Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

Kwadrat

Nr 17
luty 2016
ISSN 2300-0708

Gazetka Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

O pożytku z pola

Pojęcie pola figury pojawia się w zadaniach geometrycznych dosyć często. Zazwyczaj chodzi o to, by obliczyć pole jakiejś figury bądź udowodnić pewną zależność wiążącą pola wskazanych figur. Tymczasem okazuje się, że pojęcie pola można wykorzystać także wtedy, gdy w zadaniu się o nim nie mówi. Popatrzmy na kilka przykładów. Pierwszy z nich to modyfikacja zadania 7 z części testowej zawodów I stopnia VII OMG.

Zadanie 1.

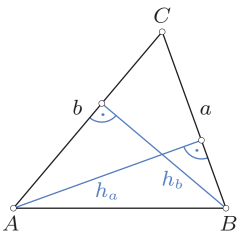
W trójkącie ABC wysokości poprowadzone z wierzchołków A i B są równe. Udowodnij, że $AC = BC$.

Rozwiązanie

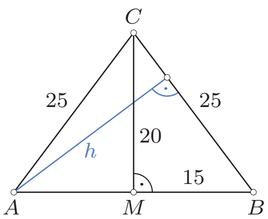
Oznaczmy wysokości trójkąta ABC poprowadzone z wierzchołków A i B odpowiednio przez h_a i h_b oraz niech $BC = a$ i $AC = b$ (rys. 1). Zapisując pole S trójkąta ABC na dwa sposoby, dostajemy równość

$$\frac{1}{2}ah_a = S = \frac{1}{2}bh_b.$$

Skoro więc $h_a = h_b$, to $a = b$, czyli $AC = BC$, co kończy rozwiązanie zadania.



rys. 1



rys. 2

Zadanie 2.

Czy istnieje trójkąt, którego wysokości mają długości równe odpowiednio 1, 2 i 3? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Wykażemy, że taki trójkąt nie istnieje. W dowodzie znów wygodnie będzie posłużyć się polem.

Przypuśćmy, że taki trójkąt istnieje i oznaczmy przez a, b i c długości jego boków, do których zostały poprowadzone wysokości odpowiednio równe 1, 2 i 3. Zapisując pole danego trójkąta na trzy sposoby, dostajemy

$$\frac{1}{2}a \cdot 1 = \frac{1}{2}b \cdot 2 = \frac{1}{2}c \cdot 3.$$

Możemy stąd wyznaczyć długości b i c w zależności od a: $b = \frac{1}{2}a$, $c = \frac{1}{3}a$. Jednak wtedy

$$b + c = \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}a = \frac{5}{6}a < a,$$

co przeczy nierówności trójkąta. Stąd wniosek, że trójkąt o podanych wysokościach istnieć nie może. Rozwiązanie zadania jest więc zakończone.

Zadanie 3. (VIII OMG, zawody II stopnia)

Czy istnieje taki trójkąt ostrokątny, w którym długości wszystkich boków i wszystkich wysokości są liczbami całkowitymi? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Tym razem wykażemy, że taki trójkąt istnieje.

Rozważmy trójkąt prostokątny MBC o przyprostokątnych BM i CM, których długości wynoszą odpowiednio 15 i 20 (rys. 2). Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy

$$BC = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25.$$

Niech A będzie punktem symetrycznym do punktu B względem prostej CM. Udowodnimy, że trójkąt ABC spełnia warunki zadania.

Długości boków trójkąta ABC są liczbami całkowitymi. Również długość wysokości CM jest liczbą całkowitą. Ponieważ trójkąt ABC jest równoramienny ($AC = BC$), więc pozostałe dwie wysokości tego trójkąta są równe. Oznaczmy je przez h. Obliczając na dwa sposoby pole S trójkąta ABC, uzyskujemy

$$\frac{AB \cdot CM}{2} = S = \frac{BC \cdot h}{2},$$

skąd

$$h = \frac{AB \cdot CM}{BC} = \frac{30 \cdot 20}{25} = 24.$$

Pozostaje uzasadnić, że trójkąt ABC jest ostrokątny. Ponieważ trójkąt MBC jest prostokątny, więc $\sphericalangle CBM < 90^\circ$, a zatem kąty CBA i CAB są ostre.

Ponadto, przyprostokątna BM trójkąta MBC jest krótsza od przyprostokątnej CM. Wobec tego otrzymujemy $\sphericalangle BCM < \sphericalangle CBM$, skąd wynika, że $\sphericalangle BCM < 45^\circ$, czyli $\sphericalangle ACB = 2 \cdot \sphericalangle BCM < 90^\circ$. To kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 4.

Niech r oznacza długość promienia okręgu wpisanego w pewien trójkąt, natomiast h_a, h_b i h_c — długości wysokości tego trójkąta. Udowodnij, że

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.$$

Rozwiązanie

Oznaczmy przez S pole danego trójkąta. Wówczas

$$S = \frac{1}{2}ah_a, \quad S = \frac{1}{2}bh_b, \quad S = \frac{1}{2}ch_c,$$

skąd uzyskujemy

$$\frac{1}{h_a} = \frac{a}{2S}, \quad \frac{1}{h_b} = \frac{b}{2S}, \quad \frac{1}{h_c} = \frac{c}{2S}.$$

Wobec tego

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a+b+c}{2S}.$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Z drugiej strony, z zadania 5. artykułu *Bliźniacze zadania* (*Kwadrat* nr 16, lipiec 2015) wiemy, że

$$S = r\cdot\frac{a+b+c}{2}, \quad \text{skąd} \quad \frac{1}{r}=\frac{a+b+c}{2S}.$$

Łącząc uzyskane zależności, dostajemy tezę.

W następnym przykładzie użyjemy pola do dowodu tzw. *twierdzenia o dwusiecznej*.

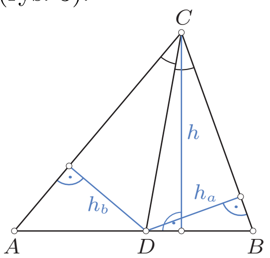
Zadanie 5. (twierdzenie o dwusiecznej)

Dany jest trójkąt ABC. Dwusieczna kąta ACB przecina odcinek AB w punkcie D. Wykaż, że

$$\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC}.$$

Rozwiązanie

Niech h_a i h_b będą wysokościami odpowiednio trójkątów BCD i ACD poprowadzonymi z wierzchołka D, natomiast h — wysokością trójkąta ABC poprowadzoną z wierzchołka C (rys. 3).



rys. 3

Oznaczmy ponadto przez $[XYZ]$ pole trójkąta XYZ. Ponieważ odcinek h jest wspólną wysokością dla trójkątów ABC, ACD i BCD, więc możemy napisać

$$AD\cdot h = 2\cdot[ACD] = AC\cdot h_b$$

oraz

$$BD\cdot h = 2\cdot[BCD] = BC\cdot h_a\,.$$

Dzieląc stronami pierwszą z tych równości przez drugą, dostajemy

$$\frac{AD}{BD}=\frac{AC\cdot h_b}{BC\cdot h_a}.$$

Wiemy jednak, że punkt D leży na dwusiecznej kąta ACB, skąd wniosek, że jego odległości od prostych AC i BC są równe, czyli $h_a = h_b$. W takim razie

$$\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC},$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Proponujemy teraz kilka zadań dla Czytelników do samodzielnego rozwiązania. Wskazówki do nich podamy w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 6.

Udowodnij, że suma odległości dowolnego punktu leżącego wewnątrz trójkąta równobocznego od prostych zawierających jego boki jest stała.

Zadanie 7.

Niech h_a, h_b i h_c będą wysokościami pewnego trójkąta, a r_a — długością promienia okręgu dopisanego, stycznego do tego boku, do którego została poprowadzona wysokość h_a. Udowodnij, że

$$\frac{1}{r_a}=\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}.$$

Zadanie 8.

Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC. Proste AP, BP i CP przecinają boki BC, CA i AB odpowiednio w punktach A', B' i C'. Wykaż, że

$$\frac{PA'}{AA'}+\frac{PB'}{BB'}+\frac{PC'}{CC'}=1.$$

Zadanie 9. (tw. o dwusiecznej kąta zewnętrznego)

Dany jest trójkąt ABC. Dwusieczna kąta zewnętrznego ACB przecina prostą AB w punkcie E. Wykaż, że

$$\frac{AE}{BE}=\frac{AC}{BC}.$$

Michał Kieza

Kolejny sukces Polaków

Między 4 a 16 lipca 2015 r. w Chiang Mai w Tajlandii odbyła się 56. Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna (International Mathematical Olympiad, IMO). Na zawody została wysłana polska reprezentacja, składająca się z sześciu najlepszych uczniów finału LXVI Olimpiady Matematycznej:

- Adam Klukowski (XIV LO w Warszawie);
- Mikołaj Leonarski (XIV LO w Warszawie);
- Konrad Paluszek (XIV LO w Warszawie);
- Piotr Pawlak (Ogólnokształcąca Szkoła Muzyczna w Gdańsku);
- Paweł Piwek (LO im. św. Jadwigi Królowej w Kielcach);
- Mariusz Trela (Gimnazjum nr 52 w Krakowie).

Wszyscy wymienieni uczniowie byli w przeszłości laureatami OMG.

Delegacji przewodniczyli Michał Pilipczuk i Andrzej Grzesik. Warto podkreślić, że IMO to najbardziej prestiżowe zawody matematyczne dla uczniów, o czym świadczy chociażby fakt, że regularnie biorą w nich udział reprezentacje około 100 krajów. W tym roku startowało 577 uczestników ze 104 państw.

Każdego z dwóch dni zawodów uczniowie mieli 4,5 godziny na rozwiązanie trzech zadań. Suma punktów uzyskanych przez danego uczestnika decydowała o jego klasyfikacji w końcowym rankingu i o medalach, natomiast sumy punktów wszystkich zawodników w każdej z reprezentacji przekładały się na nieformalną klasyfikację drużynową. Jury zdecydowało przyznać 39 złotych medali, 100 srebrnych i 143 brązowe.

Wśród Polaków najlepszy wynik uzyskał Adam Klukowski, zdobywając 31 punktów i złoty medal (dało mu to 10. miejsce w klasyfikacji indywidualnej). Mikołaj Leonarski otrzymał 20 punktów i srebrny medal. Pozostali nasi reprezentanci zdobyli medale brązowe — Konrad Paluszek i Mariusz Trela uzyskali po 18 punktów, a Piotr Pawlak i Paweł Piwek po 15 punktów.

Dzięki temu, z wynikiem 117 punktów, Polska uplasowała się na bardzo dobrej 17. pozycji w klasyfikacji drużynowej (do 14. pozycji zabrakło tylko 3 punktów), oraz na 4. pozycji wśród krajów Unii Europejskiej — m.in. przed Wielką Brytanią (22. miejsce, 109 punktów), Niemcami (27. miejsce, 102 punkty), a także Finlandią (82. miejsce, 26 punktów).

Klasyfikację drużynową wygrała reprezentacja USA, wyprzedzając kolejno Chiny, Koreę Południową oraz

Koreę Północną. Indywidualnie szczególnie istotny był sukces Zhuo Qun Songa z Kanady, który uzyskał maksymalny wynik 42 punktów oraz swój piąty złoty medal (w dorobku ma jeszcze jeden brązowy). Tym samym Zhuo Qun Song objął prowadzenie w klasyfikacji indywidualnej wszech czasów jako pierwszy zawodnik z pięcioma złotymi medalami.

Wielkim sukcesem naszej drużyny jest rezultat Adama Klukowskiego, który dzięki rozwiązaniu 4,5 zadania uplasował się w ścisłej światowej czołówce. W ciągu wcześniejszych 20 lat tylko raz Polak był w pierwszej dziesiątce (5. miejsce Przemysława Mazura w 2006 roku). Również warte uwagi jest to, że wszyscy zawodnicy wrócili z medalami. Warto także podkreślić, że polscy uczniowie znakomicie poradzili sobie z geometrycznym zadaniem trzecim. Rozwiązało je tylko 30 uczestników, w tym aż trzech Polaków. Patrząc na wyniki jedynie tego zadania, Polska zajęłaby czwarte miejsce na świecie.

Bardzo dobry rezultat naszej reprezentacji został dostrzeżony przez polskie media i władze. Na warszawskim lotnisku Polacy przywitani zostali m.in. przez wiceminister edukacji narodowej Joannę Berdzik, która wręczyła uczniom pamiątkowe dyplomy i upominki, oraz przez redaktor Justynę Suchecką z Gazety Wyborczej. Na uczestników czekał także wiceprezydent Warszawy Jarosław Jóźwiak. Link do relacji filmowej z tego niecodziennego wydarzenia można znaleźć na stronie internetowej OMG w zakładce „w mediach”.

Następna Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna odbędzie się w Hongkongu w lipcu 2016 r.

Andrzej Grzesik, Michał Pilipczuk

Cyfrowe problemy

Zapisem w systemie dziesiętnym danej dodatniej liczby całkowitej n nazywamy przedstawienie postaci

$$n = 10^m a_m + 10^{m-1} a_{m-1} + \ldots + 10a_1 + a_0,$$

gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_m \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ oraz $a_m \neq 0$. Współczynniki a_i nazywamy cyframi liczby n zapisanej w systemie dziesiętnym. Można udowodnić, że każda dodatnia liczba całkowita posiada dokładnie jedno przedstawienie powyższej postaci, czyli dokładnie jeden zapis w systemie dziesiętnym.

Problemy dotyczące zapisu pozycyjnego już od dawna należą do kanonu zadań konkursowych. Chociaż dziesiętny układ liczbowy towarzyszy nam od pierwszych chwil, w których wkraczamy w świat matematyki i jest dla nas w pewnym sensie pojęciem oczywistym, to zadaniom, które go dotyczą jest często bardzo daleko do bycia oczywistymi. Nie ma wielu metod, które pozwalają w przewidywalny sposób radzić sobie z tego typu problemami. Rozwiązania są często bardzo pomysłowe i wymagają dużej otwartości umysłu oraz umiejętności kombinowania. Właśnie z tego powodu zadania dotyczące systemu dziesiętnego tak często można spotkać na różnych konkursach i olimpiadach. Zademonstrujemy na kilku przykładach, jak można radzić sobie z „cyfrowymi” problemami.

Zadanie 1.

Wykaż, że liczba 20-cyfrowa, która zaczyna się od jedenastu cyfr 1, nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez x liczbę opisaną w zadaniu. Najmniejsza liczba 20-cyfrowa, która zaczyna się od jedenastu cyfr równych 1, to

$$11\,111\,111\,111\,000\,000\,000 = 11\,111\,111\,111 \cdot 10^9.$$

Największa liczba tej postaci to z kolei

$$11\,111\,111\,111\,999\,999\,999 = 11\,111\,111\,112\,000\,000\,000 - 1.$$

Zachodzą więc nierówności

$$11\,111\,111\,111 \cdot 10^9 \leqslant x < 11\,111\,111\,111 \cdot 10^9 + 10^9.$$

Zauważmy, że

$$9 \cdot 11\,111\,111\,111 = 99\,999\,999\,999 = 10^{11} - 1.$$

Otrzymane przez nas nierówności po pomnożeniu przez 9 sprowadzają się więc do

$$(10^{11} - 1) \cdot 10^9 = 10^{20} - 10^9 \leqslant 9x <$$
$$< (10^{11} - 1) \cdot 10^9 + 9 \cdot 10^9 = 10^{20} + 8 \cdot 10^9.$$

Jeżeli $x = n^2$ jest kwadratem pewnej liczby całkowitej n, to również liczba $9x = (3n)^2$ jest kwadratem liczby całkowitej. Zauważmy jednak, że

$$(10^{10} - 1)^2 = 10^{20} - 20 \cdot 10^9 + 1 < 10^{20} - 10^9 \leqslant 9x$$

oraz

$$(10^{10} + 1)^2 = 10^{20} + 20 \cdot 10^9 + 1 > 10^{20} + 8 \cdot 10^9 > 9x.$$

Pomiędzy liczbami $(10^{10} - 1)^2$ oraz $(10^{10} + 1)^2$ znajduje się tylko jeden kwadrat liczby całkowitej, którym jest liczba 10^{20}. Jeżeli więc liczba $9x$ byłaby kwadratem, to zachodziłaby równość $9x = 10^{20}$. Liczba 10^{20} nie dzieli się jednak przez 9. Wynika stąd, że liczba x nie jest kwadratem liczby całkowitej i rozwiązanie jest zakończone.

Kolejne zadanie jest klasycznym przykładem zastosowania zasady szufladkowej Dirichleta.

Zadanie 2.

Udowodnij, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n, niepodzielnej ani przez 2, ani przez 5, istnieje jej wielokrotność, której zapis dziesiętny składa się wyłącznie z cyfr równych 1.

Rozwiązanie

Rozważmy $n+1$ liczb postaci

$$1,\ 11,\ 111,\ \ldots,\ 111...11,$$

gdzie ostatnia z liczb składa się z $n+1$ cyfr równych 1. Istnieje n różnych reszt z dzielenia przez n, natomiast danych liczb jest $n+1$. Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika więc, iż pewna reszta powtarza się. Istnieją zatem dwie różne liczby postaci 111...11, których różnica dzieli się przez n. Różnica owych dwóch liczb jest równa $111...1100...0 = 111...11 \cdot 10^k = a \cdot 10^k$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej k.

Liczba n nie dzieli się ani przez 2 ani przez 5, więc jest względnie pierwsza z liczbą 10^k. Korzystając z twierdzenia 2. z artykułu *Zmagania z ułamkami* (*Kwadrat* nr 14, grudzień 2014), wnioskujemy, że liczba a, której zapis dziesiętny składa się wyłącznie z cyfr równych 1, jest podzielna przez n. To kończy dowód.

W dalszej części artykułu przez $S(n)$ będziemy oznaczać sumę cyfr dodatniej liczby całkowitej n (w systemie dziesiętnym). Znana cecha podzielności przez 9 głosi, iż dodatnia liczba całkowita n dzieli się przez 9 wtedy i tylko wtedy, gdy jej suma cyfr $S(n)$ dzieli się przez 9. W rzeczywistości można powiedzieć nawet więcej: liczby n i $S(n)$ dają tę samą resztę z dzielenia przez 9. Uzasadnimy to korzystając z podstawowych własności kongruencji (zob. *Kongruencje i ich własności* w broszurze *Matematyczne seminarium olimpijskie, część 1*, dostępnej na stronie OMG). Dla dowolnej liczby naturalnej k mamy bowiem

$$10^k \equiv 1^k = 1 \pmod 9.$$

Jeżeli więc zapiszemy n w dziesiętnym systemie pozycyjnym jako

$$n = 10^m a_m + 10^{m-1} a_{m-1} + \ldots + 10a_1 + a_0,$$

to mamy

$$n = 10^m a_m + 10^{m-1} a_{m-1} + \ldots + 10a_1 + a_0 \equiv$$
$$\equiv a_m + a_{m-1} + \ldots + a_1 + a_0 = S(n) \pmod 9,$$

co dowodzi żądanej własności. Chociaż nie ma wielu znanych metod, które byłyby przydatne w zmaganiach z cyframi, to ów prosty fakt stanowi klucz do rozwiązania ogromnej liczby zadań z tej dziedziny. Bywa on przydatny do tego stopnia, że widząc zadanie dotyczące sumy cyfr (lub nawet po prostu cyfr), warto niejako automatycznie zadać sobie pytanie, czy nie uda się go zastosować. Zademonstrujemy jego użyteczność na dwóch przykładach, w których jest on istotnym fragmentem rozumowania.

Zadanie 3.

Wyznacz wszystkie liczby naturalne n, dla których liczba $S(2n^2+3)$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Sprawdzając po kolei wszystkie 9 możliwości możemy zweryfikować, iż reszta z dzielenia przez 9 kwadratu liczby całkowitej należy do zbioru $\{0,1,4,7\}$. W konsekwencji, reszta z dzielenia przez 9 liczby postaci $2n^2+3$ należy do zbioru $\{2,3,5,8\}$. Z drugiej jednak strony, skoro $S(2n^2+3) \equiv 2n^2+3 \pmod 9$, to gdyby liczba $S(2n^2+3)$ była kwadratem, to reszta liczby $2n^2+3$ należałaby do zbioru $\{0,1,4,7\}$. Ponieważ dane zbiory reszt są rozłączne, dochodzimy do wniosku, że nie istnieje liczba całkowita n spełniająca żądane warunki.

Zadanie 4.

Wyznacz liczbę $S(S(S(4444^{4444})))$.

Rozwiązanie

Niech $A = S(S(S(4444^{4444})))$. Rozpoczniemy od podania oszacowania górnego liczby A. Z oczywistej nierówności

$$4444^{4444} < 10000^{5000} = 10^{20000}$$

wynika, że liczba 4444^{4444} ma nie więcej niż 20000 cyfr. Suma cyfr liczby n-cyfrowej jest największa wtedy, kiedy każda z jej n cyfr jest równa 9. Liczba $S(4444^{4444})$ nie przekracza zatem $9 \cdot 20000 = 180000$, a więc ma najwyżej sześć cyfr. Wobec tego

$$S(S(4444^{4444})) \leqslant 9 \cdot 6 = 54.$$

Spośród liczb od 1 do 54 największą sumę cyfr ma liczba 49 i suma ta wynosi 13. Stwierdzamy więc ostatecznie, że

$$A = S(S(S(4444^{4444}))) \leqslant 13.$$

Liczba, której szukamy, jest więc nie większa niż 13. Stanowi to oczywiście duże ułatwienie.

Aby spośród 13 potencjalnych odpowiedzi wyznaczyć tę właściwą, posłużymy się faktem, który przytoczyliśmy wcześniej: n i $S(n)$ dają tę samą resztę z dzielenia przez 9. Wnioskujemy stąd od razu, że

$$4444 \equiv 4+4+4+4 = 16 \equiv 7 \pmod 9.$$

Co więcej

$$7^3 = 343 \equiv 1 \pmod 9.$$

Z własności kongruencji mamy więc

$$4444^{4444} \equiv 7^{4444} = 7^{4443+1} \equiv (7^3)^{1481} \cdot 7 \equiv 1 \cdot 7 = 7 \pmod 9.$$

Ponieważ operacja obliczania sumy cyfr nie zmienia reszty z dzielenia przez 9, więc dochodzimy do wniosku, że liczba A daje resztę 7 z dzielenia przez 9. W przedziale od 1 do 13 jest jednak tylko jedna liczba, która daje resztę 7 z dzielenia przez 9 i jest nią 7. A zatem $A = 7$ i rozwiązanie zadania jest zakończone.

Zachęcamy Czytelnika do zmierzenia się z poniższymi zadaniami do samodzielnego rozwiązania. Wskazówki podamy w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 5.

Wykaż, że jeżeli $S(n) = S(2n)$, to $9 \mid n$.

Zadanie 6.

Rozstrzygnij, czy liczba, której zapis dziesiętny składa się z 600 cyfr 6 oraz pewnej liczby zer, może być kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 7.

Liczby od 1 do 600 zapisano obok siebie w dowolnej kolejności, uzyskując jedną liczbę N. Udowodnij, że liczba N nie jest sześcianem liczby całkowitej.

Tomasz Kobos

Wskazówki do zadań z poprzedniego numeru

Bliźniacze zadania

9. Uzasadnij, że trójkąty ACP i DBP są podobne. Zwróć uwagę, że punkt P może leżeć wewnątrz lub na zewnątrz okręgu oraz że punkty A, B, C, D mogą leżeć na okręgu w różnej kolejności.. Uzasadnienie podobieństwa tych trójkątów może się różnić w rozpatrywanych przypadkach.

10. Uzasadnij, że trójkąty ACP i CBP są podobne.

11. Przeprowadź podobne rozumowanie jak w zadaniach 1 i 2.

12. Oznacz środek sfery wpisanej w czworościan $ABCD$ przez I. Zauważ, że czworościan $ABCD$ można rozciąć na czworościany $ABCI$, $BCDI$, $CDAI$, $DABI$. Przeprowadź podobne rozumowanie jak w zadaniu 5.

13. Prześledź dokładnie rozwiązanie zadania 8.

Tożsamość Sophie Germain

5. Skorzystaj z tożsamości Sophie Germain dla odpowiednio dobranych liczb x i y.

6. Korzystając z tożsamości Sophie Germain, udowodnij, że jeżeli $a = 4m^4$ dla pewnej liczby całkowitej dodatniej m, to liczba $n^4 + a$ jest złożona.

7. Każdy z czynników licznika i mianownika pomnóż przez 4. Skorzystaj następnie z tożsamości Sophie Germain dla każdego czynnika z osobna. Zauważ, że pewne wyrazy się skracają.

8. Zauważ, że $3^{2008} + 4^{2009} = x^4 + 4y^4$ dla $x = 3^{502}$, $y = 4^{502}$. Dzięki tożsamości Sophie Germain znajdź przedstawienie tej liczby w postaci iloczynu dwóch liczb. Wystarczy udowodnić, że obie są większe od 2015^{182}.

„Kwadrat” redaguje zespół w składzie: Łukasz Bożyk, Waldemar Pompe (red. nacz.), Łukasz Rajkowski, Tomasz Szymczyk. Recenzent: dr Joanna Jaszuńska. Adres do korespondencji: kwadrat.omg@gmail.com Nakład: 2000 egz.