XXI Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody stopnia pierwszego — część zadaniowa

(8 października 2025 r., godz. 9:00)

Przed przystąpieniem do rozwiązywania zadań wpisz na każdą z siedmiu kartek swoje imiona, nazwisko, numer klasy oraz numer zadania.

Rozwiązania poszczególnych zadań zapisuj **na oddzielnych kartkach**. Używaj koloru czarnego lub niebieskiego. Nie używaj ołówka ani korektora.

Zadania są jednakowo punktowane. Za w pełni poprawne rozwiązanie zadania można uzyskać **3 punkty**, a za istotny postęp w kierunku poprawnego rozwiązania można uzyskać **1 punkt**.

Pamiętaj, że ocenie podlega przedstawiony **tok rozumowania**, więc staraj się zaprezentować go dokładnie i precyzyjnie. Za podanie samej odpowiedzi, nawet poprawnej, bez uzasadnienia (lub z błędnym uzasadnieniem) nie będą przyznawane punkty.

Czas na rozwiązywanie zadań: 100 minut. **Powodzenia!**

---

1. Jaś ma monety o łącznej wartości równej dokładnie 100 złotych, przy czym każda z tych monet jest dwuzłotówką albo pięciozłotówką. Wykaż, że Jaś może spośród tych monet wybrać takie, których łączna wartość jest równa dokładnie 50 złotych.

2. Dodatnia liczba całkowita n jest 21 razy większa od sumy swoich cyfr. Udowodnij, że liczba n jest podzielna przez 9.

3. Każda z pięciu osób napisała na tablicy, ilu znajomych ma wśród czterech pozostałych osób (jeżeli osoba A zna osobę B, to osoba B zna osobę A). Cztery z napisanych liczb są równe 1. Wyznacz wszystkie możliwe wartości piątej liczby. Odpowiedź uzasadnij.

4. Niezerowe liczby rzeczywiste a, b spełniają warunek $(a+b^2)(a^3+b^3)=a^4+b^5$. Wykaż, że $b<0$.

5. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD. Punkt P znajduje się wewnątrz trapezu $ABCD$, przy czym

$$AB=BP, \quad DC=CP \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle BPC=90^\circ.$$

Oblicz miarę kąta APD.

6. Dana jest liczba całkowita n o tej własności, że liczba $2n$ jest sześcianem liczby całkowitej, a liczba $3n$ jest kwadratem liczby całkowitej. Udowodnij, że liczba n jest podzielna przez 108.

7. Miary kątów wewnętrznych trójkąta ostrokątnego są równe a°, b°, c°. Wykaż, że istnieje trójkąt o bokach długości a, b, c.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji Narodowej