II Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne Juniorów

Zawody indywidualne
(wtorek, 14 maja 2013 r.)

1. Wyznacz wszystkie pary (x,y) liczb całkowitych, dla których spełniona jest równość

$$\sqrt{x-\sqrt{y}}+\sqrt{x+\sqrt{y}}=\sqrt{xy}.$$

2. Każdą liczbę całkowitą dodatnią należy pokolorować na czerwono lub zielono w taki sposób, że spełnione są następujące dwa warunki:

- Niech n będzie dowolną czerwoną liczbą. Suma dowolnych n (niekoniecznie różnych) czerwonych liczb jest czerwona.
- Niech m będzie dowolną zieloną liczbą. Suma dowolnych m (niekoniecznie różnych) zielonych liczb jest zielona.

Wyznacz wszystkie takie pokolorowania.

3. Pięciokąt $ABCDE$ jest wpisany w okrąg oraz $AB=BC=CD$. Odcinki AC i BE przecinają się w punkcie K, a odcinki AD i CE przecinają się w punkcie L. Udowodnij, że $AK=KL$.

4. Wyznacz największą dwucyfrową liczbę d o następującej własności: dla dowolnej sześciocyfrowej liczby $\overline{aabbcc}$ liczba d jest dzielnikiem liczby $\overline{aabbcc}$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba d jest dzielnikiem odpowiadającej jej trzycyfrowej liczby $\overline{abc}$.

Uwaga. Cyfry $a\neq 0$, b i c nie muszą być różne.

5. Punkt M jest środkiem boku AB trójkąta ostrokątnego ABC. Punkt P leży na odcinku AB, a punkty S_1 i S_2 są środkami okręgów opisanych odpowiednio na trójkątach APC i BPC. Wykaż, że środek odcinka S_1S_2 leży na symetralnej odcinka CM.

(*version: Polish*)

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego