X Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne Juniorów

Karlov pod Pradědem (Czechy), 17 maja 2022 r.

Zawody drużynowe

Szkice rozwiązań zadań

1. Wyznacz największą możliwą wartość wyrażenia $ab+bc+2ac$, gdzie a, b, c są nieujemnymi liczbami rzeczywistymi, których suma jest równa 1.

Szkic rozwiązania

Odpowiedź: Największą możliwą wartością wyrażenia $ab+bc+2ac$ jest $\mathbf{\frac{1}{2}}$.

Sposób I

Zauważmy, że skoro $(a-c)^2 \geqslant 0$, to $a^2+c^2 \geqslant 2ac$. Stąd wniosek, że

$$\frac{1}{2} = \frac{(a+b+c)^2}{2} = \frac{a^2+c^2}{2} + \frac{b^2}{2} + ab+bc+ca \geqslant ab+bc+2ac + \frac{b^2}{2} \geqslant ab+bc+2ac.$$

Wobec tego wartość wyrażenia $ab+bc+2ac$ jest nie większa od $\frac{1}{2}$. Wartość ta jest osiągana dla trójki $(a,b,c) = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$.

Sposób II

Podstawiając $b = 1-a-c$ w danym wyrażeniu, uzyskujemy

$$ab+bc+2ac = a(1-a-c)+c(1-a-c)+2ac = a-a^2+c-c^2 = \frac{1}{2} - \left(a-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(c-\frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}.$$

Podobnie jak w poprzednim sposobie stwierdzamy, że równość w powyższej nierówności zachodzi dla $(a,b,c) = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$.

Uwaga

Założenie o nieujemności liczb a, b, c jest zbędne — nie jest wykorzystywane w żadnym z przedstawionych powyżej sposobów rozwiązania.

---

2. Na tablicy napisano liczbę 2022. W pojedynczym kroku można zastąpić dowolną cyfrę 2 przez ciąg cyfr 2022. Przykładowo

$$20\mathbf{2}2 \longrightarrow 20\underline{202}\mathbf{2}2 \longrightarrow 20202\underline{2022}2 \longrightarrow \ldots.$$

Przypuśćmy, że po dokładnie k krokach na tablicy uzyskano liczbę podzielną przez 22. Wyznacz wszystkie możliwe wartości liczby k.

Szkic rozwiązania

Odpowiedź: Warunki zadania spełniają wszystkie liczby $\mathbf{k \geqslant 9}$.

Niech k będzie dowolną liczbą o tej własności, że po dokładnie k krokach można uzyskać liczbę L podzielną przez 22. Przypuśćmy, że na pozycjach nieparzystych w liczbie L jest n_0 zer i n_2 dwójek, a na pozycjach parzystych w liczbie L jest p_0 zer i p_2 dwójek.

Zauważmy, że w każdym kroku liczba dwójek na tablicy zwiększa się o 2, a liczba zer zwiększa się 1. To oznacza, że liczba L ma dokładnie $2k+3$ dwójki oraz $k+1$ zer. W szczególności z równości $n_2+p_2 = 2k+3$ wynika, że $n_2 \neq p_2$.

Na mocy cechy podzielności przez 11 suma cyfr liczby L znajdujących się na pozycjach nieparzystych, równa $2n_2$, daje tę samą resztę z dzielenia przez 11, co suma jej cyfr znajdujących się na pozycjach parzystych, równa $2p_2$. Innymi słowy, liczba $2n_2-2p_2$ jest podzielna przez 11. Ponieważ $n_2-p_2 \neq 0$, więc $|n_2-p_2| \geqslant 11$.

Przypuśćmy, że $n_2 > p_2$. Liczba L ma $3k+4$ cyfry, wobec czego ma co najmniej $\frac{3}{2}(k+1)$ cyfry na pozycjach parzystych. Ponieważ $p_0 \leqslant k+1$, więc oznacza to, że $p_2 \geqslant \frac{1}{2}(k+1)$. W konsekwencji mamy

$$2k+3 = n_2+p_2 = (n_2-p_2)+2p_2 \geqslant 11+2\cdot\frac{1}{2}(k+1), \quad \text{skąd} \quad k \geqslant 9.$$

Analogicznie do jednakowej konkluzji dochodzimy w przypadku $n_2 < p_2$.

Wskażemy teraz sekwencję kroków, pozwalającą na uzyskanie liczby podzielnej przez 22 dla każdego $k \geqslant 9$. Zauważmy, że za każdym razem zastępując środkowe wystąpienie cyfry 2, po k krokach uzyskujemy

$$L = \underbrace{202020\ldots20}_{(k+1)\times\,\text{„20”}}\,\underbrace{222\ldots2}_{(k+2)\times\,\text{„2”}}.$$

Bezpośrednio sprawdzamy, że dla $k=9$ liczba ta jest podzielna przez 22, gdyż jest parzysta, suma jej cyfr na pozycjach nieparzystych jest równa 32, a suma jej cyfr na pozycjach nieparzystych jest równa 10.

Zauważmy, że jeśli wykonamy pojedynczy krok wykorzystując ostatnią cyfrę (którą zawsze jest 2), z liczby n uzyskamy liczbę $1000n+22$. To oznacza, że jeśli przed wykonaniem tego kroku liczba na tablicy była podzielna przez 22, to liczba uzyskana po jego wykonaniu również jest podzielna przez 22. W konsekwencji aby uzyskać liczbę podzielną przez 22 w dokładnie $k \geqslant 9$ krokach wystarczy w dziewięciu krokach uzyskać liczbę L, a w każdym spośród pozostałych $k-9$ kolejnych kroków zastępować ostatnią cyfrę.

---

3. Punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC w taki sposób, że $FB=BD$, $DC=CE$ oraz proste EF i BC są równoległe. Styczna do okręgu opisanego na trójkącie DEF w punkcie F przecina odcinek AD w punkcie P. Symetralna odcinka EF przecina odcinek AC w punkcie Q. Wykaż, że proste PQ i BC są równoległe.

Szkic rozwiązania

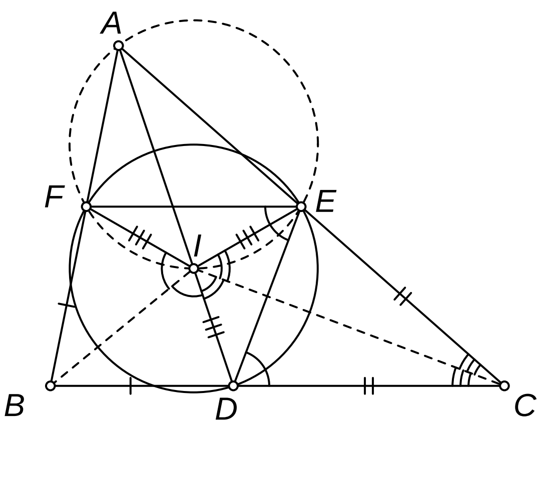
Oznaczmy przez I środek okręgu opisanego na trójkącie DEF. Wykażemy, że na czworokącie $AEIF$ można opisać okrąg. Skoro I jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie DEF, to zachodzi równość $IF=ID=IE$. Stąd otrzymujemy, że trójkąty IFB i IDB oraz trójkąty IEC i IDC są przystające (cecha bok–bok–bok). Stąd

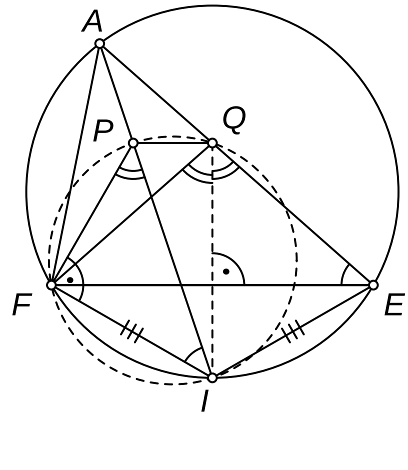
$$\sphericalangle FIB = \sphericalangle DIB, \quad \sphericalangle EIC = \sphericalangle DIC \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle FBI = \sphericalangle DBI, \quad \sphericalangle ICE = \sphericalangle ICD. \qquad (*)$$

Wobec tego

$$\sphericalangle EIF = 360^\circ - \sphericalangle DIF - \sphericalangle DIE = 360^\circ - 2\cdot(\sphericalangle DIB + \sphericalangle DIC) =$$
$$= 360^\circ - 2\cdot\sphericalangle BIC = 360^\circ - 2\cdot\left(180^\circ - \frac{\sphericalangle B}{2} - \frac{\sphericalangle C}{2}\right) = \sphericalangle B + \sphericalangle C.$$

Uzyskujemy więc równość $\sphericalangle FAE + \sphericalangle EIF = \sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^\circ$, która oznacza, że na czworokącie $AEIF$ można opisać okrąg.





Możemy stąd wywnioskować, że $\sphericalangle AIF = \sphericalangle AEF$. Z równoległości EF i BC, równości $(*)$ oraz twierdzenia o kącie środkowym zastosowanego do okręgu opisanego na trójkącie DEF otrzymujemy, że

$$\sphericalangle AEF = \sphericalangle ECD = 2\cdot\sphericalangle ICD = 2\cdot(90^\circ - \sphericalangle CDE) = 180^\circ - 2\cdot\sphericalangle DEF = 180^\circ - \sphericalangle DIF.$$

Stąd punkty A, I, D są współliniowe, a zatem punkt P leży na prostej AI.

Prosta PF jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie DEF, a więc $\sphericalangle PFI = 90^\circ$. Ponadto, wcześniej uzasadniliśmy, że $IF = IE$, zatem IQ jest symetralną odcinka EF. Wobec tego

$$\sphericalangle FPI = 90^\circ - \sphericalangle PIF = 90^\circ - \sphericalangle AIF = 90^\circ - \sphericalangle AEF = \sphericalangle IQE = \sphericalangle FQI.$$

Oznacza to, że na czworokącie $PFIQ$ również można opisać okrąg, co prowadzi do wniosku, że

$$\sphericalangle PQI = 180^\circ - \sphericalangle PFI = 90^\circ.$$

Tym samym każda z prostych PQ i EF jest prostopadła do prostej IQ, a zatem $PQ \parallel EF$ i w konsekwencji prosta PQ jest równoległa do prostej BC.

---

4. Wyznacz wszystkie trójki liczb całkowitych (a,b,c) spełniające równości

$$a+b=c \quad \text{oraz} \quad a^2+b^3=c^2.$$

Szkic rozwiązania

Odpowiedź: Dany układ równań spełniają trójki $(\mathbf{a},\mathbf{0},\mathbf{a})$ oraz $(\tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{b}-\mathbf{1})\mathbf{b},\mathbf{b},\tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{b}(\mathbf{b}+\mathbf{1}))$, dla dowolnych liczb całkowitych a, b.

Jeśli $b=0$, to z pierwszego równania wynika, że $a=c$. Trójka liczb $(a,0,a)$ spełnia również drugie równanie.

Jeśli $b\neq 0$, to z równości

$$b^3 = c^2 - a^2 = (c-a)(c+a) = b(c+a)$$

wynika, że $b^2=c+a=2a+b$, czyli $a=\frac{1}{2}(b-1)b$ i $c=\frac{1}{2}b(b+1)$. Dla każdego b tak określone liczby są całkowite, gdyż liczby $(b-1)b$ oraz $b(b+1)$, jako iloczyny dwóch kolejnych liczb całkowitych, są parzyste. Bezpośrednio sprawdzamy, że trójka liczb $(\frac{1}{2}(b-1)b, b, \frac{1}{2}b(b+1))$ spełnia dane równości dla każdego $b\neq 0$ (dla $b=0$ uzyskujemy jedno z rozwiązań opisanych w poprzednim akapicie).

Uwaga

Wykorzystując rozwiązanie zadania, można uzasadnić następującą tożsamość (czasem nazywaną *tożsamością Nikomachosa*):

$$1^3+2^3+\ldots+n^3 = (1+2+\ldots+n)^2.$$

Rzeczywiście, wiedząc, że trójki $(\frac{1}{2}(b-1)b, b, \frac{1}{2}b(b+1))$ są rozwiązaniami danego układu równań dla $b=1,2,\ldots,n$, możemy zapisać:

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1\cdot 2}{2} - \frac{0\cdot 1}{2} \\
2 &= \frac{2\cdot 3}{2} - \frac{1\cdot 2}{2} \\
3 &= \frac{3\cdot 4}{2} - \frac{2\cdot 3}{2} \\
&\vdots \\
n-1 &= \frac{(n-1)n}{2} - \frac{(n-2)(n-1)}{2} \\
n &= \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1^3 &= \left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2 - \left(\frac{0\cdot 1}{2}\right)^2 \\
2^3 &= \left(\frac{2\cdot 3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2 \\
3^3 &= \left(\frac{3\cdot 4}{2}\right)^2 - \left(\frac{2\cdot 3}{2}\right)^2 \\
&\vdots \\
(n-1)^3 &= \left(\frac{(n-1)n}{2}\right)^2 - \left(\frac{(n-2)(n-1)}{2}\right)^2 \\
n^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{(n-1)n}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

Dodając stronami n równości z lewej kolumny, uzyskujemy

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

a dodając stronami n równości z prawej kolumny, mamy

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

---

5. Dany jest dziewięciokąt foremny $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9$ o boku długości 1. Przekątne A_3A_7 i A_4A_8 przecinają się w punkcie P. Wyznacz długość odcinka PA_1.

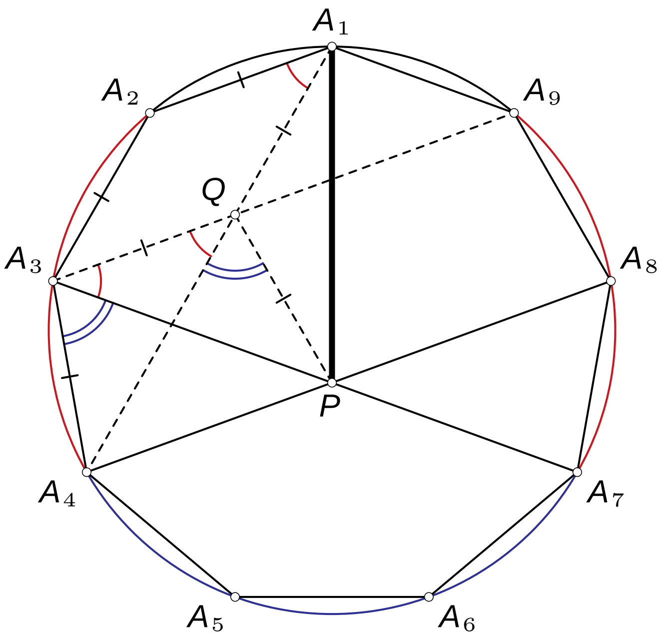
Szkic rozwiązania

Odpowiedź: Odcinek PA_1 ma długość $\sqrt{\mathbf{3}}$.

Niech Q będzie punktem przecięcia przekątnych A_1A_4 oraz A_3A_9. Ponieważ dany dziewięciokąt jest foremny, więc $A_2A_3 \parallel A_1A_4$ oraz $A_1A_2 \parallel A_3A_9$. Wobec tego $A_1A_2A_3Q$ jest rombem o boku 1 oraz

$$\sphericalangle A_3QA_4 = \sphericalangle A_2A_1A_4 = \frac{2}{9}\cdot 180^\circ = \sphericalangle QA_3P,$$

przy czym ostatnie dwie równości wynikają z faktu, że kąty $\sphericalangle A_2A_1A_4$ oraz $\sphericalangle A_9A_3A_7$, wpisane w okrąg opisany na danym dziewięciokącie, są oparte na przystających łukach, z których każdy ma długość równą $\frac{2}{9}$ długości całego okręgu.



Uzyskana równość $\sphericalangle A_3QA_4 = \sphericalangle QA_3P$ w połączeniu z równoległością $A_4A_8 \parallel A_3A_9$ oznacza, że czworokąt A_3A_4PQ jest trapezem i ma oś symetrii (czyli jest równoramienny) i w konsekwencji $PQ = A_3A_4 = 1$. Ponadto

$$\sphericalangle PQA_4 = \sphericalangle PA_3A_4 = \sphericalangle A_7A_3A_4 = 60^\circ,$$

gdzie ostatnia równość wynika z faktu, że kąt $\sphericalangle A_7A_3A_4$ jest wpisany w okrąg opisany na danym dziewięciokącie i oparty na łuku o długości równej $\frac{1}{3}$ długości całego okręgu. Stąd uzyskujemy $\sphericalangle PQA_1 = 180^\circ - \sphericalangle PQA_4 = 120^\circ$.

Poczynione obserwacje dowodzą, że w trójkącie PQA_1, równoramiennym o ramionach długości 1, kąt między ramionami ma miarę 120°. Wobec tego podstawa PA_1 tego trójkąta ma długość $\sqrt{3}$.

---

6. Wyznacz wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 4$ o następującej własności:

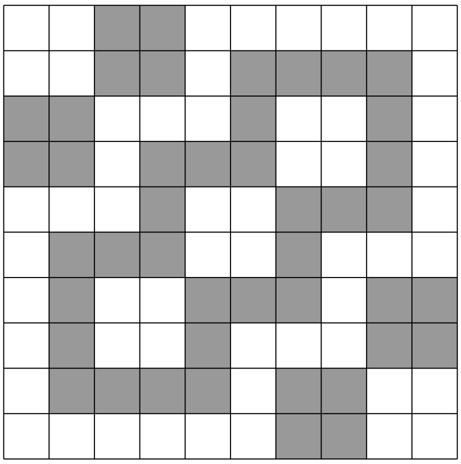
Każde pole tabeli $n \times n$ można pomalować na biało albo na czarno w taki sposób, aby każde pole tej tabeli miało ten sam kolor, co dokładnie dwa sąsiadujące z nim pola. (Pola są *sąsiadujące*, jeśli mają dokładnie jeden wspólny bok.)

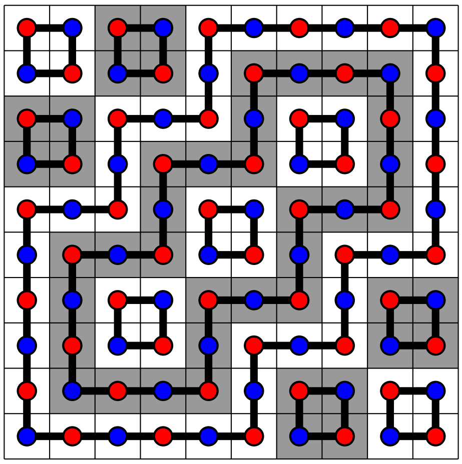
Ile jest różnych kolorowań pól tabeli 6×6 spełniających powyższe warunki?

Szkic rozwiązania

Udowodnimy, że warunki zadania spełniają wszystkie liczby **parzyste** $n \geqslant 4$.

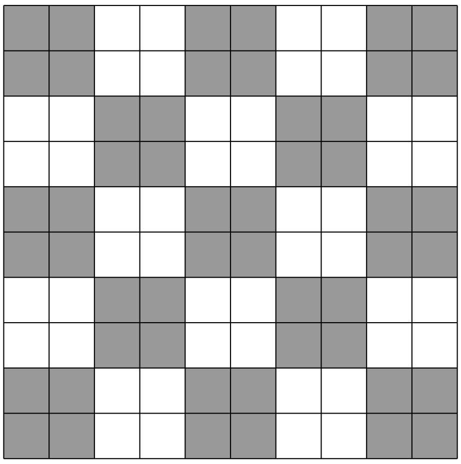
Przypuśćmy, że pewne kolorowanie tabeli $n \times n$ spełnia warunki zadania. Wyróżnijmy środki wszystkich pól tej tabeli i każdy z wyróżnionych punktów pomalujmy na czerwono lub na niebiesko w taki sposób, aby kolory punktów tworzyły *szachownicę*, czyli tak, aby każde dwa sąsiadujące pola miały środki różnych kolorów. Następnie każdą parę środków sąsiadujących pól tego samego koloru połączmy odcinkiem.

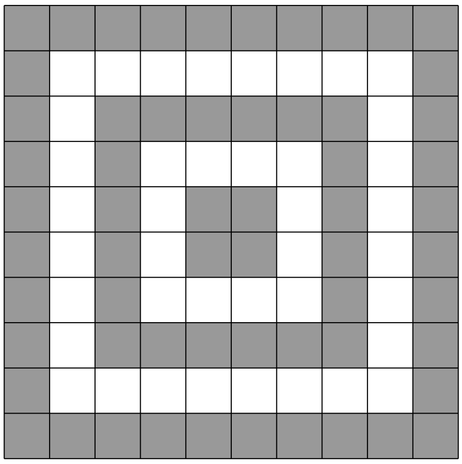




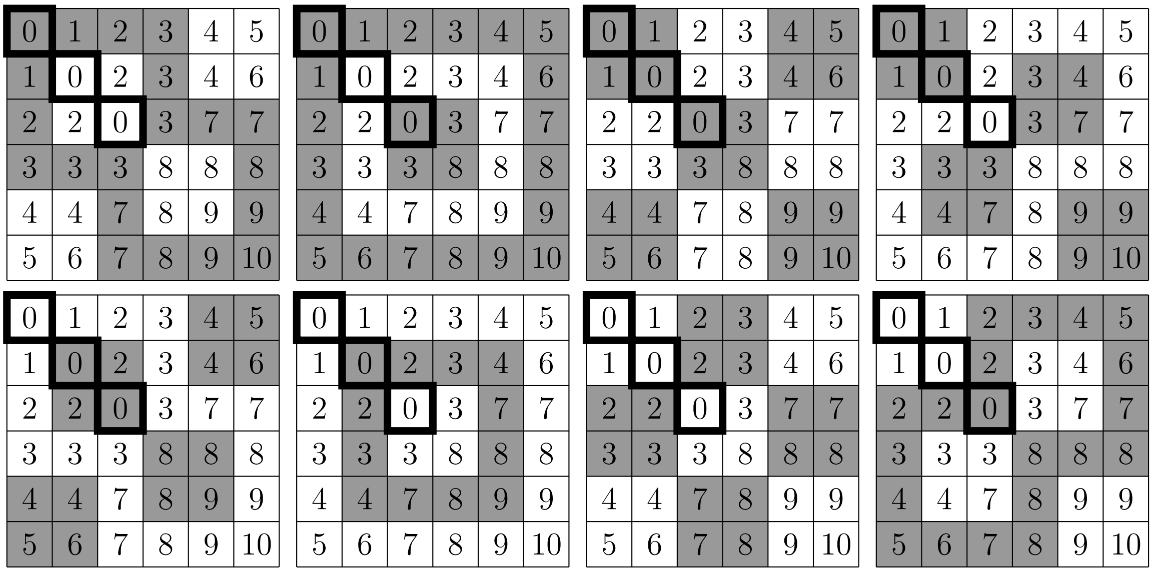
Z warunków zadania wynika, że każdy z wyróżnionych punktów jest końcem dokładnie dwóch narysowanych odcinków. To oznacza, że narysowane odcinki tworzą zbiór łamanych zamkniętych. Co więcej, na każdej z tych łamanych występują naprzemiennie punkty czerwone i niebieskie, co oznacza, że każda z tych łamanych ma parzystą liczbę wierzchołków. Łączna liczba wierzchołków wszystkich łamanych, czyli liczba wyróżnionych punktów, równa n^2, jest więc parzysta. Stąd wniosek, że każda liczba n spełniająca warunki zadania jest parzysta.

Aby uzasadnić, że wszystkie liczby parzyste $n \geqslant 4$ spełniają warunki zadania, wystarczy wskazać przykład odpowiedniego kolorowania pól tabeli $n \times n$ dla każdego takiego n. Odpowiednim kolorowaniem jest na przykład kolorowanie w szachownicę, której pola mają wymiary 2×2 (rysunek po lewej stronie) albo kolorowanie brzegowych pól kwadratu $n \times n$ na czarno, brzegowych pól wewnętrznego kwadratu $(n-2) \times (n-2)$ na biało itd. (rysunek po prawej stronie).





Przystępujemy do wyznaczenia liczby kolorowań pól tabeli 6×6 zgodnych z warunkami zadania. Rozważmy trzy pola: na przecięciu pierwszego wiersza i pierwszej kolumny, na przecięciu drugiego wiersza i drugiej kolumny oraz na przecięciu trzeciego wiersza i trzeciej kolumny. Okazuje się, że dla każdego z ośmiu możliwych kolorowań tych trzech pól można jednoznacznie odtworzyć kolory pozostałych pól tabeli przy założeniu, że kolorowanie spełnia warunki zadania. Na poniższych rysunkach liczby umieszczone na polach odzwierciedlają kolejność wnioskowania o kolorach tych pól, tj. znając kolory pól o etykietach mniejszych od i można jednoznacznie wnioskować o kolorach pól o etykietach równych i. To oznacza, że szukana liczba kolorowań jest równa **8**.



Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki