Matematyczna Olimpiada Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

Kwadrat

Nr 10
wrzesień 2013
ISSN 2300-0708
Gazetka Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Tradycyjny wstęp

Z chwilą wybrzmienia upragnionego przez uczniów pierwszego dzwonka rozpoczynamy kolejny rok działalności gazetki Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów *Kwadrat*. Jest to już rok trzeci, wydaje nam się więc, że zasłużyliśmy na zdania rozpoczynające się od „Tradycyjnie... ”, a zatem...

Tradycyjnie przeczytacie u nas ciekawe artykuły matematyczne inspirowane zadaniami z OMG, rozwijające te problemy i przygotowujące do zawodów. Tradycyjnie zamieszczać będziemy informacje o sukcesach młodych adeptów matematyki, z których większość (a prawdopodobnie nawet wszyscy) było swego czasu laureatami naszej Olimpiady.

I tradycyjnie zachęcamy uczniów do wzięcia udziału w tegorocznej edycji Olimpiady, a nauczycieli zachęcamy do zachęcania uczniów razem z nami. Warto, gdyż OMG skutecznie uczy, jak stawiać czoła niestandardowym wyzwaniom, a laureaci kontynuują naukę w dowolnie wybranej szkole ponadgimnazjalnej.

Tradycyjnie polecamy także regularne odwiedzanie naszej strony internetowej `www.omg.edu.pl`, profilu OMG na Facebooku oraz przypominamy o adresie mailowym `kwadrat.omg@gmail.com`, gdzie czekamy na wszelkie uwagi i sugestie dotyczące naszej gazetki. Tradycyjnie życzymy miłej lektury! :)

Rady na układy

Jedna z metod rozwiązywania układów dwóch równań z dwiema niewiadomymi — tzw. *metoda podstawiania* — polega na wyznaczeniu wybranej niewiadomej z jednego równania i podstawieniu do drugiego. W ten sposób układ równań sprowadzamy do równania. Zdarza się jednak, że tak otrzymane równanie jest skomplikowane i nie umiemy go rozwiązać. Przyjrzyjmy się następującemu przykładowi.

Zadanie 1.

Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x^2 = 2y-1 \\ y^2 = 2x-1\,. \end{cases}$$

Rozwiązanie

Wyznaczając niewiadomą y z pierwszego równania, otrzymujemy $y=\frac{1}{2}(x^2+1)$, co po podstawieniu do drugiego równania daje

$$\tfrac{1}{4}(x^2+1)^2 = 2x-1\,.$$

Przekształcając równoważnie, uzyskujemy

$$x^4+2x^2-8x+5=0\,.$$

Chociaż to konkretne równanie można rozwiązać, wykonując kilka pomysłowych przekształceń, to na ogół równania czwartego stopnia są trudne do rozwiązania. Dlatego, aby rozwiązać nasz układ równań, postąpimy nieco inaczej.

Dodajmy dane równania stronami. Uzyskujemy wówczas $x^2+y^2=2x+2y-2$, czyli

$$x^2-2x+1+y^2-2y+1=0\,.$$

Korzystając teraz ze wzoru skróconego mnożenia, możemy powyższą zależność zapisać w postaci

$$(x-1)^2+(y-1)^2=0\,.$$

Liczby $(x-1)^2$ oraz $(y-1)^2$ są nieujemne i ich suma jest równa 0. Oznacza to, że każda z tych liczb musi być równa 0, czyli $x-1=0$ oraz $y-1=0$. Stąd $(x,y)=(1,1)$.

Pozostaje sprawdzić, że para $(x,y)=(1,1)$ jest istotnie rozwiązaniem danego układu równań.

Zadanie 2. (II OMG, zawody III stopnia).

Wyznacz wszystkie trójki (a,b,c) liczb rzeczywistych spełniające układ równań:

$$\begin{cases} ab=a+b \\ bc=b+c \\ ca=c+a\,. \end{cases}$$

Rozwiązanie

Odejmując stronami równanie drugie od pierwszego, otrzymujemy

$$ab-bc=a+b-b-c\,.$$

Przekształacając równoważnie tę zależność, otrzymujemy kolejno:

$$b(a-c)=a-c\,,$$
$$(a-c)(b-1)=0\,.$$

Stąd wniosek, że $a=c$ lub $b=1$. Jednak równość $b=1$ nie może być spełniona, bo wtedy równanie pierwsze przybrałoby sprzeczną postać $a=a+1$. Wobec tego $a=c$. Analogicznie wykazujemy, że $b=a$. W konsekwencji $a=b=c$.

Z pierwszego równania mamy wtedy $a^2=2a$, czyli równoważnie $a(a-2)=0$. Stąd $a=0$ lub $a=2$, a więc $(a,b,c)=(0,0,0)$ lub $(a,b,c)=(2,2,2)$.

Bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że istotnie obie te trójki spełniają dany układ równań.

Zadanie 3. (II OMG, zawody II stopnia).

Wyznacz wszystkie trójki (a,b,c) liczb rzeczywistych spełniające układ równań:

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=23 \\ a+2b+4c=22. \end{cases}$$

Rozwiązanie

W tym przypadku zarówno dodanie, jak i odjęcie równań stronami prowadzi do skomplikowanej zależności. Postąpmy więc nieco inaczej: pomnóżmy najpierw drugie równanie stronami przez 2:

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=23 \\ 2a+4b+8c=44 \end{cases}$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

i dopiero potem odejmijmy równania stronami:

$$a^2-2a+b^2-4b+c^2-8c=-21.$$

Uzyskaną zależność możemy teraz zapisać w postaci

$$a^2-2a+1+b^2-4b+4+c^2-8c+16=0,$$

albo, po zastosowaniu wzoru skróconego mnożenia, w postaci równoważnej

$$(a-1)^2+(b-2)^2+(c-4)^2=0.$$

Suma liczb nieujemnych jest równa zero wtedy i tylko wtedy, gdy każda z nich jest równa zero, więc z powyższego równania wnioskujemy, że $a=1$, $b=2$, $c=4$, czyli $(a,b,c)=(1,2,4)$.

Jednak ta trójka liczb nie spełnia pierwszego równania danego układu:

$$a^2+b^2+c^2=1^2+2^2+4^2=1+4+16=21\neq 23.$$

Stąd wniosek, że dany układ równań nie ma rozwiązań.

Powyższy przykład pokazuje, jak istotne jest sprawdzenie, czy otrzymane wartości liczbowe istotnie spełniają wyjściowy układ równań. Dodawanie (jak również odejmowanie) równań stronami nie jest bowiem przekształceniem równoważnym. Innymi słowy, jeżeli $a=b$ oraz $c=d$, to $a+c=b+d$, natomiast nie odwrotnie: z równości $a+c=b+d$ nie wynika, że $a=b$ oraz $c=d$, co można sprawdzić podstawiając $a=1$, $b=2$, $c=5$ i $d=4$. Musimy zatem pamiętać, że jeśli rozwiązujemy układ równań dodając (lub odejmując) równania stronami, to *należy dokonać sprawdzenia*, czy otrzymany na końcu wynik liczbowy faktycznie jest rozwiązaniem układu równań.

W dalszej części artykułu zaprezentujemy jeszcze kilka podobnych zadań.

Zadanie 4. (XVIII OM, zawody I stopnia)

Wyznacz wszystkie czwórki (a,b,c,d) liczb rzeczywistych spełniające układ równań:

$$\begin{cases} a^2+b^2=cd \\ c^2+d^2=ab. \end{cases}$$

Rozwiązanie

Po dodaniu stronami równań danego układu, otrzymujemy

$$a^2+b^2+c^2+d^2=ab+cd,$$

a stąd kolejno:

$$a^2+b^2+c^2+d^2-ab-cd=0$$
$$2a^2+2b^2+2c^2+2d^2-2ab-2cd=0$$
$$a^2+b^2+c^2+d^2+(a-b)^2+(c-d)^2=0.$$

Suma liczb nieujemnych jest równa zero wtedy i tylko wtedy, gdy każda z tych liczb jest równa zero, skąd wnioskujemy, że

$$a=b=c=d=0.$$

Wykazaliśmy zatem, że jeśli dany układ ma rozwiązanie, to może nim być tylko czwórka $(a,b,c,d)=(0,0,0,0)$.

Bezpośrednio sprawdzamy, że czwórka ta spełnia podany układ równań.

Zadanie 5.

Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} ab=a+b+1 \\ bc=b+c+3 \\ ca=c+a+7. \end{cases}$$

Rozwiązanie

Wykorzystamy *sztuczkę z iloczynem*, o której można przeczytać w *Kwadracie* nr 5 (czerwiec 2012). Zapiszmy dany układ w postaci równoważnej

$$\begin{cases} ab-a-b+1=2 \\ bc-b-c+1=4 \\ ca-c-a+1=8, \end{cases}$$

albo po „zwinięciu”:

$$(1)\qquad \begin{cases} (a-1)(b-1)=2 \\ (b-1)(c-1)=4 \\ (c-1)(a-1)=8. \end{cases}$$

W poprzednich zadaniach odejmowaliśmy albo dodawaliśmy równania stronami. Teraz je pomnożymy stronami. W efekcie uzyskujemy

$$((a-1)(b-1)(c-1))^2=64,$$

skąd

$$(a-1)(b-1)(c-1)=8 \quad \text{lub} \quad (a-1)(b-1)(c-1)=-8.$$

Po wykorzystaniu tych równości oraz równań układu (1), dostajemy

$$a-1=2,\quad b-1=1,\quad c-1=4$$

lub

$$a-1=-2,\quad b-1=-1,\quad c-1=-4.$$

Wobec tego

$$(a,b,c)=(3,2,5) \quad \text{lub} \quad (a,b,c)=(-1,0,-3).$$

Bezpośrednio sprawdzamy, że obie trójki spełniają dany układ równań.

Na koniec, jak zwykle, kilka zadań do samodzielnego rozwiązania. Wskazówki podamy w następnym numerze *Kwadratu.*

Zadanie 6.

Rozwiąż układy równań:

a) $\begin{cases} x^2+9=2(2x+y) \\ y^2+9=2(2y+x). \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2-2y^2=-5 \\ x+y^2=2. \end{cases}$

Zadanie 7.

Wyznacz wszystkie piątki (a,b,c,d,e) liczb rzeczywistych, dla których:

$$ab=1,\quad bc=2,\quad cd=3,\quad de=4,\quad ea=5.$$

Zadanie 8.

Rozwiąż układy równań:

a) $\begin{cases} (a+b)^2=4c \\ (b+c)^2=4a \\ (c+a)^2=4b, \end{cases}$ b) $\begin{cases} a^2+3=3a+b \\ b^2+4=3b+c \\ c^2+5=3c+a. \end{cases}$

Tomasz Szymczyk

Pole

W tym artykule zajmiemy się omówieniem wybranych zadań geometrycznych związanych z polem figury. Będziemy w nich korzystać jedynie z dobrze znanego wzoru na pole trójkąta $S=\frac{1}{2}ah$.

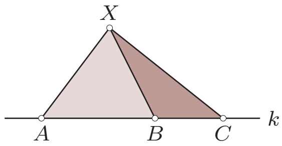
Oznaczmy przez $[\mathcal{F}]$ pole figury $\mathcal{F}$.

Użytecznym i często wykorzystywanym spostrzeżeniem jest następujący

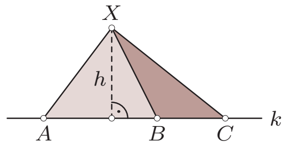
Fakt

Różne punkty A, B, C leżą na prostej k, a punkt X leży poza prostą k (rys. 1). Wówczas

$$\frac{[XAB]}{[XBC]}=\frac{AB}{BC}.$$



rys. 1



rys. 2

Aby uzasadnić powyższą równość, zauważmy, że trójkąty XAB i XBC mają wspólną wysokość h poprowadzoną z wierzchołka X (rys. 2). Wobec tego

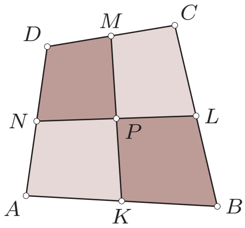
$$\frac{[XAB]}{[XBC]}=\frac{\frac{1}{2}\cdot AB\cdot h}{\frac{1}{2}\cdot BC\cdot h}=\frac{AB}{BC},$$

co kończy dowód.

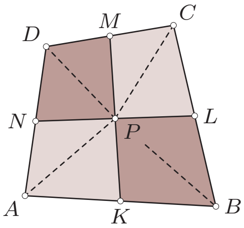
Z faktu tego wynika w szczególności, że jeśli punkt B jest środkiem odcinka AC, to pola trójkątów XAB i XBC są równe.

Zadanie 1.

Punkty K, L, M, N są odpowiednio środkami boków AB, BC, CD, DA czworokąta wypukłego $ABCD$. Odcinki KM i LN przecinają się w punkcie P. Udowodnij, że suma pól czworokątów $AKPN$ i $CMPL$ jest równa sumie pól czworokątów $BLPK$ i $DNPM$.



rys. 3



rys. 4

Rozwiązanie

Połączmy punkt P z wierzchołkami czworokąta (rys. 4). Punkt K jest środkiem odcinka AB, więc na mocy powyższej obserwacji $[AKP]=[BKP]$.

Analogicznie dostajemy równości $[CLP]=[BLP]$, $[CMP]=[DMP]$ oraz $[ANP]=[DNP]$. Dodając stronami powyższe zależności, uzyskujemy tezę.

Zadanie 2.

Punkty K i L leżą odpowiednio na bokach BC i CA trójkąta ABC, przy czym

$$\frac{BK}{KC}=\frac{CL}{LA}=\lambda.$$

Punkt M jest środkiem odcinka AB (rys. 5). Wykaż, że pole czworokąta $KCLM$ jest równe połowie pola trójkąta ABC.

Rozwiązanie

Na mocy faktu z początku artykułu,

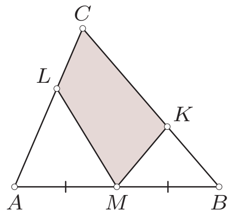
$$\frac{[MBK]}{[MKC]}=\frac{BK}{KC}=\lambda \quad \text{oraz} \quad \frac{[MCL]}{[MLA]}=\frac{CL}{LA}=\lambda.$$

Oznaczmy przez a pole trójkąta MKC, a przez b pole trójkąta MLA (rys. 6). Wówczas powyższe równości prowadzą do zależności

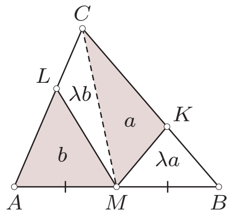
$$[MBK]=\lambda a \quad \text{oraz} \quad [MCL]=\lambda b.$$

Ponieważ punkt M jest środkiem odcinka AB, więc $[BMC]=[AMC]$. Wobec tego mamy $a+\lambda a=b+\lambda b$, czyli $a(1+\lambda)=b(1+\lambda)$, skąd $a=b$. Otrzymujemy więc ostatecznie

$$[KCLM]=a+\lambda a=\tfrac{1}{2}[ABC].$$



rys. 5



rys. 6

Zadanie 3. (III OMG, zawody I stopnia)

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ o polu 1. Punkt K jest symetryczny do punktu B względem punktu A, punkt L jest symetryczny do punktu C względem punktu B, punkt M jest symetryczny do punktu D względem punktu C, punkt N jest symetryczny do punktu A względem punktu D. Oblicz pole czworokąta $KLMN$.

Rozwiązanie

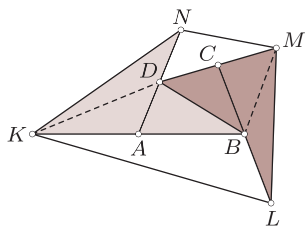
Podzielmy czworokąt $ABCD$ przekątną BD na dwa trójkąty: DAB i BCD (rys. 7).

Ponieważ $AB=KA$, więc na mocy spostrzeżenia z początku artykułu, $[DAB]=[DKA]$. Podobnie, skoro $ND=DA$, to $[DKA]=[NKD]$. Stąd wniosek, że

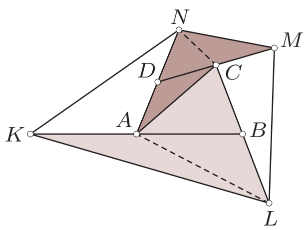
$$[KAN]=[DKA]+[NKD]=2[DAB].$$

Analogicznie uzasadniamy, że $[MCL]=2[BCD]$. Wobec tego

(1) $[KAN]+[MCL]=2([DAB]+[BCD])=2[ABCD]$.



rys. 7



rys. 8

Podzielmy z kolei czworokąt $ABCD$ przekątną AC na trójkąty ABC i CDA (rys. 8). Prowadząc analogiczne rozumowanie do powyższego, uzyskujemy

(2) $[LBK]+[NDM]=2[ABCD]$.

Sumując stronami zależności (1) i (2), uzyskujemy

$$[KAN]+[MCL]+[LBK]+[NDM]=4[ABCD].$$

Dodając wreszcie do obu stron powyższej równości pole czworokąta $ABCD$, otrzymujemy

$$[KLMN]=5[ABCD]=5.$$

Zadanie 4. (V OMG, zawody I stopnia)

Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD. Wyznacz wszystkie punkty P leżące wewnątrz tego trapezu i spełniające równość

$$[PAB]+[PCD]=[PBC]+[PDA].$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że dana w treści zadania równość sum pól jest równoważna stwierdzeniu, że jedno z wyrażeń $[PAB]+[PCD]$ lub $[PBC]+[PDA]$ jest równe połowie pola czworokąta $[ABCD]$. Ponieważ odcinki AB i CD są równoległe, więc można przypuszczać, że łatwiej będzie rozpatrywać pierwsze wyrażenie. Zapiszmy więc daną w treści zadania równość w postaci

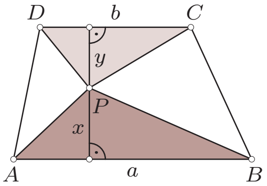
$$[PAB]+[PCD]=\frac{1}{2}[ABCD].$$

Niech x i y oznaczają wysokości odpowiednio trójkątów PAB i PCD opuszczone z punktu P (rys. 9). Niech ponadto $AB=a$ oraz $CD=b$. Powyższa równość jest wtedy równoważna zależności

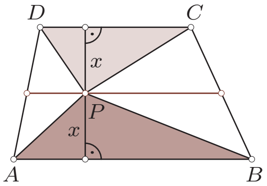
$$\frac{ax}{2}+\frac{by}{2}=\frac{(a+b)(x+y)}{4}.$$

Przekształcając to wyrażenie równoważnie, uzyskujemy kolejno:

$$2ax+2by=ax+ay+bx+by,$$
$$ax-ay-bx+by=0,$$
$$(a-b)(x-y)=0.$$



rys. 9



rys. 10

Jeśli $a=b$, to powyższa równość jest spełniona dla dowolnych liczb x i y. To oznacza, że jeśli czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem, to każdy punkt P z jego wnętrza spełnia postulowaną równość.

Jeśli natomiast $a\neq b$, czyli jeśli trapez $ABCD$ nie jest równoległobokiem, to zależność $(a-b)(x-y)=0$ jest równoważna równości $x=y$. To zaś oznacza, że punkt P leży na prostej równoległej do podstaw trapezu w jednakowej odległości od prostych zawierających te podstawy (rys. 10).

Kończąc, proponujemy Czytelnikom kilka zadań do samodzielnego rozwiązania. Wskazówki do nich podamy w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 5. (IV OMG, zawody II stopnia)

Dany jest równoległobok $ABCD$ oraz punkt E należący do boku BC. Przez punkt D prowadzimy prostą k równoległą do prostej AE. Na prostej k obieramy takie punkty K, L, że czworokąt $AEKL$ jest równoległobokiem. Udowodnij, że równoległoboki $ABCD$ i $AEKL$ mają równe pola

Zadanie 6. (VI OMG, zawody I stopnia)

Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$. Punkt X leży wewnątrz tego sześciokąta. Punkty K, L, M, N, P, Q są odpowiednio środkami boków AB, BC, CD, DE, EF, FA. Wykaż, że suma pól czworokątów $QAKX$, $LCMX$, $NEPX$ nie zależy od wyboru punktu X.

Zadanie 7. (I OMG, zawody III stopnia)

Dany jest równoległobok $ABCD$. Punkt E należy do boku AB, a punkt F do boku AD. Prosta EF przecina prostą CB w punkcie P, a prostą CD w punkcie Q. Wykaż, że pole trójkąta CEF jest równe polu trójkąta APQ.

Zadanie 8.

Pewna prosta dzieli pole i obwód trójkąta na połowy. Wykaż, że prosta ta przechodzi przez środek okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Zadanie 9.

Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC i CA trójkąta ABC, przy czym

$$\frac{BD}{DC}=\frac{CE}{EA}.$$

Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie P. Wykaż, że pole czworokąta $EPDC$ jest równe polu trójkąta ABP.

Zadanie 10.

Dany jest czworokąt $ABCD$. Punkt M jest środkiem boku CD. Wykaż, że jeżeli pole trójkąta ABM jest równe połowie pola czworokąta $ABCD$, to czworokąt ten jest trapezem.

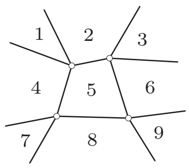
Anna Hoduń

Wskazówki do zadań z poprzedniego numeru

Jak znaleźć wielościan?

Pod koniec artykułu pytaliśmy Czytelników o to, czy istnieje *dobry* wielościan (tzn. wielościan wypukły o nieparzystej liczbie ścian i taki, że w każdym jego wierzchołku zbiega się parzysta liczba krawędzi), który ma co najwyżej 9 ścian. Naszkicujemy uzasadnienie, że taki wielościan nie istnieje.

Przypuśćmy, że istnieje dobry wielościan $\mathcal{W}$ mający co najwyżej 9 ścian. Wówczas każda ściana tego wielościanu musi być trójkątem. Rzeczywiście, jeśli pewna ściana wielościanu dobrego ma więcej niż 3 boki, to skoro w każdym wierzchołku zbiegają się przynajmniej 4 krawędzie, wielościan ten ma co najmniej 9 ścian (wskazanych na rysunku 11). Ponadto można uzasadnić, że ściany te nie mogą być wszystkimi ścianami wielościanu $\mathcal{W}$. Wobec tego dobry wielościan, mający ścianę o liczbie boków większej od 3, musiałby mieć co najmniej 11 ścian. Stąd wniosek, że każda ściana wielościanu $\mathcal{W}$ musi być trójkątem.



rys. 11

Niech n_k dla $k=4,6,8,\ldots$ oznacza liczbę wierzchołków wielościanu $\mathcal{W}$, z których wychodzi dokładnie k krawędzi. Niech ponadto s będzie liczbą ścian tego wielościanu. Ponieważ każda ściana wielościanu $\mathcal{W}$ ma trzy wierzchołki, więc zliczając liczby ścian, które się schodzą w każdym wierzchołku, uzyskujemy

$$3s=4n_4+6n_6+8n_8+\ldots.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż po lewej stronie stoi liczba nieparzysta, po prawej zaś parzysta. Stąd wynika, że postulowany wielościan $\mathcal{W}$ nie istnieje.

Przechodzimy do zadań zamykających artykuł.

1. Istnieje wielościan niewypukły o 6 ścianach. Aby go zbudować, sklej ze sobą w odpowiedni sposób dwa ostrosłupy trójkątne.

2. Odetnij od sześcianu trzy jego naroża płaszczyznami, które przechodzą przez ustalony wierzchołek sześcianu.

3. Aby skonstruować odpowiedni przykład, zastosuj kilkakrotnie metodę II do wielościanu z rysunku 5.

4. Na podstawach graniastosłupa trójkątnego dobuduj ostrosłupy w taki sposób, aby powstał wielościan, którego jedną ze ścian jest sześciokąt. Następnie sklej ten wielościan w odpowiedni sposób z ostrosłupem sześciokątnym.

Urok zbioru „mi”

3. Uzasadnij, że μ-punktami układu dwóch punktów A i B są takie punkty S i T, że czworokąt $ASBT$ jest kwadratem. Przeprowadź rozumowanie podobne do rozwiązania zadania 1.

4. Wykaż najpierw, że odległości punktu A od prostych BS i CS są równe. Wywnioskuj stąd, że prosta AS zawiera dwusieczną kąta BSC.

Redaguje zespół w składzie: Waldemar Pompe (przewodniczący KG OMG), Łukasz Rajkowski, Tomasz Szymczyk (ogólnopolski koordynator OMG). Recenzent: dr Joanna Jaszuńska. Adres do korespondencji: kwadrat.omg@gmail.com