Treści zadań Obozu Naukowego Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Poziom: OMG

(Perzanowo, 10–16 czerwca 2012 r.)

1. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA i AB odpowiednio w punktach D, E, F. Prosta równoległa do AB, przechodząca przez punkt C, przecina proste FE i FD odpowiednio w punktach K i L. Wykaż, że na czworokącie $KEDL$ można opisać okrąg.

2. Dany jest taki trójkąt ostrokątny ABC, że $\sphericalangle ACB = 45^\circ$. Wysokości tego trójkąta przecinają się w punkcie H. Wykaż, że $CH = AB$.

3. Dany jest taki czworokąt wypukły $ABCD$, że wierzchołki A i C, środek przekątnej BD oraz środki okręgów opisanych na trójkątach ABD i CBD leżą na jednej prostej. Udowodnij, że

$$AB^{2012} + BC^{2012} = AD^{2012} + DC^{2012}\,.$$

4. Ile zer znajduje się na końcu liczby 2012! zapisanej w systemie dziesiętnym?

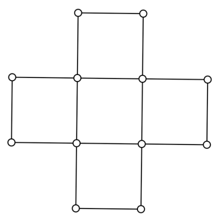
5. Wujek Jarek ma 20 torebek z cukierkami. Liczba cukierków w każdej torebce jest dodatnia i nie większa od 2012. Udowodnij, że wujek Jarek może tak obdarować Zuzię i Jaśminkę, aby każda z dziewczynek dostała taką samą liczbę torebek, zawierających łącznie taką samą liczbę cukierków.

6. Na wyspach Bergamutach podobno jest 2010 kotów w butach, 2011 uczonych łososiów, 2012 kur samograjek i 2015 starych wielorybów. Gdy spotykają się dwa zwierzęta należące do różnych gatunków, to zamieniają się w dwa zwierzęta należące do dwóch pozostałych gatunków. Rozstrzygnij, czy może się zdarzyć, że po pewnym czasie na wyspach Bergamutach będzie po 2012 przedstawicieli każdego gatunku.

7. Wyznacz wszystkie pary niezerowych liczb rzeczywistych (a,b) spełniające równanie

$$a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{b}{a} = \sqrt{3}\,.$$

8. Czy szachownicę 2014×2014 z usuniętym jednym narożnym polem można pokryć klockami 5×1 i klockami w kształcie krzyżyka jak na rysunku?



9. W trójkącie prostokątnym o bokach długości całkowitej suma ósmych potęg długości boków jest podzielna przez 127. Wykaż, że jest ona podzielna przez 127^2.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

10. Dane są takie liczby x, y, z, że $x+y+z=0$ oraz $x^2+y^2+z^2=16$. Wykaż, że

$$x^4+y^4+z^4 \geqslant 127\,.$$

11. Na okręgu opisano 127-kąt $A_1A_2A_3\ldots A_{127}$, którego każdy bok ma długość będącą liczbą całkowitą. Bok A_1A_2 ma długość 1 i jest styczny do okręgu w punkcie P. Udowodnij, że

$$\frac{63}{127} \leqslant A_1P \leqslant \frac{64}{127}\,.$$

12. Czy istnieje ostrosłup 127-kątny, którego wszystkie ściany boczne są trójkątami prostokątnymi?

13. Wujek Szymon ma 170 torebek z cukierkami. Chce obdarować 13 dziewczynek tak, by każda otrzymała co najmniej dwie torebki. Udowodnij, że może to zrobić tak, by liczby cukierków otrzymanych przez dziewczynki były podzielne przez 13.

14. Dane są takie liczby naturalne a, b, c, n, że liczby $a+b^3$, $b+c^4$ i $c+a^5$ są podzielne przez n. Udowodnij, że liczba $a^{119}-a$ również jest podzielna przez n.

15. Na szachownicy 20×20 umieszczono 48 kwadratów 2×2 tak, że każdy pokrywa 4 pola. Wykaż, że na szachownicy można umieścić jeszcze jeden kwadrat 2×2 tak, by pokrywał 4 wolne pola.

16. Okręgi o_1 i o_2 są styczne zewnętrznie w punkcie B. Prosta przechodząca przez punkt B przecina okręgi o_1 i o_2 odpowiednio w punktach A i C, różnych od B. Okrąg o przechodzi przez punkty A i C i przecina okrąg o_1 w punkcie D. Prosta DB przecina okrąg o w punkcie E. Odcinek EC przecina okrąg o_2 w punkcie F. Udowodnij, że trójkąt BCF jest równoramienny.

17. Niech p, q będą różnymi liczbami pierwszymi większymi od 2. Ile jest liczb całkowitych dodatnich n mniejszych od pq, dla których liczba n^3-n jest podzielna przez pq?

18. Liczby a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta. Wykaż, że

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leqslant abc\,.$$

19. Ile co najwyżej skoczków można ustawić na szachownicy o wymiarach 100×100 tak, by żadne dwa sobie nie zagrażały?

Uwaga: Dwa skoczki zagrażają sobie, gdy stoją na przeciwległych narożnych polach pewnego prostokąta o wymiarach 2×3.

20. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o. Punkt M jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC i półprosta AM przecina okrąg o w punkcie E. Punkt N jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ADC i półprosta AN przecina okrąg o w punkcie F. Wykaż, że jeżeli odcinki ME i NF są równej długości, to $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DAC$.

Mecz matematyczny

21. Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej x istnieje taka dodatnia liczba całkowita $n \leqslant 1000$, że liczba nx ma w zapisie dziesiętnym na trzech pierwszych miejscach po przecinku same dziewiątki lub same zera.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

22. W kole o promieniu 18 wybrano 2267 punktów. Wykaż, że istnieje pierścień o promieniach 1 i 2, który zawiera nie mniej niż 18 spośród tych punktów.

23. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach K, L, M. Punkty P, Q, R są środkami okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty ALM, BMK, CKL. Wykaż, że proste KP, LQ, MR przecinają się w jednym punkcie.

24. Dany jest trójkąt ABC. Punkt X należy do boku AB tego trójkąta. Wspólna zewnętrzna styczna do okręgów wpisanych w trójkąty AXC i BXC, różna od prostej AB, przecina odcinek CX w punkcie Y. Wykaż, że długość odcinka CY nie zależy od wyboru punktu X.

25. Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest trójkąt prostokątny BCD o kącie prostym przy wierzchołku D. Punkt B jest spodkiem wyskości tego ostrosłupa. Dane są $BD=p$, $CD=q$, $AB=s$. Oblicz promień sfery wpisanej w ten ostrosłup.

26. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych a, b, c spełniających warunek $a+b+c \geqslant 0$ zachodzi nierówność

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geqslant abc\,.$$

27. W każde pole szachownicy 13×13 wkręcono żarówkę. W jednym ruchu można zmienić stan (zapalona / zgaszona) 4 żarówek zajmujących kwadrat 2×2 lub 81 żarówek zajmujących kwadrat 9×9. Czy zaczynając od dowolnego układu można za pomocą takich ruchów zgasić wszystkie żarówki?

28. Na okręgu znajduje się $n \geqslant 4$ lamp. Przy każdej z nich znajduje się przełącznik, który zmienia stan (zapalona / zgaszona) tej lampy i jej dwóch sąsiadów. Na początku jedna lampa jest zapalona, a pozostałe są zgaszone. Dla których n można za pomocą przełączników doprowadzić do tego, by wszystkie lampy były zgaszone?

29. Rozstrzygnij, czy jest wymierna liczba $0,11235831459\ldots$, której każda cyfra, począwszy od trzeciej po przecinku, jest cyfrą jedności sumy dwóch cyfr poprzednich.

30. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $\left(n^2\right)!$ jest podzielna przez $(n!)^{n+1}$.

31. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n>1$ liczba n^4+4^n jest złożona.