XXI Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody pierwszego stopnia — część zadaniowa (8 października 2025 r.)

Rozwiązania zadań konkursowych

---

1. Jaś ma monety o łącznej wartości równej dokładnie 100 złotych, przy czym każda z tych monet jest dwuzłotówką albo pięciozłotówką. Wykaż, że Jaś może spośród tych monet wybrać takie, których łączna wartość jest równa dokładnie 50 złotych.

Rozwiązanie

Sposób I

Jeżeli Jaś ma co najmniej 10 pięciozłotówek, to 50 zł może uzyskać wybierając 10 z nich.

Jeżeli Jaś ma co najmniej 25 dwuzłotówek, to 50 zł może uzyskać wybierając 25 z nich.

Uzasadnimy, że Jaś może dokonać co najmniej jednego z wyborów opisanych powyżej. Istotnie, gdyby Jaś miał mniej niż 10 pięciozłotówek i jednocześnie mniej niż 25 dwuzłotówek, to łącznie miałby mniej niż $10\cdot 5+25\cdot 2=100$ złotych.

Sposób II

Oznaczmy przez d liczbę dwuzłotówek, a przez p — liczbę pięciozłotówek posiadanych przez Jasia. Z warunków zadania wynika, że $2d+5p=100$. Zatem d jest liczbą podzielną przez 5 oraz p jest liczbą parzystą.

Jeżeli d jest liczbą parzystą, to Jaś może wybrać $\frac{1}{2}p$ pięciozłotówek oraz $\frac{1}{2}d$ dwuzłotówek.

Jeżeli z kolei d jest liczbą nieparzystą, to $d\geqslant 5$, gdyż d jest liczbą podzielną przez 5. W konsekwencji $\frac{1}{2}(d+5)$ jest liczbą całkowitą nie większą od d. Ponadto $d\leqslant 45$, więc $p\geqslant 2$, czyli $\frac{1}{2}(p-2)$ jest liczbą całkowitą nieujemną. Zauważmy, że

$$2\cdot\tfrac{1}{2}(d+5)+5\cdot\tfrac{1}{2}(p-2)=\frac{2d+10+5p-10}{2}=\frac{2d+5p}{2}=50.$$

Jaś może zatem wybrać $\frac{1}{2}(d+5)$ dwuzłotówek oraz $\frac{1}{2}(p-2)$ pięciozłotówek, aby uzyskać dokładnie 50 złotych.

---

2. Dodatnia liczba całkowita n jest 21 razy większa od sumy swoich cyfr. Udowodnij, że liczba n jest podzielna przez 9.

Rozwiązanie

Sposób I

Oznaczmy przez s sumę cyfr liczby n. Skoro $n=21s=3\cdot 7s$, to n jest liczbą podzielną przez 3. Na mocy cechy podzielności przez 3 również s jest liczbą podzielną przez 3, czyli $s=3k$ dla pewnej liczby całkowitej k. Wobec tego $n=63k=9\cdot 7k$ jest liczbą podzielną przez 9.

Sposób II

Wykorzystamy następujący fakt: po pomniejszeniu dodatniej liczby całkowitej o jej sumę cyfr, uzyskujemy liczbę podzielną przez 9. Zatem liczba $n-\frac{1}{21}n=\frac{20}{21}n$ jest podzielna przez 9, czyli $\frac{20}{21}n=9k$ dla pewnej liczby całkowitej k. Stąd $20n=189k$ i w konsekwencji — skoro 20 oraz 189 nie mają wspólnych dzielników pierwszych — liczba n dzieli się przez $189=9\cdot 21$.

Uwaga

Można udowodnić, że jedyną liczbą n spełniającą warunki zadania jest $378=21\cdot(3+7+8)$.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji Narodowej

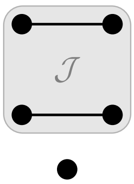
3. Każda z pięciu osób napisała na tablicy, ilu znajomych ma wśród czterech pozostałych osób (jeżeli osoba A zna osobę B, to osoba B zna osobę A). Cztery z napisanych liczb są równe 1. Wyznacz wszystkie możliwe wartości piątej liczby. Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

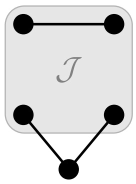
Sposób I

Oznaczmy przez $\mathcal{J}$ grupę czterech osób, które napisały na tablicy liczbę 1. Rozważmy, ile relacji znajomości jest w obrębie grupy $\mathcal{J}$. (Na ilustracjach kropki oznaczają osoby, a odcinki symbolizują znajomości.)

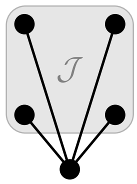
- Jeżeli w $\mathcal{J}$ są dwie pary znajomych, to piąta osoba nie zna żadnej z nich, więc ma 0 znajomych pośród pozostałych osób (rys. 1).
- Jeżeli w $\mathcal{J}$ jest jedna para znajomych, a pozostałe dwie osoby nie są znajomymi, to jedynym znajomym każdej z nich jest piąta osoba. W tym wypadku ta osoba ma 2 znajomych pośród pozostałych (rys. 2).
- Jeżeli żadne dwie osoby w $\mathcal{J}$ nie są znajomymi, to jedynym znajomym każdej z nich jest piąta osoba — ta osoba ma więc 4 znajomych pośród pozostałych (rys. 3).



rys. 1



rys. 2



rys. 3

Sposób II

Oznaczmy przez x szukaną wartość. Wówczas x jest liczbą całkowitą oraz $0 \leqslant x \leqslant 4$.

Zauważmy, że suma pięciu liczb napisanych na tablicy jest dwa razy większa od liczby wszystkich znajomości w rozważanej grupie. To oznacza, że liczba $1+1+1+1+x=4+x$ jest parzysta. W konsekwencji liczba x jest parzysta, więc nie może być równa 1 ani 3.

Aby uzasadnić, że każda z liczb 0, 2 lub 4 jest w istocie możliwą wartością x, wystarczy podać odpowiednie przykłady układów znajomości (są one przedstawione na rys. 1–3).

4. Niezerowe liczby rzeczywiste a, b spełniają warunek $(a+b^2)(a^3+b^3)=a^4+b^5$. Wykaż, że $b<0$.

Rozwiązanie

Przekształcamy dany warunek równoważnie:

$$\begin{aligned} (a+b^2)(a^3+b^3) &= a^4+b^5, \\ a(a^3+b^3)+b^2(a^3+b^3) &= a^4+b^5, \\ a^4+ab^3+a^3b^2+b^5 &= a^4+b^5, \\ ab^3+a^3b^2 &= 0, \\ ab^2(b+a^2) &= 0. \end{aligned}$$

Ponieważ $a \neq 0$ oraz $b \neq 0$, więc z ostatniej równości wynika, że $b+a^2=0$, czyli $b=-a^2$. Ponieważ $a^2>0$ dla każdej liczby a różnej od zera, więc $b<0$.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji Narodowej

5. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD. Punkt P znajduje się wewnątrz trapezu $ABCD$, przy czym

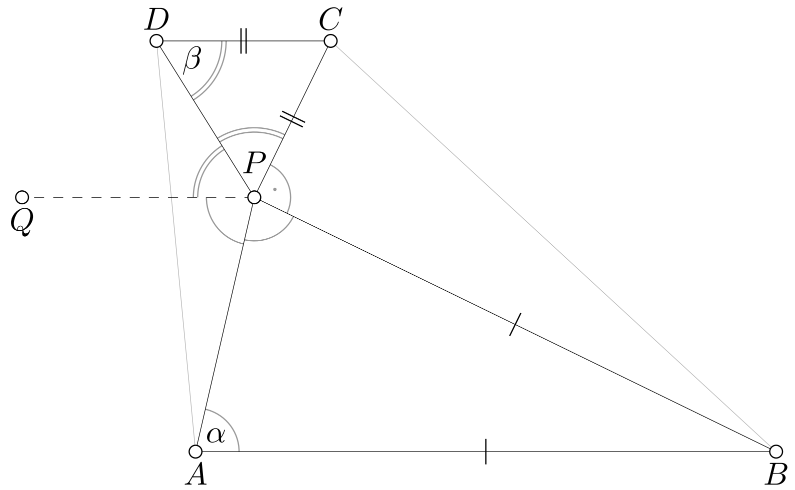
$$AB = BP, \quad DC = CP \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle BPC = 90^\circ.$$

Oblicz miarę kąta APD.

Rozwiązanie

Sposób I

Niech Q będzie takim punktem, że odcinek PQ jest równoległy do podstaw trapezu i przecina ramię AD (rys. 4). Przyjmijmy oznaczenia $\sphericalangle BAP = \alpha$ oraz $\sphericalangle CDP = \beta$.



rys. 4

Skoro $AB = BP$ oraz $DC = CP$, to $\sphericalangle APB = \alpha$ oraz $\sphericalangle DPC = \beta$. Skoro odcinek PQ jest równoległy do podstaw trapezu, to $\sphericalangle APQ = \alpha$ oraz $\sphericalangle DPQ = \beta$.

Zauważmy, że suma miar kątów zaznaczonych wokół punktu P jest równa 360°, czyli

$$2\alpha + 2\beta + 90^\circ = 360^\circ, \quad \text{skąd} \quad \alpha + \beta = 135^\circ.$$

Pozostaje zauważyć, że $\sphericalangle APD = \alpha + \beta = 135^\circ$.

Sposób II

Podobnie jak w pierwszym sposobie przyjmijmy oznaczenia $\sphericalangle BAP = \sphericalangle APB = \alpha$ oraz $\sphericalangle CDP = \sphericalangle DPC = \beta$.

W trójkątach równoramiennych ABP oraz CDP spełnione są równości $\sphericalangle ABP = 180^\circ - 2\alpha$ oraz $\sphericalangle DCP = 180^\circ - 2\beta$. W trójkącie prostokątnym BCP mamy $\sphericalangle PBC + \sphericalangle PCB + 90^\circ = 180^\circ$, skąd $\sphericalangle PBC + \sphericalangle PCB = 90^\circ$. Wykorzystując fakt, że w trapezie $ABCD$ suma miar kątów wewnętrznych przyległych do ramienia BC jest równa 180°, uzyskujemy

$$\begin{aligned} 180^\circ &= \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD = \sphericalangle ABP + \sphericalangle PBC + \sphericalangle PCB + \sphericalangle DCP = \\ &= 180^\circ - 2\alpha + 90^\circ + 180^\circ - 2\beta = 450^\circ - 2(\alpha + \beta), \end{aligned}$$

skąd $\alpha + \beta = 135^\circ$. Wobec tego

$$\sphericalangle APD = 360^\circ - 90^\circ - (\alpha + \beta) = 270^\circ - 135^\circ = 135^\circ.$$

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji Narodowej

6. Dana jest liczba całkowita n o tej własności, że liczba $2n$ jest sześcianem liczby całkowitej, a liczba $3n$ jest kwadratem liczby całkowitej. Udowodnij, że liczba n jest podzielna przez 108.

Rozwiązanie

Sposób I

Skoro liczba $3n$ jest podzielna przez 3 i jest kwadratem liczby całkowitej, to $3n$ jest liczbą podzielną przez 9. W konsekwencji n jest liczbą podzielną przez 3.

Skoro liczba parzysta $2n$ jest sześcianem liczby całkowitej, to $2n$ jest liczbą podzielną przez 8. Wobec tego n jest liczbą podzielną przez 4.

Podobnie skoro liczba $2n$ jest podzielna przez 3 i jest sześcianem liczby całkowitej, to jest podzielna przez 27. W konsekwencji liczba n jest podzielna przez 27.

Ponieważ n jest liczbą podzielną zarówno przez 4, jak i przez 27, to jest liczbą podzielną przez najmniejszą wspólną wielokrotność tych dwóch liczb, czyli $\mathrm{NWW}(27,4)=27\cdot 4=108$.

Sposób II

Niech k, ℓ będą takimi liczbami całkowitymi, że $2n=k^3$ oraz $3n=\ell^2$. Wtedy $\frac{1}{2}k^3=n=\frac{1}{3}\ell^2$, skąd uzyskujemy

$$3k^3=2\ell^2.$$

Wynika z tego, że liczba k jest parzysta, a liczba ℓ jest podzielna przez 3, czyli $k=2a$ oraz $\ell=3b$ dla pewnych liczb całkowitych a, b. Powyższa równość przybiera postać

$$24a^3=18b^2, \quad \text{czyli} \quad 4a^3=3b^2.$$

Stąd wynika, że a jest liczbą podzielną przez 3. Zatem $a=3c$ dla pewnej liczby całkowitej c.

Z powyższych rozważań wynika, że

$$n=\frac{1}{2}k^3=\frac{1}{2}\cdot(2a)^3=4a^3=4\cdot(3c)^3=108c^3.$$

7. Miary kątów wewnętrznych trójkąta ostrokątnego są równe a°, b°, c°. Wykaż, że istnieje trójkąt o bokach długości a, b, c.

Rozwiązanie

Z warunków zadania wynika, że $0<a<90$, $0<b<90$, $0<c<90$ oraz $a+b+c=180$. Trójkąt o bokach długości a, b, c istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są nierówności

$$a+b>c, \quad b+c>a, \quad c+a>b.$$

Korzystając z równości $a+b=180-c$, pierwszą z powyższych nierówności można przekształcić równoważnie kolejno do postaci

$$\begin{aligned} 180-c &> c, \\ 180 &> 2c, \\ 90 &> c. \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność wynika wprost z założeń zadania. Pozostałe dwie nierówności można uzasadnić w pełni analogicznie.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej