



Zestaw 10

1. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} (x+y)(x+y+z) = 72 \\ (y+z)(x+y+z) = 120 \\ (z+x)(x+y+z) = 96. \end{cases}$$

Wskazówka

Dodaj równania danego układu stronami i wyłącz przed nawias wspólny czynnik, którym jest wyrażenie $x+y+z$.

2. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b zachodzi nierówność:

$$a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b.$$

Wskazówka

Najpierw udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych a , b i c prawdziwa jest nierówność $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

3. Mały majsterkowicz Kazio przygotował na szkolną dyskotekę efekty świetlne własnego pomysłu. Żarówki, których jest 1000 i które są ponumerowane liczbami od 1 do 1000, są włączane i wyłączane specjalnym przełącznikiem. Kolejne k -te naciśnięcie przełącznika zmienia stan wszystkich żarówek o numerach podzielnych przez k . Na początku dyskoteki wszystkie żarówki były wyłączone. Pierwsze naciśnięcie przełącznika zapala wszystkie żarówki. Drugie naciśnięcie gasi wszystkie żarówki o numerach parzystych. Po trzecim użyciu przełącznika świecą się żarówki o numerach nieparzystych i jednocześnie niepodzielnych przez 3 oraz o numerach parzystych i podzielnych przez 3. Pod koniec dyskoteki okazało się, że Kazio naciskał przełącznik 1000 razy. Które żarówki świeciły się po zakończeniu dyskoteki?

Wskazówka

Przeanalizuj, co dzieje się z jedną konkretną żarówką podczas całej dyskoteki. Ile razy zmienia się jej stan?

4. Czy istnieją takie dwie liczby x i y , aby jednocześnie zachodziły równości:

$$x(y-x) = 3 \quad \text{i} \quad y(4y-3x) = 2.$$

Odpowiedź uzasadnij.

Wskazówka

Odejmij równania stronami.

5. Punkt C leży wewnątrz odcinka AB . Niech okręgi o_1 , o_2 i o będą okręgami o średnicach odpowiednio AC , BC i AB . Prosta k przechodzi przez punkt C i przecina okręgi w pięciu punktach D , E , C , F , G , położonych na tej prostej w wymienionej kolejności. Wykaż, że odcinki DE i FG są równej długości.

Wskazówka

Niech punkt E należy do okręgu o_1 , a punkt F — do okręgu o_2 . Pod jakim kątem prosta EF przecina proste AE i BF ?

6. Pewna liczba naturalna w układzie dziesiętnym ma postać $\overline{x0yz}$, gdzie x , y , z są cyframi oraz $x > 0$. Liczba ta podzielona przez pewną liczbę naturalną n daje iloraz, który w układzie dziesiętnym jest postaci \overline{xyz} . Znaleźć x , y , z oraz n .

Wskazówka

Uzasadnij, że n jest liczbą należącą do zbioru $\{6, 7, 8, 9, 10\}$, a następnie rozpatrz każdy z tych przypadków.

7. Rozstrzygnij czy istnieje wielościan o sześciu ścianach i siedmiu wierzchołkach.

Wskazówka

Taki wielościan istnieje.