Treści zadań (poziom OM)

Pierwsze zawody indywidualne

1. Na bokach BC i CD kwadratu $ABCD$ wybrano takie punkty E i F, że $\sphericalangle FAE = 45°$. Odcinki AE i AF przecinają przekątną BD kwadratu odpowiednio w punktach G i H. Wykaż, że pole trójkąta AGH jest równe polu czworokąta $EGHF$.

2. Wielomian $W(x)$ ma współczynniki całkowite. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej n i każdej liczby pierwszej p liczba

$$W(n-p)-2\cdot W(n)+W(n+p)$$

jest podzielna przez p^2.

3. Udowodnij, że w rozwinięciu dziesiętnym liczby $\left(5+\sqrt{26}\right)^{2014}$ na pierwszych 2014 miejscach po przecinku nie występuje cyfra 7.

4. W okrąg ω wpisany jest taki pięciokąt $ABCDE$, że $AE = BC = CD$. Proste AB i DE przecinają się w punkcie F. Udowodnij, że środek okręgu opisanego na trójkącie BDF leży na okręgu ω.

5. Udowodnij, że dla każdej pary liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$8xy \leqslant x^4+y^4+8.$$

6. Rozstrzygnij, czy prostokąt o wymiarach $10^{2014}\times 3^{2014}$ można pociąć na prostokąty o wymiarach 5×6.

7. Rozstrzygnij, czy istnieje taki ostrosłup pięciokątny, którego wszystkie ściany boczne są trójkątami prostokątnymi i który można rozciąć na takie dwa ostrosłupy czworokątne, których wszystkie ściany boczne są trójkątami prostokątnymi.

8. Udowodnij, że wśród liczb postaci 2^n+3^n, gdzie n przebiega liczby całkowite dodatnie mniejsze od 10^{2014}, jest mniej niż 10 000 liczb pierwszych.

Drugie zawody indywidualne

9. Liczba n jest iloczynem czterech różnych liczb pierwszych większych od 100. Udowodnij, że istnieją takie różne dodatnie liczby całkowite a, b, c, d mniejsze od $n/4$, że liczby a^2-b^2, b^2-c^2, c^2-d^2 są podzielne przez n.

10. Na prostych zawierających boki BC, CA, AB trójkąta ABC wybrano odpowiednio po dwa punkty A_1 i A_2, B_1 i B_2, C_1 i C_2 w taki sposób, że

$$A_1A = AB = BB_2, \quad B_1B = BC = CC_2, \quad C_1C = CA = AA_2.$$

Wykaż, że środki ciężkości trójkątów $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ pokrywają się.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

11. Udowodnij, że dla każdej pary liczb rzeczywistych $x<y$ zachodzi nierówność

$$x+\sqrt[16]{y^{16}+16}<y+\sqrt[16]{x^{16}+16}.$$

12. Rozstrzygnij, czy kwadrat o boku 28 można pociąć na prostokąty, z których każdy ma wymiary 1×10 lub 1×11.

Trzecie zawody indywidualne

13. W czworokącie wypukłym $ABCD$ o osi symetrii BD przekątne przecinają się w punkcie S. Na odcinkach AS i CS wybrano odpowiednio takie punkty K i L, że $SK=SL$. Proste BL i CD przecinają się w punkcie M, a proste DK i AB przecinają się w punkcie N. Wykaż, że punkty M, N, S leżą na jednej prostej.

14. Dana jest liczba pierwsza p oraz takie dodatnie liczby całkowite m, n, że $m\equiv n \pmod{p(p-1)}$. Udowodnij, że $m^m\equiv n^n \pmod{p}$.

15. Przyjmij $n=21$ (wersja łatwiejsza) lub $n=19$ (wersja trudniejsza za podwójną liczbę punktów), a następnie udowodnij, że wśród dowolnych n osób istnieją trzy osoby, z których żadne dwie się nie znają lub sześć osób, z których każde dwie się znają.

16. Rozstrzygnij, czy istnieje wielościan wypukły, który ma dokładnie pięć ścian trójkątnych i dokładnie trzy wierzchołki, w których schodzą się trzy krawędzie.

Czwarte zawody indywidualne

17. Dla liczby pierwszej p, na potrzeby tego zadania, liczbę całkowitą n nazwiemy p-*fajną*, jeżeli liczba $(n+1)^p-n^p-1$ jest podzielna przez p^2.

Udowodnij, że liczba n jest p-*fajna* wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $n+p$ jest p-*fajna*.

18. Rozstrzygnij, czy istnieją dodatnie liczby całkowite k, m, n spełniające równość

$$\left(3+\sqrt{7}\right)^k\cdot\left(4+\sqrt{7}\right)^m=\left(5+\sqrt{7}\right)^n.$$

19. Dany jest ostrokątny trójkąt różnoboczny ABC, którego wysokości przecinają się w punkcie H. Punkty X,Y leżą odpowiednio na odcinkach CA,CB, przy czym czworokąt $CXHY$ jest równoległobokiem. Wykaż, że środek okręgu opisanego na trójkącie ABC leży na symetralnej odcinka XY.

20. Rozstrzygnij, czy kwadrat o boku 2^{2014} można podzielić na kwadraty, z których każdy ma bok 3 lub 5.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

21. Rozstrzygnij, czy kwadrat o boku 2^{2014} można podzielić na kwadraty, z których każdy ma bok 3, 5 lub 7.

Mecz matematyczny

22. Niech $a_n = \left[n \cdot \sqrt{2}\right]$ dla $n=1,2,3,\ldots$ oraz niech (b_n) będzie rosnącym ciągiem złożonym ze wszystkich dodatnich liczb całkowitych niewystępujących w ciągu (a_n). Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczby a_n i b_n są tej samej parzystości.

Uwaga: Symbolem $[x]$ oznaczamy największą liczbę całkowitą, która nie jest większa od liczby x.

23. Punkt P wybrano na podstawie AB ostrokątnego trójkąta równoramiennego ABC. Punkty E i D są symetryczne do punktu P odpowiednio względem prostych AC i BC. Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie Q. Udowodnij, że prosta PQ przechodzi przez pewien punkt niezależny od wyboru punktu P.

24. W kwadracie o boku 48 umieszczono 100 trójkątów (niekoniecznie rozłącznych) o sumie pól równej 600 i sumie obwodów równej 1200. Udowodnij, że w danym kwadracie można umieścić koło o promieniu 1, którego wnętrze jest rozłączne z wnętrzami tych trójkątów.

25. Liczby rzeczywiste $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{99}$ spełniają warunek

$$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\ldots(1+a_{99}) = 100.$$

Wykaż, że

$$(1+a_1^2)(1+2a_2^2)(1+3a_3^2)\ldots(1+99a_{99}^2) \geqslant 100.$$

26. Rozstrzygnij, czy istnieje taki wielokąt wypukły, że każda jego przekątna jest równa pewnemu bokowi i każdy jego bok jest równy pewnej przekątnej.

27. Interesują nas takie liczby naturalne, które mają dokładnie jedno przedstawienie w postaci $ab+2a+3b$, gdzie a, b są dodatnimi liczbami całkowitymi. Wykaż, że takich liczb jest nieskończenie wiele.

28. Udowodnij, że spośród dowolnych 64 wierzchołków 2015-kąta foremnego można wybrać cztery, które są wierzchołkami trapezu.

29. Okrąg ω jest opisany na trójkącie ABC. Okrąg o jest styczny do odcinków AC i BC odpowiednio w punktach K i L oraz styczny wewnętrznie do okręgu ω. Okręgi o_1 i o_2 są styczne wewnętrznie do okręgu ω oraz zewnętrznie do okręgu o odpowiednio w punktach K i L. Wykaż, że istnieje prosta styczna do okręgów o, o_1, o_2.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

30. Rozstrzygnij, czy równanie $a^2+b^2=5^{2014}$ ma rozwiązanie w liczbach całkowitych a, b niepodzielnych przez 5.

31. Rozstrzygnij, czy równanie $a^3+b^3+c^3=5^{2014}$ ma rozwiązanie w liczbach całkowitych a, b, c.

32. Czworościan $ABCD$ ma tę własność, że suma kątów płaskich przy wierzchołku A jest równa sumie kątów płaskich przy wierzchołku B, a suma kątów płaskich przy wierzchołku C jest równa sumie kątów płaskich przy wierzchołku D. Udowodnij, że $AC=BD$.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego