



Zestaw 1

1. W wierszu zapisano kolejno 2010 liczb. Pierwsza zapisana liczba jest równa 7 oraz suma każdych kolejnych siedmiu liczb jest równa 77. Ile może być równa ostatnia z zapisanych liczb?

2. Na okręgu o promieniu 1 opisano trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C . Na przeciwprostokątnej AB tego trójkąta wybrano takie punkty D i E , że zachodzą równości $AD = AC$ i $BE = BC$. Oblicz długość odcinka DE .

3. Wyznacz liczbę par (x, y) liczb całkowitych spełniających równanie

$$x^4 = y^4 + 1223334444.$$

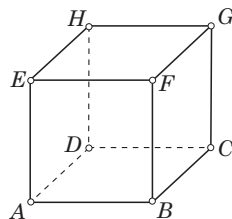
4. W pudełku znajduje się 11 kul białych i 11 kul niebieskich. Jaś i Małgosia grają w następującą grę, którą rozpoczyna Małgosia. Wyjmuje ona z tego pudełka wybrane przez siebie dwie kule. Jeżeli wybierze kule jednakowego koloru, to do pudełka dokłada jedną kulę białą; jeżeli wybierze kule różnych kolorów, to dokłada kulę niebieską. Następnie swój ruch, według tych samych zasad, wykonuje Jaś i znów Małgosia, znów Jaś itd., aż w końcu w pudełku zostanie tylko jedna kula. Jeżeli ta kula będzie biała, wygrywa Małgosia. W przeciwnym wypadku wygrywa Jaś. Czy Małgosia może tak prowadzić tę grę, aby wygrać? Odpowiedź uzasadnij.

5. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} a^2 + 24 = 9b + \frac{a+c}{2} \\ b^2 + 25 = 9c + \frac{b+a}{2} \\ c^2 + 26 = 9a + \frac{c+b}{2} \end{cases}$$

6. Dany jest sześcian $ABCDEFGH$. Na krawędziach AE , BC i GH tego sześcianu wybrano odpowiednio takie punkty M , N i P , że $AM = CN = HP$.

Wykaż, że trójkąt MNP jest trójkątem równobocznym.



7. Powiemy, że liczba całkowita n jest liczbą *stoneczną*, jeżeli $n = a^2 + 5b^2$, gdzie liczby a i b są liczbami całkowitymi różnymi od zera. Wykaż, że jeżeli liczba n jest liczbą *stoneczną*, to liczba n^4 też jest liczbą *stoneczną*,