X Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia pierwszego – część testowa

(27 listopada 2014 r.)

Rozwiązania zadań testowych

1. Istnieje ostrosłup, który ma dokładnie 15^{14}

T a) wierzchołków;

N b) krawędzi;

T c) ścian.

Komentarz

a), c) Ostrosłup o podstawie n-kąta ma $n+1$ wierzchołków oraz $n+1$ ścian. Wobec tego dla $n=15^{14}-1$ otrzymujemy ostrosłup o 15^{14} wierzchołkach i 15^{14} ścianach.

b) Ostrosłup o podstawie n-kąta ma $2n$ krawędzi. W każdym ostrosłupie liczba krawędzi jest więc parzysta, podczas gdy 15^{14} nie jest liczbą parzystą.

2. Mieszając w odpowiednich proporcjach roztwory soli kuchennej w wodzie, o stężeniach 10% i 30%, można otrzymać roztwór o stężeniu

T a) 20%;

T b) 27%;

N c) 40%.

Komentarz

W a jednostkach roztworu o stężeniu $p\%$ znajduje się $\frac{a\cdot p}{100}$ jednostek soli. W takim razie mieszając a_1 jednostek roztworu o stężeniu $p_1\%$ oraz a_2 jednostek roztworu o stężeniu $p_2\%$, otrzymujemy a_1+a_2 jednostek roztworu, w którym liczba jednostek soli jest równa

$$\frac{a_1\cdot p_1}{100}+\frac{a_2\cdot p_2}{100}\,.$$

To oznacza, że po zmieszaniu uzyskujemy roztwór o stężeniu

$$\frac{a_1\cdot p_1+a_2\cdot p_2}{100\cdot(a_1+a_2)}\cdot 100\%=\left(\frac{a_1\cdot p_1+a_2\cdot p_2}{a_1+a_2}\right)\%\,.$$

a) W wyniku zmieszania jednej jednostki roztworu o stężeniu 10% z jedną jednostką roztworu o stężeniu 30% otrzymamy roztwór o stężeniu

$$\left(\frac{1\cdot 10+1\cdot 30}{2}\right)\%=20\%\,.$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

b) W wyniku zmieszania trzech jednostek roztworu o stężeniu 10% z siedemnastoma jednostkami roztworu o stężeniu 30% otrzymamy roztwór o stężeniu

$$\left(\frac{3\cdot 10+17\cdot 30}{20}\right)\% = 27\%\,.$$

c) Mieszając dane roztwory, otrzymamy roztwór o stężeniu mniejszym od 30%. Rzeczywiście, w wyniku zmieszania a_1 jednostek roztworu o stężeniu 10% z a_2 jednostkami roztworu o stężeniu 30% uzyskujemy roztwór o stężeniu

$$\left(\frac{a_1\cdot 10+a_2\cdot 30}{a_1+a_2}\right)\% < \left(\frac{a_1\cdot 30+a_2\cdot 30}{a_1+a_2}\right)\% = 30\%\,.$$

W związku z tym nie można otrzymać roztworu o stężeniu 40%.

3. Nierówność $(x-4)(x-9)>0$ jest prawdziwa dla

T a) $x=\sqrt{3}$;

T b) $x=\sqrt{7}$;

N c) $x=\sqrt{17}$.

Komentarz

Dana nierówność jest prawdziwa, gdy obie liczby $x-4$, $x-9$ są ujemne lub gdy obie są dodatnie. Pierwszy warunek oznacza, że $x<4$, a drugi jest spełniony jedynie dla $x>9$. Wobec tego dana nierówność jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy $x<4$ lub $x>9$.

a) Jeśli $x=\sqrt{3}$, to $x<\sqrt{16}=4$.

b) Jeśli $x=\sqrt{7}$, to $x<\sqrt{16}=4$.

c) Jeśli $x=\sqrt{17}$, to $x>\sqrt{16}=4$ oraz $x<\sqrt{81}=9$.

4. Cyfry 1, 2, 3, 4, 5, 6 można ustawić w takiej kolejności, aby otrzymać liczbę sześciocyfrową, która jest

T a) podzielna przez 5;

N b) podzielna przez 9;

N c) liczbą pierwszą.

Komentarz

a) Ostatnią cyfrą liczby 123465 jest 5, więc jest to liczba podzielna przez 5.

b) Dowolna liczba n, której cyframi są 1, 2, 3, 4, 5, 6 w pewnej kolejności, ma sumę cyfr równą $1+2+3+4+5+6=21$. Liczba 21 nie jest podzielna przez 9, więc korzystając z cechy podzielności przez 9, wnosimy, że liczba n również nie może być podzielna przez 9.

c) Każda liczba sześciocyfrowa składająca się z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6 ma sumę cyfr równą 21. Liczba 21 jest podzielna przez 3, więc liczba sześciocyfrowa o sumie cyfr równej

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

21 również jest podzielna przez 3. Taka liczba, jako większa od 3, nie może być liczbą pierwszą.

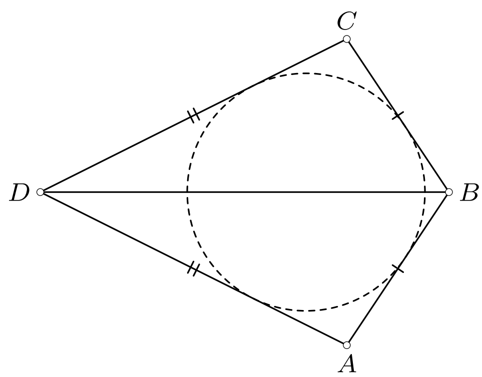
5. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest opisany na okręgu i $AB=BC$. Wynika z tego, że

N	a) $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC$;
T	b) $CD=DA$;
N	c) czworokąt $ABCD$ jest rombem.

Komentarz

b) Skoro czworokąt $ABCD$ jest opisany na okręgu, to $AB+CD=BC+DA$. Stąd wynika, że jeśli $AB=BC$, to $CD=DA$.

a) Rozpatrzmy trójkąt ABD, w którym $AB<AD$. Niech C będzie obrazem symetrycznym punktu A względem prostej BD (rys. 1). Wówczas $AB+CD=BC+DA$, a więc czworokąt $ABCD$ jest opisany na okręgu. Ponadto, skoro $AB<AD$, to $\sphericalangle ABD > \sphericalangle ADB$. Mnożąc tę nierówność stronami przez 2, uzyskujemy $\sphericalangle ABC > \sphericalangle ADC$.



rys. 1

c) Czworokąt $ABCD$ zbudowany punkcie a) spełnia warunki zadania, ale nie jest rombem.

6. Iloczyn $a{\cdot}b$ liczb całkowitych a, b jest podzielny przez 400. Wynika z tego, że co najmniej jedna z liczb a, b jest podzielna przez

T	a) 5;
N	b) 8;
N	c) 10.

Komentarz

a) Gdyby żadna z liczb a, b nie była podzielna przez 5, iloczyn $a{\cdot}b$ tych liczb również nie mógłby być podzielny przez 5, a tym bardziej przez 400.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

b) Jeżeli $a=4$, $b=100$, to $a\cdot b=400$ jest liczbą podzielną przez 400, ale żadna z liczb a, b nie jest podzielna przez 8.

c) Jeżeli $a=16$, $b=25$, to $a\cdot b=400$ jest liczbą podzielną przez 400, ale żadna z liczb a, b nie jest podzielna przez 10.

7. W trójkącie ABC punkt M jest środkiem boku AB, a punkt D jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka C. Wynika z tego, że

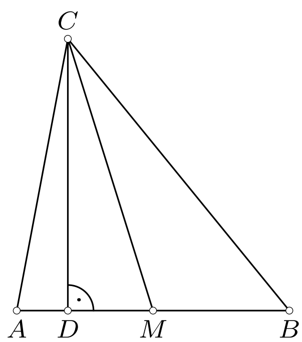
N a) $2\cdot DM < AB$;

T b) $CD \leqslant AC$ oraz $CD \leqslant BC$;

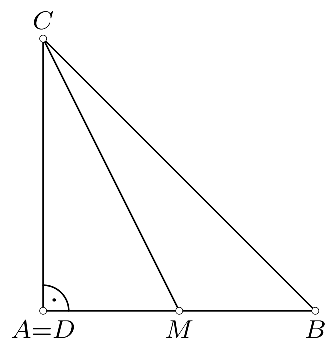
N c) $CM < AC$ oraz $CM < BC$.

Komentarz

b) Jeżeli punkty A i D pokrywają się, to $CD=CA$. W przeciwnym wypadku odcinek CD jest przyprostokątną trójkąta prostokątnego CDA, więc długość tego odcinka jest mniejsza od długości przeciwprostokątnej CA tego trójkąta, czyli $CD<CA$ (rys. 2). Wobec tego $CD \leqslant AC$. Analogicznie uzasadniamy, że $CD \leqslant CB$.



rys. 2



rys. 3

a), c) Niech ABC będzie równoramiennym trójkątem prostokątnym o kącie prostym przy wierzchołku A (rys. 3). Wówczas punkty A i D pokrywają się, więc $2DM=2AM=AB$. Odcinek CA jest przyprostokątną trójkąta prostokątnego CAM, więc jego długość jest mniejsza od długości przeciwprostokątnej tego trójkąta, czyli $CM>AC$.

8. Punkt P znajduje się wewnątrz prostokąta $ABCD$ o polu 1, przy czym $AB>BC$. Wynika z tego, że

T a) co najmniej jeden z trójkątów ABP, BCP, CDP, DAP ma pole mniejsze od $0{,}26$;

N b) suma pól trójkątów ABP i CDP jest większa od $0{,}5$;

N c) suma pól trójkątów ABP i BCP jest większa od $0{,}5$.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja

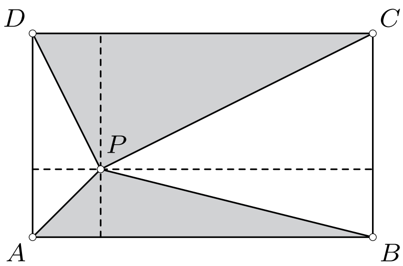
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Komentarz

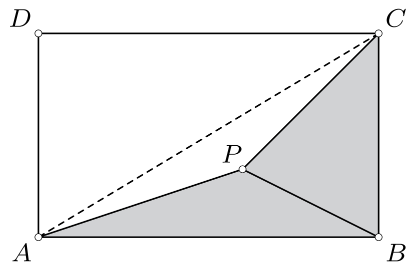
a) Gdyby każdy z omawianych czterech trójkątów miał pole równe co najmniej $0,26$, to suma pól tych trójkątów byłaby nie mniejsza od $4 \cdot 0,26 = 1,04$. Tymczasem suma pól tych trójkątów jest równa polu prostokąta $ABCD$, jest więc równa 1.

b) Udowodnimy, że niezależnie od wyboru punktu P suma pól trójkątów ABP i CDP jest równa $0,5$.

Podzielmy prostokąt $ABCD$ na cztery mniejsze prostokąty prostymi przechodzącymi przez punkt P (rys. 4). Każdy z otrzymanych mniejszych prostokątów możemy podzielić przekątną na dwa trójkąty przystające, a więc trójkąty o równych polach, z których jeden kolorujemy na szaro, a drugi na biało. Suma pól trójkątów ABP i CDP, czyli szara powierzchnia, stanowi więc połowę pola prostokąta $ABCD$.



rys. 4



rys. 5

c) Jeżeli punkt P należy do wnętrza trójkąta ABC (rys. 5), to suma pól trójkątów ABP i BCP jest mniejsza od pola trójkąta ABC, równego $0,5$.

9. Na tablicy napisano siedem różnych liczb całkowitych. Wynika z tego, że

N a) suma pewnych trzech spośród nich jest podzielna przez 2;

T b) suma pewnych czterech spośród nich jest podzielna przez 2;

T c) suma pewnych trzech spośród nich jest podzielna przez 3.

Komentarz

a) Jeżeli na tablicy znajduje się siedem liczb nieparzystych, to suma każdych trzech spośród nich jest liczbą nieparzystą.

b) Wśród każdych siedmiu liczb całkowitych są co najmniej cztery liczby parzyste lub co najmniej cztery liczby nieparzyste. Rzeczywiście, gdyby zarówno liczb parzystych, jak i nieparzystych było co najwyżej trzy, to łącznie na tablicy mogłoby być napisanych co najwyżej sześć liczb, podczas gdy jest ich siedem. Pozostaje zauważyć, że suma czterech liczb parzystych oraz suma czterech liczb nieparzystych są liczbami parzystymi.

c) Wśród każdych siedmiu liczb całkowitych są co najmniej trzy liczby dające tę samą resztę przy dzieleniu przez 3. Rzeczywiście, gdyby każdą z trzech możliwych reszt dawały co najwyżej dwie liczby, to łącznie na tablicy mogłoby być napisanych co najwyżej sześć liczb, podczas gdy jest ich siedem. Pozostaje zauważyć, że suma trzech liczb dających tę samą resztę przy dzieleniu przez 3 jest podzielna przez 3.

10. Liczba $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{2}$ jest

N a) całkowita;

T b) niewymierna;

T c) większa od $1,8$.

Komentarz

Oznaczmy daną liczbę przez a. Ponieważ $1-\sqrt{2}<0$, więc $|1-\sqrt{2}|=\sqrt{2}-1$. Wobec tego

$$a=\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{2}=|1-\sqrt{2}|+\sqrt{2}=\sqrt{2}-1+\sqrt{2}=2\sqrt{2}-1\,.$$

a), b) Gdyby liczba a była wymierna, to również liczba $\frac{a+1}{2}=\sqrt{2}$ musiałaby być wymierna. Jednak liczba $\sqrt{2}$ jest niewymierna, więc liczba a także musi być niewymierna.

c) Prawdziwa jest nierówność $\sqrt{2}>\sqrt{1,96}=1,4$. Stąd wynika, że

$$a=2\sqrt{2}-1>2\cdot 1,4-1=1,8.$$

11. W trójkącie równoramiennym ABC o podstawie AB punkt M jest środkiem ramienia BC. Wynika z tego, że

T a) $2\cdot AM<3\cdot BC$;

T b) pola trójkątów ABM i ACM są równe;

N c) $\sphericalangle CAM=\frac{1}{2}\sphericalangle CAB$.

Komentarz

a) Z nierówności trójkąta dla trójkąta CAM wynika, że

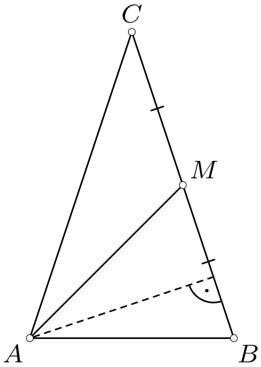
$$AM<AC+CM=BC+\tfrac{1}{2}BC=\tfrac{3}{2}BC, \quad \text{skąd} \quad 2\cdot AM<3\cdot BC\,.$$

b) Trójkąty ABM i ACM mają równe podstawy $MB=MC$ oraz tę samą wysokość poprowadzoną na te podstawy (rys. 6). Stąd wniosek, że trójkąty te mają równe pola.

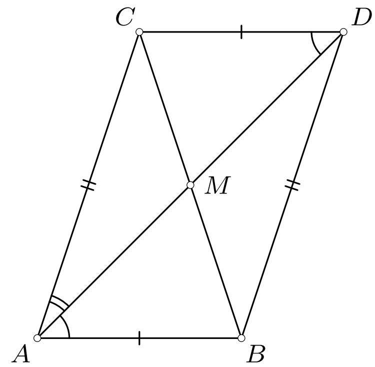
c) Niech ABC będzie trójkątem równoramiennym o podstawie AB, w którym podstawa AB jest krótsza od ramienia AC. Wykażemy, że wówczas $\sphericalangle CAM<\frac{1}{2}\sphericalangle CAB$.

Niech D będzie takim punktem, że czworokąt $ABDC$ jest równoległobokiem (rys. 7). Wówczas $DC<AC$, a więc $\sphericalangle CAM<\sphericalangle CDA=\sphericalangle MAB$. Wobec tego

$$2\sphericalangle CAM<\sphericalangle CAM+\sphericalangle MAB=\sphericalangle CAB\,.$$



rys. 6



rys. 7

12. Istnieje n-kąt wypukły ($n \geqslant 4$), w którym liczba przekątnych

N a) jest potęgą liczby 4 o wykładniku całkowitym dodatnim;

T b) równa jest liczbie wierzchołków;

N c) jest mniejsza od połowy liczby wierzchołków.

Komentarz

Wykażemy, że liczba przekątnych n-kąta wypukłego jest równa $\frac{1}{2}n(n-3)$.

Każdy z wierzchołków n-kąta wypukłego jest końcem dokładnie $n-3$ przekątnych tego wielokąta. Stąd wniosek, że wszystkie przekątne mają łącznie dokładnie $n(n-3)$ końców. Skoro każda przekątna ma dwa końce, to przekątnych jest $\frac{1}{2}n(n-3)$.

a) Przypuśćmy, że dla pewnej liczby całkowitej dodatniej k zachodzi równość

$$\frac{1}{2}n(n-3) = 4^k, \quad \text{czyli} \quad n(n-3) = 2^{2k+1}.$$

Liczby całkowite dodatnie n, $n-3$ różnią się o 3, więc jedna z tych liczb jest parzysta, a druga — nieparzysta. Jedynym nieparzystym dzielnikiem liczby 2^{2k+1} jest liczba 1, skąd wniosek, że $n-3=1$, czyli $n=4$. Jednak liczba przekątnych czworokąta wypukłego jest równa 2, a 2 nie jest potęgą liczby 4 o wykładniku całkowitym. Uzyskana sprzeczność oznacza, że nie istnieje liczba k o szukanych własnościach.

b) Każdy pięciokąt wypukły ma dokładnie 5 przekątnych.

c) Ponieważ $n \geqslant 4$, więc $n-3 \geqslant 1$, a zatem $\frac{1}{2}n \cdot (n-3) \geqslant \frac{1}{2}n$. To oznacza, że liczba przekątnych jest nie mniejsza od połowy liczby wierzchołków.

13. Dodatnia liczba całkowita n ma tę własność, że liczba $\sqrt{2+\sqrt{4+n}}$ jest naturalna. Wynika z tego, że liczba n jest

N a) podzielna przez 2;

T b) podzielna przez 3;

T c) większa od $\sqrt{2014}$.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Komentarz

Oznaczmy $k=\sqrt{2+\sqrt{4+n}}$. Przekształcając tę równość, otrzymujemy kolejno:

$$k^2=2+\sqrt{4+n},$$
$$k^2-2=\sqrt{4+n},$$
$$k^4-4k^2+4=4+n,$$
$$k^2(k^2-4)=n,$$
$$k^2(k-2)(k+2)=n.$$

b) Jeżeli k jest liczbą naturalną, to jedna z liczb $k-2$, k, $k+2$ jest podzielna przez 3. Rzeczywiście, jeżeli k daje resztę 1 przy dzieleniu przez 3, to liczba $k+2$ jest podzielna przez 3, a jeżeli k daje resztę 2 przy dzieleniu przez 3, to liczba $k-2$ jest podzielna przez 3. Stąd wniosek, że iloczyn $k^2(k-2)(k+2)$ jest liczbą podzielną przez 3 dla każdej liczby naturalnej k.

c) Liczba $n=k^2(k-2)(k+2)$ jest dodatnia, skąd wynika, że $k\geqslant 3$. Wobec tego

$$n=k^2(k-2)(k+2)\geqslant 3^2\cdot(3-2)(3+2)=45=\sqrt{2025}>\sqrt{2014}.$$

a) Dla liczby nieparzystej $n=45$ liczba

$$\sqrt{2+\sqrt{4+45}}=\sqrt{2+\sqrt{49}}=\sqrt{2+7}=\sqrt{9}=3$$

jest naturalna.

14. Liczba $\dfrac{2+\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}}\cdot\dfrac{3+\sqrt{15}}{5+\sqrt{15}}\cdot\dfrac{5+\sqrt{10}}{2+\sqrt{10}}$ jest

T a) wymierna;

N b) większa od 1;

N c) równa $\sqrt{30}$.

Komentarz

$$\frac{2+\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}}\cdot\frac{3+\sqrt{15}}{5+\sqrt{15}}\cdot\frac{5+\sqrt{10}}{2+\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}\cdot\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{\sqrt{5}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}\cdot\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{5})}=1\,.$$

15. Ostrosłup o podstawie będącej 10-kątem wypukłym rozcięto płaszczyzną otrzymując w przekroju pewien wielokąt. Wynika z tego, że

N a) wielokąt ten ma co najwyżej 10 wierzchołków;

N b) co najmniej jeden z wielościanów, na które został rozcięty dany ostrosłup, ma więcej niż 7 wierzchołków;

N c) co najmniej jeden z wielościanów, na które został rozcięty dany ostrosłup, jest ostrosłupem.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

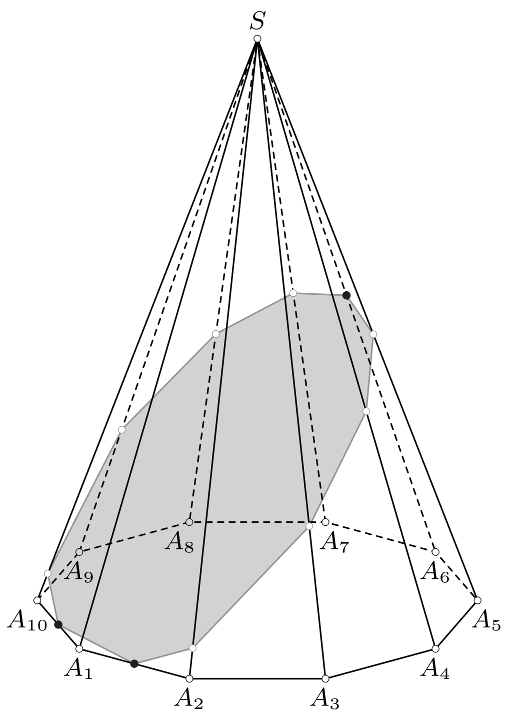
Komentarz

Rozważmy ostrosłup prawidłowy o podstawie dziesięciokąta foremnego $A_1A_2\ldots A_{10}$ oraz wierzchołku S.

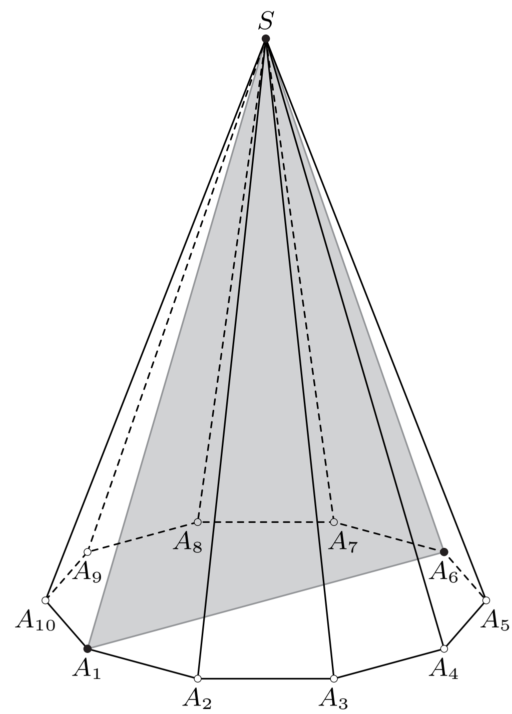
a) Przetnijmy ostrosłup płaszczyzną przechodzącą przez środki krawędzi A_1A_{10}, A_1A_2 oraz A_6S (rys. 8). Płaszczyzna ta przecina 11 krawędzi wyjściowego ostrosłupa, więc w przekroju otrzymujemy pewien 11-kąt wypukły.

c) Żadna z brył otrzymanych z przecięcia opisanego w poprzednim punkcie nie jest ostrosłupem. Jedna z tych brył ma dwie ściany 11-kątne, a każdy ostrosłup ma co najwyżej jedną ścianę nie będącą trójkątem. Druga z otrzymanych brył ma dwie ściany czworokątne i jedną jedenastokątną, więc również nie może być ostrosłupem.

b) Przetnijmy ostrosłup płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołki A_1, A_6 oraz S (rys. 9). Wtedy każda z otrzymanych brył ma dokładnie 7 wierzchołków.



rys. 8



rys. 9