

X CZESKO-POLSKO-SŁOWACKIE ZAWODY MATEMATYCZNE JUNIORÓW

KARLOV POD PRADĚDEM (CZECHY), 16 MAJA 2022 R.

ZAWODY INDYWIDUALNE



SZKICE ROZWIĄZAŃ ZADAŃ

1. Niech $n \geq 3$. Przypuśćmy, że a_1, a_2, \dots, a_n są n parami różnymi liczbami rzeczywistymi. Wyznacz, w zależności od n , najmniejszą możliwą liczbę różnych wartości przyjmowanych przez następujące n liczb:

$$a_1 + a_2, \quad a_2 + a_3, \quad \dots, \quad a_{n-1} + a_n, \quad a_n + a_1.$$

Szkic rozwiązania

Udowodnimy, że dla każdej liczby całkowitej $n \geq 3$ szukana najmniejsza możliwa różnica wartości jest równa **3**.

Przyjmijmy oznaczenia $s_1 = a_1 + a_2, s_2 = a_2 + a_3, \dots, s_n = a_n + a_1$. Zauważmy, że jeżeli $s_1 = s_2$, to $a_1 = a_3$, co przeczy założeniu, że dane liczby są parami różne. Wobec tego $s_1 \neq s_2$, czyli wśród liczb s_1, s_2, \dots, s_n występują *co najmniej* dwie różne wartości.

Przypuśćmy, że istnieje układ liczb a_1, a_2, \dots, a_n , dla którego wśród liczb s_1, s_2, \dots, s_n pojawiają się *dokładnie* dwie różne wartości: $s_1 = A$ oraz $s_2 = B$. Rozumując podobnie jak w poprzednim akapicie, możemy uzasadnić, że $s_2 \neq s_3$, skąd $s_3 = A$. Analogicznie wnioskujemy, że $s_4 = B, s_5 = A$ itd.

Jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to $s_n = A = s_1$, skąd otrzymujemy $a_n = a_2$, co przeczy założeniu, że liczby a_n oraz a_2 są różne. Pozostał do rozważenia przypadek, gdy n jest liczbą parzystą, czyli $n = 2k$ dla pewnej liczby całkowitej $k \geq 2$. Wówczas

$$\begin{aligned} k \cdot A &= s_1 + s_3 + s_5 + \dots + s_{2k-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2k-1} + a_{2k} = \\ &= a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{2k} + a_1 = s_2 + s_4 + s_6 + \dots + s_{2k} = k \cdot B, \end{aligned}$$

skąd $A = B$, co przeczy założeniu, że wartości A i B są różne. Tym samym udowodniliśmy, że dla żadnego $n \geq 3$ nie jest możliwe, aby wśród liczb s_1, s_2, \dots, s_n występowały dokładnie dwie różne wartości.

Pozostaje udowodnić, że dla każdego $n \geq 3$ można wskazać przykład układu liczb a_1, a_2, \dots, a_n , dla którego uzyskujemy dokładnie trzy różne wartości spośród s_1, s_2, \dots, s_n . W tym celu wystarczy przyjąć na przykład

$$a_1 = 1, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = 2, \quad a_4 = -2, \quad a_5 = 3, \quad a_6 = -3, \quad \dots$$

Wówczas dla każdej dodatniej liczby nieparzystej i mniejszej od n mamy $s_i = 0$, dla każdej dodatniej liczby parzystej i mniejszej od n mamy $s_i = 1$ i wreszcie

$$s_n = \begin{cases} 1 - \frac{n}{2} & \text{jeśli } n \text{ jest liczbą parzystą;} \\ \frac{n+3}{2} & \text{jeśli } n \text{ jest liczbą nieparzystą.} \end{cases}$$

2. Rozwiąż w liczbach całkowitych następujący układ równań:

$$\begin{cases} x^2 = yz + 1, \\ y^2 = zx + 1, \\ z^2 = xy + 1. \end{cases}$$

Szkic rozwiązania

Udowodnimy, że jedynymi rozwiązaniami danego układu są trójki (x, y, z) , w których występują (w dowolnej kolejności) liczby $-1, 0, 1$.

Przypuśćmy, że trójka liczb całkowitych (x, y, z) spełnia dany układ równań.

Sposób I

Przekształcając wyjściowy układ równań, uzyskujemy

$$\begin{cases} x^2 - 1 = yz, \\ y^2 - 1 = zx, \\ z^2 - 1 = xy. \end{cases}$$

Mnożąc wszystkie powyższe równości stronami, otrzymujemy

$$(x^2 - 1)(y^2 - 1)(z^2 - 1) = x^2 y^2 z^2.$$

Przypuśćmy, że $xyz \neq 0$. Dzieląc powyższe równanie stronami przez $x^2 y^2 z^2$, uzyskujemy

$$\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \left(1 - \frac{1}{y^2}\right) \left(1 - \frac{1}{z^2}\right) = 1. \quad (1)$$

Zauważmy, że skoro $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, to

$$0 \leq 1 - \frac{1}{x^2} < 1, \quad 0 \leq 1 - \frac{1}{y^2} < 1 \quad \text{oraz} \quad 0 \leq 1 - \frac{1}{z^2} < 1.$$

Mnożąc powyższe trzy nierówności stronami otrzymujemy

$$\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \left(1 - \frac{1}{y^2}\right) \left(1 - \frac{1}{z^2}\right) < 1,$$

co przeczy równości (1).

Wobec tego pewna spośród liczb x , y , z jest równa 0. Jeśli $x = 0$, to drugie i trzecie równanie początkowego układu implikuje, że $|y| = |z| = 1$. Z pierwszego równania mamy zaś $yz = -1$. Stąd otrzymujemy trójki rozwiązań $(x, y, z) = (0, 1, -1)$ oraz $(x, y, z) = (0, -1, 1)$, które w istocie spełniają początkowy układ. Analogiczne rozumowanie w przypadkach $y = 0$ oraz $z = 0$, prowadzi do rozwiązań $(1, 0, -1)$, $(-1, 0, 1)$, $(1, -1, 0)$, $(-1, 1, 0)$.

Sposób II

Mnożąc obie strony pierwszego równania wyjściowego układu przez y , drugiego przez z , a trzeciego przez x , otrzymujemy

$$\begin{cases} x^2 y = y^2 z + y, \\ y^2 z = z^2 x + z, \\ z^2 x = x^2 y + x. \end{cases}$$

Dodając te trzy równości stronami, uzyskujemy

$$x + y + z = 0. \quad (2)$$

Podstawiając $x = -y - z$ do pierwszego równania wyjściowego układu, otrzymujemy

$$yz + 1 = x \cdot x = x \cdot (-y - z) = -xy - zx,$$

czyli

$$xy + yz + zx = -1.$$

Z połączenia powyższej równości z równością (2) płynie wniosek, że

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) = 2.$$

Wobec tego, skoro liczby x , y , z są całkowite, to pewna z nich wynosi 0. Dalszą część rozwiązania przeprowadzamy tak jak w poprzednim sposobie.

3. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym

$$\sphericalangle A = 60^\circ, \quad \sphericalangle B = 100^\circ, \quad \sphericalangle C = 140^\circ.$$

Wykaż, że pięciokąt ten można umieścić w kole o promieniu $\frac{2}{3}AD$.

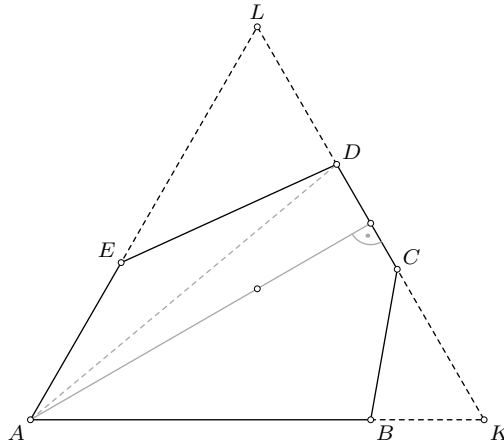
Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez K i L punkty przecięcia prostej CD odpowiednio z prostymi AB i AE . Ponieważ $\sphericalangle KAL = 60^\circ$ oraz

$$\sphericalangle AKL = 180^\circ - \sphericalangle KBC - \sphericalangle KCB = 180^\circ - 80^\circ - 40^\circ = 60^\circ,$$

więc trójkąt AKL jest równoboczny.

Zauważmy, że odcinek AD , łączący w trójkącie AKL wierzchołek A z pewnym punktem na przeciwległym boku, ma długość nie mniejszą niż odległość punktu A od boku KL , czyli nie mniejszą niż wysokość trójkąta AKL . Z kolei promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym AKL ma długość równą $\frac{2}{3}$ wysokości tego trójkąta.



Łącząc obserwacje z poprzedniego akapitu, uzyskujemy, że długość promienia okręgu opisanego na trójkącie AKL jest nie większa od $\frac{2}{3}AD$. Wynika stąd teza zadania, gdyż pięciokąt $ABCDE$ jest zawarty w kole okręgu opisanego na trójkącie AKL , a to koło albo ma promień $\frac{2}{3}AD$, albo ma mniejszy promień (i wówczas można je umieścić w kole o promieniu $\frac{2}{3}AD$).

4. Niech a, b będą dodatnimi liczbami całkowitymi o tej własności, że $\frac{a}{b} > \sqrt{2}$. Wykaż, że

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{2ab} > \sqrt{2}.$$

Szkic rozwiązania

Sposób I

Założenie $\frac{a}{b} > \sqrt{2}$ można przekształcić do postaci $a^2 > 2b^2$. Ponieważ liczby a^2 oraz $2b^2$ są całkowite, więc oznacza to, że $a^2 \geq 2b^2 + 1$, skąd

$$(a - b\sqrt{2})(a + b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2 \geq 1, \quad \text{czyli} \quad a - b\sqrt{2} \geq \frac{1}{a + b\sqrt{2}}.$$

Wobec tego możemy zapisać

$$\frac{a}{b} - \sqrt{2} = \frac{a - b\sqrt{2}}{b} \geq \frac{1}{b(a + b\sqrt{2})} > \frac{1}{b(a + a)} = \frac{1}{2ab},$$

przy czym druga nierówność wynika z założenia $b\sqrt{2} < a$. To kończy rozwiązanie.

Sposób II

Mnożąc dowodzoną nierówność obustronnie przez liczbę $2ab$, a następnie podnosząc obie strony do kwadratu, uzyskujemy równoważną postać

$$(2a^2 - 1)^2 > (2\sqrt{2}ab)^2, \quad \text{czyli} \quad 4a^4 - 4a^2 + 1 > 8a^2b^2.$$

Podobnie jak w poprzednim sposobie zauważamy, że $a^2 \geq 2b^2 + 1$, czyli $a^2 - 1 \geq 2b^2$. Stąd otrzymujemy

$$4a^4 - 4a^2 + 1 > 4a^4 - 4a^2 = 4a^2(a^2 - 1) \geq 8a^2b^2,$$

co było do udowodnienia.

Sposób III

Przypuśćmy nie wprost, że

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{2ab} \leq \sqrt{2}.$$

Zauważmy, że w powyższej nierówności nie może zachodzić równość, gdyż liczba po lewej stronie jest wymierna, a liczba po prawej stronie jest niewymierna. To oznacza, że

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{2ab} < \sqrt{2}, \quad \text{czyli} \quad a - \frac{1}{2a} < b\sqrt{2}.$$

W połączeniu z założeniem $a > b\sqrt{2}$, otrzymujemy

$$a - \frac{1}{2a} < b\sqrt{2} < a.$$

Podnosząc do kwadratu trzy powyższe wyrażenia, mamy

$$a^2 - 1 + \frac{1}{4a^2} < 2b^2 < a^2.$$

Stąd wniosek, że liczba całkowita $2b^2$ znajduje się pomiędzy kolejnymi liczbami całkowitymi $a^2 - 1$ oraz a^2 . Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie.

Uwaga

Procedura wielokrotnego zastępowania liczby $\frac{a}{b}$ przez liczbę $\frac{a}{b} - \frac{1}{2ab} = \frac{2a^2-1}{2ab}$ pozwala na szybkie i dokładne przybliżanie pierwiastków z liczb całkowitych liczbami wymiernymi. Konkretnie, można udowodnić, że rozpoczynając od $\frac{a}{b}$ i iterując opisaną powyżej procedurę zastępowania ułamków, uzyskujemy coraz lepsze przybliżenia liczby

$$\frac{\sqrt{a^2-1}}{b}.$$

Przykładowo, rozpoczynając od ułamka $\frac{3}{2}$, możemy w ten sposób przybliżyć liczbę $\sqrt{2}$:

$$\frac{3}{2} \longrightarrow \frac{2 \cdot 3^2 - 1}{2 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{17}{12} \longrightarrow \frac{2 \cdot 17^2 - 1}{2 \cdot 17 \cdot 12} = \frac{577}{408} \longrightarrow \dots$$

Już po dwóch krokach uzyskujemy $\frac{577}{408} \approx 1,414215$, co różni się od $\sqrt{2} \approx 1,414213$ dopiero na szóstej pozycji po przecinku.

5. Liczbę całkowitą $n \geq 1$ nazwiemy *dobrą* jeśli spełniona jest następująca własność:

Jeżeli dodatnia liczba całkowita jest podzielna przez każdą z dziewięciu liczb $n+1, n+2, \dots, n+9$, to jest również podzielna przez liczbę $n+10$.

Ile jest dobrych liczb całkowitych $n \geq 1$?

Szkic rozwiązania

Odpowiedź: Jest dokładnie **38** liczb dobrych.

Udowodnimy, że liczba całkowita $n \geq 1$ jest dobra wtedy i tylko wtedy, gdy każda potęga liczby pierwszej p^α dzieląca $n+10$ spełnia nierówność $p^\alpha \leq 9$.

(\Rightarrow) Przypuśćmy, że liczba n jest dobra. Załóżmy nie wprost, że istnieje taka liczba pierwsza p i wykładnik $\alpha \geq 1$, że

$$p^\alpha \mid n+10 \quad \text{oraz} \quad p^\alpha > 9.$$

Zauważmy, że wówczas żadna z dziewięciu liczb

$$n+1 = (n+10) - 9, \quad n+2 = (n+10) - 8, \quad \dots, \quad n+9 = (n+10) - 1$$

nie jest podzielna przez p^α . Stąd wniosek, że liczba $L = \text{NWW}(n+1, n+2, \dots, n+9)$ również nie jest podzielna przez p^α .

Z drugiej strony, liczba L jest podzielna przez liczby $n+1, n+2, \dots, n+9$. Stąd, skoro liczba n jest dobra, to $n+10$ jest dzielnikiem liczby L . Jednakże $p^\alpha \mid n+10$, zatem $p^\alpha \mid L$, co przeczy konkluzji poprzedniego akapitu.

(\Leftarrow) Załóżmy, że

$$n+10 = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k},$$

przy czym p_1, p_2, \dots, p_k są parami różnymi liczbami pierwszymi oraz $p_i^{\alpha_i} \leq 9$ dla $i = 1, 2, \dots, k$.

Niech N będzie dowolną liczbą całkowitą podzielną przez każdą z liczb $n+1, n+2, \dots, n+9$. Zauważmy, że dla każdego $i = 1, 2, \dots, k$ zachodzą związki

$$p_i^{\alpha_i} \mid n+10 - p_i^{\alpha_i} \quad \text{oraz} \quad n+10 - p_i^{\alpha_i} \in \{n+1, n+2, \dots, n+9\}.$$

Stąd wniosek, że $p_i^{\alpha_i}$ jest również dzielnikiem liczby N . Skoro liczby $p_i^{\alpha_i}$ dla $i = 1, 2, \dots, k$ są parami względnie pierwsze, to

$$n+10 = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} \mid N.$$

Oznacza to, że liczba n jest dobra.

Przypuśćmy, że n jest dobra. Udowodniona charakteryzacja implikuje, że $n+10 = 2^a 3^b 5^c 7^d$ dla pewnych liczb $a \in \{0, 1, 2, 3\}$, $b \in \{0, 1, 2\}$, $c \in \{0, 1\}$, $d \in \{0, 1\}$. Łącznie otrzymujemy więc $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 48$ możliwych wartości liczby $n+10$, jednak dla dziesięciu spośród nich (od 1 do 10) liczba n nie jest dodatnia. Wobec tego liczb dobrych jest dokładnie $48 - 10 = 38$.