XII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody stopnia pierwszego — część korespondencyjna
(1 września 2016 r. – 17 października 2016 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Liczby wymierne a, b, c spełniają równanie

$$(a+b+c)(a+b-c)=c^2\,.$$

Wykaż, że $a+b=c=0$.

Szkic rozwiazania

Przekształcamy równoważnie daną równość, uzyskując kolejno:

$$(a+b+c)(a+b-c)=c^2,$$
$$(a+b)^2-c^2=c^2,$$
$$(a+b)^2=2c^2,$$
$$|a+b|=|c|\sqrt{2}\,.$$

Przypuśćmy, że $c\neq 0$. Wówczas ostatnią zależność możemy podzielić obustronnie przez $|c|$, otrzymując

$$\left|\frac{a+b}{c}\right|=\sqrt{2}\,.$$

Ponieważ liczby a, b, c są wymierne, więc także liczba $a+b$ jest wymierna i w konsekwencji lewa strona powyższej równości jest wymierna. Tymczasem jej prawa strona, czyli liczba $\sqrt{2}$ jest niewymierna. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że $c=0$, a skoro $|a+b|=|c|\sqrt{2}$, to również $a+b=0$.

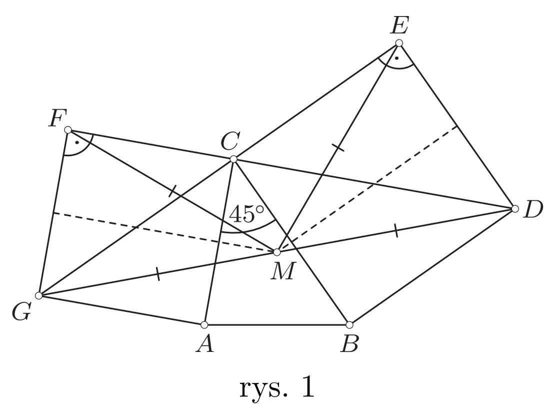
2. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $\sphericalangle ACB=45°$. Niech $BCED$ oraz $ACFG$ będą kwadratami leżącymi na zewnątrz trójkąta ABC. Udowodnij, że środek odcinka DG pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Szkic rozwiazania

Zauważmy, że

$$\sphericalangle FCA+\sphericalangle ACB+\sphericalangle BCD=90°+45°+45°=180°,$$

skąd wynika, że punkty F, C, D leżą na jednej prostej. Podobnie uzasadniamy, że punkty E, C, G leżą na jednej prostej.



rys. 1

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Oznaczmy przez M środek odcinka DG (rys. 1). Ponieważ

$$\sphericalangle DEG = \sphericalangle DFG = 90^\circ,$$

więc punkty E, F leżą na okręgu o średnicy DG, którego środkiem jest punkt M. Wobec tego symetralne odcinków DE i FG przecinają się w punkcie M.

Z drugiej strony, symetralne odcinków DE i FG pokrywają się z symetralnymi odcinków BC i CA, a więc przecinają się w środku okręgu opisanego na trójkącie ABC. Stąd wniosek, że punkt M, czyli środek odcinka DG, pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. To kończy dowód.

---

3. W każde pole tablicy 11×11 należy wpisać jedną z liczb -1, 0, 1 w taki sposób, aby suma liczb w każdej kolumnie była nieujemna, a suma liczb w każdym wierszu była niedodatnia. Jaką najmniejszą liczbę zer można w ten sposób wpisać w pola tablicy? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiazania

Niech k_1, k_2, ..., k_{11} będą sumami liczb znajdujących się w kolejnych kolumnach, a w_1, w_2, ..., w_{11} — sumami liczb znajdujących się w kolejnych wierszach. Oznaczmy ponadto przez s sumę wszystkich liczb wpisanych w pola tablicy.

Z warunków zadania wynika, że $k_1 \geqslant 0$, $k_2 \geqslant 0$, ..., $k_{11} \geqslant 0$, skąd

$$s = k_1 + k_2 + \ldots + k_{11} \geqslant 0 + 0 + \ldots + 0 = 0.$$

Podobnie, skoro $w_1 \leqslant 0$, $w_2 \leqslant 0$, ..., $w_{11} \leqslant 0$, to

$$s = w_1 + w_2 + \ldots + w_{11} \leqslant 0 + 0 + \ldots + 0 = 0.$$

Łącząc powyższe nierówności, dochodzimy do wniosku, że $s = 0$. Zatem we wszystkich powyższych nierównościach zachodzą równości, czyli

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_{11} = w_1 = w_2 = \ldots = w_{11} = 0.$$

Ponieważ suma liczb w każdym wierszu jest równa 0, więc w każdym wierszu jest tyle samo liczb 1 co liczb -1. W każdym wierszu jest zatem parzysta liczba niezerowych liczb. Tymczasem w każdym wierszu jest 11, czyli nieparzysta liczba pól. Wobec tego w każdym wierszu znajduje się co najmniej jedna liczba 0, a więc w całej tablicy znajduje się co najmniej 11 zer.

0	−1	−1	−1	−1	−1	1	1	1	1	1
1	0	−1	−1	−1	−1	−1	1	1	1	1
1	1	0	−1	−1	−1	−1	−1	1	1	1
1	1	1	0	−1	−1	−1	−1	−1	1	1
1	1	1	1	0	−1	−1	−1	−1	−1	1
1	1	1	1	1	0	−1	−1	−1	−1	−1
−1	1	1	1	1	1	0	−1	−1	−1	−1
−1	−1	1	1	1	1	1	0	−1	−1	−1
−1	−1	−1	1	1	1	1	1	0	−1	−1
−1	−1	−1	−1	1	1	1	1	1	0	−1
−1	−1	−1	−1	−1	1	1	1	1	1	0

rys. 2

Pozostaje zauważyć, że można uzupełnić tablicę zgodnie z warunkami zadania tak, aby znalazło się w niej dokładnie 11 zer (rys. 2). W związku z tym szukaną najmniejszą liczbą zer wpisanych w pola tablicy jest 11.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

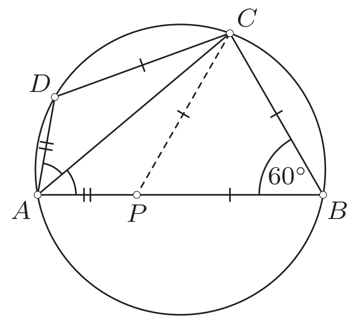
4. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, przy czym $\sphericalangle ABC = 60^\circ$ oraz $BC = CD$. Udowodnij, że $AB = AD + DC$.

Szkic rozwiazania

Ponieważ $\sphericalangle ADC = 120^\circ > 60^\circ = \sphericalangle ABC$ oraz $\sphericalangle BDC = \sphericalangle DBC$, więc

$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle ADC - \sphericalangle BDC > \sphericalangle ABC - \sphericalangle DBC = \sphericalangle ABD.$$

Stąd $AB > AD$. Na odcinku AB można więc wskazać taki punkt P, że $AP = AD$ (rys. 3).



rys. 3

Ponieważ $BC = DC$, więc łuki BC i CD danego okręgu (niezawierające punktu A) są równej długości. Stąd wynika, że $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DAC$, gdyż są to kąty wpisane w ten sam okrąg oparte na łukach równej długości. Wobec tego trójkąty APC i ADC są przystające (cecha bok–kąt–bok) i w konsekwencji $PC = DC = BC$.

Wiemy ponadto, że $\sphericalangle ABC = 60^\circ$, skąd wynika, że trójkąt równoramienny BCP jest równoboczny. W związku z tym $PB = DC$. Ostatecznie otrzymujemy zatem

$$AB = AP + PB = AD + DC,$$

co było do udowodnienia.

Uwaga

W rozwiązaniu zadania wykorzystaliśmy fakt, że równość długości cięciw BC i CD pociąga za sobą równość długości łuków BC i CD. Więcej na temat zastosowania tego twierdzenia można przeczytać w artykule „O łukach równej długości”, *Kwadrat* nr 14 (grudzień 2014).

5. Liczby całkowite a, b są dodatnie. Wykaż, że co najmniej jedną z liczb a, b, $a+b$ można przedstawić w postaci różnicy kwadratów dwóch liczb całkowitych.

Szkic rozwiazania

Zauważmy, że każdą liczbę nieparzystą oraz każdą liczbę podzielną przez 4 można przedstawić w postaci różnicy kwadratów dwóch liczb całkowitych. Rzeczywiście, dla dowolnej liczby całkowitej n spełnione są równości

$$2n - 1 = n^2 - (n-1)^2 \quad \text{oraz} \quad 4n = (n+1)^2 - (n-1)^2 .$$

Wystarczy zatem wykazać, że wśród liczb a, b, $a+b$ co najmniej jedna jest nieparzysta lub podzielna przez 4.

Przypuśćmy, że tak nie jest. Wtedy liczby a, b oraz $a+b$ są parzyste i niepodzielne przez 4. W szczególności, obie liczby a i b dają resztę 2 z dzielenia przez 4. Wtedy jednak liczba $a+b$ jest podzielna przez 4, wbrew poczynionemu założeniu. Uzyskana sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Uwaga

Można wykazać, że żadnej liczby, która z dzielenia przez 4 daje resztę 2 nie da się przedstawić w postaci różnicy kwadratów dwóch liczb całkowitych. Dowód tego stwierdzenia przebiega analogicznie do rozwiązania zadania 6 z artykułu „Różnica kwadratów”, *Kwadrat* nr 18 (sierpień 2016).

---

6. Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest trójkąt równoboczny ABC o boku 1. Ponadto

$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle BDC = \sphericalangle CDA = 90^\circ .$$

Oblicz objętość ostrosłupa $ABCD$.

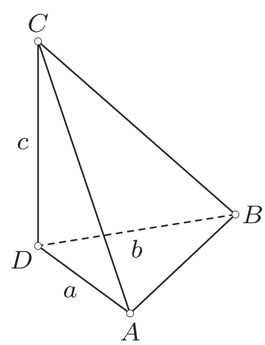
Szkic rozwiazania

Oznaczmy długości krawędzi AD, BD, CD danego ostrosłupa odpowiednio przez a, b, c. Ponieważ

$$\sphericalangle BDC = \sphericalangle CDA = 90^\circ,$$

więc krawędź CD jest prostopadła do płaszczyzny ABD. Potraktujmy zatem teraz ścianę ABD jako podstawę ostrosłupa; wtedy krawędź CD jest wysokością ostrosłupa opuszczoną na tę podstawę (rys. 4). Oznaczając przez V objętość ostrosłupa $ABCD$, a przez $[ABD]$ pole ściany ABD, uzyskujemy

$$V = \frac{1}{3}\cdot[ABD]\cdot CD = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}ab\cdot c = \frac{1}{6}abc.$$



rys. 4

Ponieważ trójkąty ADB, BDC, CDA są prostokątne, więc korzystając z twierdzenia Pitagorasa, możemy zapisać układ równań

$$\begin{cases} a^2+b^2=1\\ b^2+c^2=1\\ c^2+a^2=1. \end{cases}$$

Wobec tego

$$2a^2=(a^2+b^2)+(c^2+a^2)-(b^2+c^2)=1+1-1=1,$$

skąd $a^2=\frac{1}{2}$ i w konsekwencji $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

W pełni analogicznie wyznaczamy pozostałe wielkości b i c, uzyskując $b=c=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Stąd otrzymujemy ostatecznie

$$V=\frac{1}{6}abc=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{12\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{24}.$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

7. Dane są takie dodatnie liczby całkowite a i b, że liczba $a+b+1$ jest dzielnikiem pierwszym liczby $4ab-1$. Udowodnij, że $a=b$.

Szkic rozwiazania

Jeżeli liczba $4ab-1$ jest podzielna przez $a+b+1$, to również liczba

$$4ab-1+2(a+b+1)=4ab+2a+2b+1=(2a+1)(2b+1)$$

jest podzielna przez $a+b+1$. Ponieważ $a+b+1$ jest liczbą pierwszą, więc jest dzielnikiem co najmniej jednego z czynników $2a+1$, $2b+1$. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że $a+b+1$ dzieli $2a+1$.

Gdyby spełniona była nierówność

$$\frac{2a+1}{a+b+1} \geqslant 2,$$

to przekształcając ją równoważnie, uzyskalibyśmy $2a+1 \geqslant 2a+2b+2$, czyli $2b+1 \leqslant 0$. To przeczy jednak warunkowi, że liczba b jest dodatnia. Wobec tego musi być spełniona równość

$$\frac{2a+1}{a+b+1} = 1,$$

która po przekształceniach prowadzi do $a=b$. To kończy rozwiązania zadania.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku