# 7th Czech–Polish–Slovak Junior Mathematical Competition

## Team contest

(Tuesday, 22 May 2018)

**1.** Pro přirozená čísla $a$, $b$, $c$ platí

$$(a+b+c)^2 \mid ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+3abc.$$

Dokažte, že

$$(a+b+c) \mid (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2.$$

*Uwaga.* Rozwiązanie tego zadania powinno być napisane po słowacku lub po węgiersku.

**2.** Daný je pravouhlý trojuholník $ABC$ s preponou $AB$. Nech $K$ je ľubovoľný vnútorný bod trojuholníka $ABC$ a body $L$, $M$ sú obrazy bodu $K$ v osových súmernostiach postupne podľa priamok $BC$, $AC$. Určte všetky možné hodnoty výrazu $S_{ABLM}/S_{ABC}$, pričom $S_{XY\ldots Z}$ označuje obsah mnohouholníka $XY\ldots Z$.

*Uwaga.* Rozwiązanie tego zadania powinno być napisane po czesku.

**3.** Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste $r$ o następującej własności: Jeżeli liczby rzeczywiste $a$, $b$, $c$ spełniają nierówność $|ax^2+bx+c| \le 1$ dla każdego $x \in \langle -1, 1\rangle$, to spełniają również nierówność $|cx^2+bx+a| \le r$ dla każdego $x \in \langle -1, 1\rangle$.

*Poznámka.* Riešenie tejto úlohy musí byť napísané v češtine.

**4.** Přímka procházející středem $M$ rovnostranného trojúhelníku $ABC$ protíná jeho strany $BC$ a $CA$ po řadě v bodech $D$ a $E$. Kružnice opsané trojúhelníkům $AEM$ a $BDM$ se kromě bodu $M$ dále protínají v bodě $P$. Dokažte, že střed kružnice opsané trojúhelníku $DEP$ leží na ose úsečky $AB$.

*Poznámka.* Riešenie tejto úlohy musí byť napísané v poľštine.

**5.** Okolo okrúhleho stola sedí $2n$ ľudí ($n \ge 2$), pričom každý človek sa pozná s oboma svojimi susedmi a presne oproti nemu sedí človek, s ktorým sa nepozná. Dokážte, že ľudí možno presadiť tak, že každý sa bude poznať práve s jedným zo svojich dvoch susedov.

*Poznámka.* Řešení této úlohy odevzdejte v polském jazyce.

**6.** Dodatnie liczby rzeczywiste $a$, $b$ są takie, że $a^3+b^3=2$. Wykaż, że zachodzi nierówność

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \ge 2(a^2-a+1)(b^2-b+1).$$

*Poznámka.* Řešení této úlohy odevzdejte ve slovenském nebo maďarském jazyce.

*Time: 300 min*