt{\frac{2}{3}}$ oraz $x_4 = x_5 = x_6 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$. Wówczas

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4.$$

Zadanie 40.

Dla jakich dodatnich liczb całkowitych n możemy rozbić zbiór ułamków

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n-1}{n}\right\}$$

na takie dwa rozłączne podzbiory, że iloczyny elementów tych podzbiorów są równe?

Rozwiązanie: Załóżmy, że dla pewnej dodatniej liczby całkowitej n możemy dokonać rozbicia zbioru ułamków opisanego w zadaniu. Jeżeli oznaczymy wspólną wartość iloczynu elementów tych podzbiorów jako A, to uzyskamy równość

$$A^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}.$$

Zauważmy, że A jest liczbą wymierną, gdyż iloczyn liczb wymiernych jest liczbą wymierną. Warunek $A = \frac{1}{\sqrt{n}}$ oznacza więc, że liczba n jest kwadratem liczby całkowitej. Wykażemy, że dla każdego kwadratu żądane rozbicie jest możliwe.

Niech $n = k^2$, wówczas poszukiwanym przez nas rozbiciem jest:

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{k-1}{k}\right\} \quad \text{oraz} \quad \left\{\frac{k}{k+1}, \frac{k+1}{k+2}, \ldots, \frac{n-1}{n}\right\},$$

gdyż

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{k-1}{k} = \frac{1}{k} = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{k+1}{k+2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-1}{n}.$$

Zadanie 41.

Znajdź wszystkie pary (p, q) liczb pierwszych, dla których $p + q = (p - q)^3$.

Rozwiązanie: Zauważmy najpierw, że $p > q$. W przeciwnym wypadku po lewej stronie równości $p + q = (p - q)^3$ znajduje się liczba dodatnia, a po lewej — liczba ujemna lub zero.

Rozważmy reszty z dzielenia przez 3 dawane przez liczby

$$p + q, \quad p - q, \quad (p - q)^3.$$

Zauważmy, ze sześcian liczby całkowitej n daje taką samą resztę z dzielenia przez 3, co sama liczba n. Wynika to choćby z małego twierdzenia Fermata, ale także z prostego rachunku algebraicznego rozbijającego problem na trzy przypadki.

- Jeśli $n = 3k$, dla pewnej liczby całkowitej k, to $n^3 = 27k^3$.
- Jeśli $n = 3k+1$, to $(3k+1)^3 = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1 = 3(9k^3 + 9k^2 + 3k) + 1$.
- Jeśli $n = 3k+2$, to $(3k+2)^3 = 27k^3+54k^2+18k+8 = 3(9k^3+18k^2+6k+2)+2$.

Z rozumowania tego wynika, że liczby $(p-q)^3$, $p-q$ oraz $p+q$ dają taką samą resztę z dzielenia przez 3. W szczególności liczba $(p+q)-(p-q) = 2q$ jest podzielna przez 3. Skoro q jest liczbą pierwszą, to $q = 3$.

Wiemy już, że $p > q$. Dla $p = 5$ mamy $5+3 = 2^3 = (5-3)^3$, a dla $p \geqslant 7$ mamy

$$(p-3)^2 - (p+3) = p^2 - 7p + 6 = (p-6)(p-1) > 0,$$

a stąd tym bardziej $(p-3)^3 > p+3$.

Jedyną parą (p, q) liczb pierwszych spełniających warunki zadania jest zatem $(5, 3)$.

Zadanie 42.

Niech (a_n), (b_n) będą ciągami dodatnich liczb całkowitych spełniającymi warunek

$$a_n + b_n\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^n,$$

dla wszystkich całkowitych dodatnich n. Wykaż, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n liczby a_n i b_n są względnie pierwsze.

Rozwiązanie: Mamy $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ oraz $b_1 = 1$, $b_2 = 2$. Jest wiec jasne, że $\mathrm{NWD}(a_1, b_1) = \mathrm{NWD}(a_2, b_2) = 1$. Zauważmy dalej, że

$$a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2} = (a_n + b_n\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) = (a_n + 2b_n) + (a_n + b_n)\sqrt{2},$$

co oznacza, że obydwa rozważane ciągi związane są rekurencjami:

$$a_{n+1} = a_n + 2b_n, \quad b_{n+1} = a_n + b_n.$$

Załóżmy nie wprost, że podzbiór zbioru liczb naturalnych złożony z takich n, że $\mathrm{NWD}(a_n, b_n) \neq 1$ jest niepusty. Zbiór ten ma zatem element najmniejszy $n > 1$. Warunek minimalności mówi że $\mathrm{NWD}(a_{n-1}, b_{n-1}) = 1$. Jednak na mocy równości $\mathrm{NWD}(x+y, y) = \mathrm{NWD}(x, x+y) = \mathrm{NWD}(x, y)$, zachodzących dla dowolnych niezerowych liczb całkowitych x, y, uzyskujemy sprzeczność z założeniem $\mathrm{NWD}(a_n, b_n) \neq 1$:

$$\mathrm{NWD}(a_n, b_n) = \mathrm{NWD}(a_{n-1} + 2b_{n-1}, a_{n-1} + b_{n-1}) = \mathrm{NWD}(b_{n-1}, a_{n-1}) = 1.$$

Zadanie 43.

Niech p będzie dowolną liczbą pierwszą. Wykaż, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, że liczba całkowita a_n postaci

$$a_n = n^1 + (n-1)^2 + (n-2)^3 + \ldots + 3^{n-2} + 2^{n-1} + 1^n$$

daje przy dzieleniu przez p resztę 2023.

Rozwiązanie: Aby wyznaczyć przykładową liczbę n spełniającą warunki zadania rozważymy najpierw liczbę $a_{(p-1)p}$.

Ustalmy niezerową resztę a z dzielenia przez p i rozważmy wszystkie potęgi stanowiące składniki liczby $a_{(p-1)p}$, których podstawy dają resztę a z dzielenia przez p. Suma tych składników, którą oznaczymy przez s_a, to

$$s_a = a^{p(p-1)+1-a} + (a+p)^{p(p-1)+1-p-a} + \ldots + (a+p(p-2))^{p+1-a}.$$

Wszystkie podstawy tych potęg dają resztę a z dzielenia przez p, natomiast kolejne wykładniki dają wszystkie możliwe reszty przy dzieleniu przez $p-1$, przy czym każdą resztę dają dokładnie raz. Zatem z małego twierdzenia Fermata

$$s_a \equiv 1 + a + a^2 + \ldots + a^{p-1} \pmod{p}.$$

Skoro $(1 + a + a^2 + \ldots + a^{p-1})(a-1) = a^{p-1} - 1$, to ponownie korzystając z małego twierdzenia Fermata, stwierdzamy, że

- $s_a \equiv 0 \pmod{p}$, dla $1 < a \leqslant p-1$,
- $s_1 = p - 1$.

Zatem

$$a_{p(p-1)} = s_1 + \ldots + s_{p-1} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Wreszcie zauważmy, że jeśli dla pewnych dodatnich liczb całkowitych x, y, w, z mamy

$$x \equiv y \mod p(p-1) \quad \text{oraz} \quad w \equiv z \mod p(p-1),$$

to

$$x^w \equiv y^z \pmod{p}.$$

Stąd łatwo dostać

$$a_{kp(p-1)} \equiv k \cdot a_{p(p-1)} \equiv -k \pmod{p},$$

czyli szukaną liczbą jest na przykład $n = 2023(p-1) \cdot (p-1)p$.