

XXII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody pierwszego stopnia — część testowa (24 września 2026 r.)

Rozwiązania zadań konkursowych

1. Do trzech pudełek rozdzielono 7 kul, nie pozostawiając żadnego pudełka pustego.

Wynika z tego, że

- | | |
|---|--|
| N | a) w pewnym pudełku znajduje się dokładnie jedna kula; |
| N | b) w pewnym pudełku znajduje się parzysta liczba kul; |
| N | c) w pewnych dwóch pudełkach znajduje się tyle samo kul. |

Komentarz

a) Jeżeli liczby kul w pudełkach są równe 2, 2, 3, to w żadnym pudełku nie znajduje się dokładnie jedna kula.

b) Jeżeli liczby kul w pudełkach są równe 1, 3, 3, to w każdym pudełku znajduje się nieparzysta liczba kul.

c) Jeżeli liczby kul w pudełkach są równe 1, 2, 4, to w każdym pudełku znajduje się inna liczba kul.

Uwaga

Są tylko cztery możliwe układy liczb kul w pudełkach spełniające warunki zadania. Oprócz przedstawionych powyżej, jest jeszcze układ 1, 1, 5.

2. Istnieją takie dwadzieścia dwie liczby całkowite, że iloczyn wszystkich tych liczb jest równy -1 , a ich suma jest równa

- | | |
|---|------------|
| T | a) -20 ; |
| N | b) -21 ; |
| N | c) -22 . |

Komentarz

Iloczyn liczb całkowitych jest równy -1 wtedy i tylko wtedy, gdy każda z tych liczb jest równa 1 lub -1 , a ponadto liczba czynników równych -1 jest nieparzysta.

a) Jeżeli jedna z danych liczb jest równa 1, a pozostałe są równe -1 , to iloczyn tych liczb jest równy -1 , a ich suma jest równa $1 + 21 \cdot (-1) = -20$.

b) Suma 22 liczb nieparzystych jest zawsze liczbą parzystą, więc różną od -21 .

c) Jeżeli suma 22 liczb równych 1 lub -1 jest równa -22 , to wszystkie te liczby są równe -1 . Jednak wówczas ich iloczyn jest równy 1. To oznacza, że 22 liczby całkowite o iloczynie -1 nie mogą mieć sumy równej -22 .

Uwaga

Można uzasadnić, że jeżeli pewne 22 liczby spełniają warunki zadania, to ich suma jest liczbą podzielną przez 4, co stanowi inną metodę wykluczenia sumy równej -21 lub -22 . Jeżeli oznaczmy przez k liczbę czynników równych -1 , to k jest liczbą nieparzystą, a $22-k$ jest liczbą czynników równych 1 . Wobec tego suma wszystkich 22 liczb jest równa

$$k \cdot (-1) + (22 - k) \cdot 1 = 22 - 2k = 2 \cdot (11 - k).$$

Skoro k jest liczbą nieparzystą, to liczba $11-k$ jest parzysta i w konsekwencji liczba $2 \cdot (11-k)$ jest podzielna przez 4.

3. Istnieje liczba całkowita n o tej własności, że suma cyfr liczby n oraz suma cyfr liczby $n+1$ są obie podzielne przez

T

a) 2;

N

b) 3;

T

c) 5.

Komentarz

a) Jeżeli $n = 19$, to $n + 1 = 20$ i sumy cyfr tych liczb są równe 10 oraz 2 — obie są podzielne przez 2.

b) Pośród liczb n , $n + 1$ co najmniej jedna jest niepodzielna przez 3, więc na mocy cechy podzielności przez 3 ma sumę cyfr niepodzielną przez 3.

c) Jeżeli $n = 49999$, to $n + 1 = 50000$ i sumy cyfr tych liczb są równe 40 oraz 5 — obie są podzielne przez 5.

Uwaga

Zauważmy, że jeżeli liczba n jest zakończona w zapisie dziesiętnym dokładnie k dziewiątkami, to $s(n+1) = s(n) + 1 - 9k$, gdzie $s(m)$ oznacza sumę cyfr liczby m .

Jeżeli zarówno $s(n)$, jak i $s(n+1)$ są podzielne przez 5, to ich różnica $9k - 1$ również jest podzielna przez 5. Najmniejsze możliwe k jest równe 4, więc liczba n musi kończyć się co najmniej czterema dziewiątkami. Łatwo bezpośrednio sprawdzić, że 49999 jest najmniejszym możliwym przykładem w punkcie c).

4. Każde pole planszy 4×4 pomalowano na białe albo na czarno w taki sposób, że żadne dwa czarne pola nie sąsiadują bokiem oraz każde białe pole sąsiaduje bokiem z co najmniej jednym polem czarnym. Wynika z tego, że na tej planszy

T

a) jest co najmniej 8 białych pól;

N

b) jest co najmniej 6 czarnych pól;

N

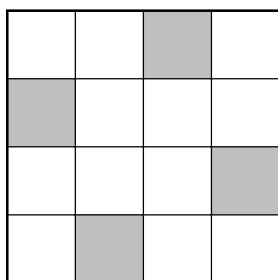
c) co najmniej jedno narożne pole jest białe.

Komentarz

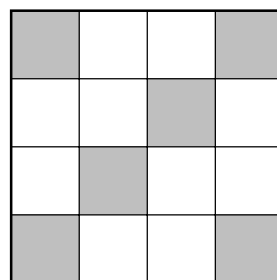
a) Podzielmy planszę na 8 prostokątów 1×2 . Żaden z tych prostokątów nie może składać się z dwóch czarnych pól, więc każdy z nich ma co najmniej jedno pole białe. Łącznie na planszy jest więc co najmniej 8 białych pól.

b) Jeżeli na czarno pomalujemy 4 pola przedstawione na rysunku 1, to warunki zadania będą spełnione.

c) Jeżeli na czarno pomalujemy 6 pól przedstawionych na rysunku 2, to warunki zadania będą spełnione.



rys. 1



rys. 2

Uwaga

Można udowodnić, że najmniejsza możliwa liczba czarnych pól to 4 (rysunek 1 pokazuje, że jest możliwa do uzyskania). Gdyby bowiem były tylko co najwyżej 3 czarne pola, to sąsiadowałyby bokiem łącznie z co najwyżej 12 białymi polami, podczas gdy białych pól byłoby co najmniej 13 — zatem pewne białe pole nie sąsiadowałoby z żadnym czarnym.

5. Istnieje trójkąt prostokątny, w którym dwa boki mają długości całkowite, a trzeci bok ma długość

T
T
N

a) $\sqrt{20}$;

b) $\sqrt{21}$;

c) $\sqrt{22}$.

Komentarz

a) Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 4 oraz 2 ma przeciwprostokątną długości $\sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$.

b) Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 2 oraz $\sqrt{21}$ ma przeciwprostokątną długości $\sqrt{2^2 + 21} = 5$.

c) Jeżeli trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości a oraz b ma przeciwprostokątną długości $\sqrt{22}$, to $a^2 + b^2 = 22$. Bezpośrednio sprawdzamy, że liczby 22 nie można przedstawić jako sumy dwóch (niekoniecznie różnych) składników z listy: 1, 4, 9, 16, więc nie jest możliwe, aby obie liczby a , b były całkowite.

Jeżeli zaś trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości a oraz $\sqrt{22}$ ma przeciwprostokątną długości c , to $c^2 - a^2 = 22$, czyli $(c-a)(c+a) = 22$. Gdyby liczby a oraz c były całkowite, to liczby $c-a$ oraz $c+a$ byłyby albo jednocześnie nieparzyste, albo jednocześnie parzyste (jako liczby różniące się o liczbę parzystą $2a$). W pierwszym przypadku ich iloczyn byłby liczbą nieparzystą, w drugim zaś — liczbą podzielną przez 4; nie jest więc możliwe, aby był równy 22.

Uwaga

Nietrudno sprawdzić, że kwadrat parzystej liczby całkowitej daje przy dzieleniu przez 8 resztę 0 lub 4, a kwadrat nieparzystej liczby całkowitej daje przy dzieleniu przez 8 resztę 1.

Wykorzystując ten fakt, stwierdzamy, że liczba będąca sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych może przy dzieleniu przez 8 dawać wyłącznie resztę 0, 1, 2, 4 lub 5, więc nie może być równa 22. Podobnie liczba będąca różnicą dwóch kwadratów liczb całkowitych nie może przy dzieleniu przez 8 dawać reszty 2 ani 6 (więc ponownie nie może być równa 22). W ten sposób można alternatywnie rozstrzygnąć punkt c).

6. Istnieją takie niezerowe liczby x i y , że liczba $(x+y)^2$ jest równa

- | | |
|---|------------------|
| T | a) $x^2 - y^2$; |
| T | b) x^2 ; |
| N | c) $x^2 + y^2$. |

Komentarz

- a) Jeżeli $x = 1$ oraz $y = -1$, to $(x+y)^2 = 0 = x^2 - y^2$.
- b) Jeżeli $x = 1$ oraz $y = -2$, to $(x+y)^2 = 1 = x^2$.
- c) Skoro $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, to równość $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ oznacza, że $2xy = 0$, a tym samym $x = 0$ lub $y = 0$. Nie istnieją więc niezerowe liczby x i y spełniające tę równość.

Uwaga

Równość $(x+y)^2 = x^2 - y^2$ można przekształcić do postaci $2y(x+y) = 0$, co oznacza, że jest spełniona, gdy $y = 0$ lub $y = -x$. Z kolei $(x+y)^2 = x^2$ można przekształcić do postaci $y(2x+y) = 0$, co oznacza, że jest spełniona, gdy $y = 0$ lub $y = -2x$.

7. Kwadratową kartkę można rozciąć na n części, z których każda jest trójkątem prostokątnym równoramiennym o przyprostokątnej długości 2. Wynika z tego, że

- | | |
|---|---|
| T | a) pole powierzchni tej kartki jest równe $2n$; |
| N | b) liczba $2n$ jest kwadratem liczby całkowitej; |
| T | c) tę samą kartkę można rozciąć na $2n$ części, z których każda jest trójkątem prostokątnym o przeciwprostokątnej długości 2. |

Komentarz

a) Pole trójkąta prostokątnego równoramiennego o przyprostokątnej długości 2 jest równe $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$. Wobec tego łączne pole n takich trójkątów jest równe $2n$.

b) Kwadrat o przekątnej długości 4 można rozciąć obiema przekątnymi na cztery trójkąty prostokątne równoramienne o przyprostokątnych długości 2. Wówczas dwukrotność liczby uzyskanych części jest równa 8 — nie jest więc kwadratem liczby całkowitej.

c) Trójkąt prostokątny równoramienny o przyprostokątnej długości 2 można rozciąć wzdłuż wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego na dwa trójkąty prostokątne równoramienne o przeciwprostokątnej długości 2. Jeżeli w ten sposób podzielimy każdą część podziału opisanego w treści zadania, otrzymamy rozcięcie na $2n$ części, z których każda jest trójkątem prostokątnym równoramiennym o przeciwprostokątnej długości 2.

8. Istnieje dwucyfrowa liczba naturalna o niezerowych cyfrach, która w wyniku zamiany miejscami swoich cyfr zwiększa się

- | | |
|---|-----------|
| T | a) o 20%; |
| N | b) o 25%; |
| T | c) o 75%. |

Komentarz

b) Liczba dwucyfrowa o cyfrze dziesiątek równej a oraz cyfrze jedności równej b jest równa $10a + b$, a liczba uzyskana w wyniku zamiany miejscami jej cyfr to $10b + a$. Jeżeli a oraz b są niezerowe, to warunek $10b + a = \frac{125}{100} \cdot (10a + b)$ można przekształcić równoważnie kolejno do

$$10b + a = \frac{5}{4} \cdot (10a + b), \quad 40b + 4a = 50a + 5b, \quad 35b = 46a, \quad \frac{a}{b} = \frac{35}{46}.$$

Otrzymany ułamek jest nieskracalny, więc nie jest równy ilorazowi liczb jednocyfrowych.

- a) Liczba 45 spełnia warunki zadania, gdyż $54 = 45 + 9 = 45 + \frac{20}{100} \cdot 45$.
- c) Liczba 12 spełnia warunki zadania, gdyż $21 = 12 + 9 = 12 + \frac{75}{100} \cdot 12$.

Uwaga

Przykład przedstawiony w punkcie a) jest jedyny, a w punkcie c) szukaną własność mają ponadto liczby 24, 36, 48. Aby odnaleźć te przykłady, można przekształcić równości analogiczne do tej zapisanej w rozwiązaniu punktu b).

Można także oprzeć rozumowanie na obserwacji, że różnica między liczbami $10b + a$ oraz $10a + b$ jest równa $9(b - a)$, więc jest podzielna przez 9.

W punkcie a), jeżeli istnieje liczba spełniająca warunki zadania, to 20% tej liczby jest podzielne przez 9. Zatem sama liczba jest podzielna przez 45. Po uwzględnieniu warunku

$a < b$ (oznaczającego, że liczba w wyniku zmiany miejscami cyfr wzrosła) oraz niezerowości cyfr pozostaje tylko jedna kandydatura: 45, która rzeczywiście spełnia warunki zadania.

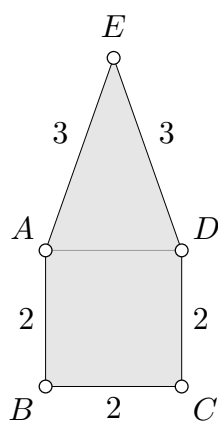
Podobnie w punkcie b) 25% szukanej liczby musiałoby być podzielne przez 9, więc sama liczba musiałaby być podzielna przez 36. Po uwzględnieniu warunku $a < b$ pozostaje tylko liczba 36, która jednak nie spełnia warunków zadania, gdyż liczba 63 jest od niej większa o 75%, a nie o 25%.

9. Istnieje taki pięciokąt, w którym

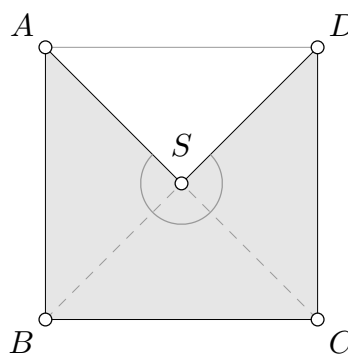
- ☐ N a) długość pewnego boku jest równa sumie długości pozostałych czterech boków;
- ☐ T b) suma długości pewnych dwóch sąsiednich boków jest równa sumie długości pozostałych trzech boków;
- ☐ T c) miara pewnego kąta wewnętrznego jest równa sumie miar pozostałych czterech kątów wewnętrznych.

Komentarz

a) Długość łamanej łączącej dwa punkty, która nie jest zawarta w odcinku łączącym te punkty, jest większa od długości tego odcinka.



rys. 3



rys. 4

b) Rozważmy kwadrat $ABCD$ o boku długości 2 oraz taki punkt E na zewnątrz tego kwadratu, że $AE = DE = 3$ (rys. 3). Wówczas

$$AE + DE = 3 + 3 = 2 + 2 + 2 = AB + BC + CD.$$

c) Rozważmy kwadrat $ABCD$ oraz punkt S będący środkiem tego kwadratu (rys. 4). Wówczas w pięciokącie wklęsłym $ABCD S$ miara kąta wewnętrznego przy wierzchołku S jest równa 270° i jest równa sumie miar kątów wewnętrznych przy pozostałych czterech wierzchołkach:

$$\sphericalangle SAB + \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD + \sphericalangle CDS = 45^\circ + 90^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 270^\circ.$$

Uwaga

Suma miar kątów wewnętrznych w każdym pięciokącie jest równa 540° . Wobec tego w punkcie c) stosowny przykład stanowi dowolny pięciokąt, którego jeden z kątów wewnętrznych ma miarę 270° .

10. Liczby rzeczywiste a, b spełniają nierówności $a^2 > b^2$ i $a + b < 0$. Wynika z tego, że

- | | |
|---|------------------|
| N | a) $a > b$; |
| N | b) $ab > 0$; |
| T | c) $a^3 < b^3$. |

Komentarz

a), b) Jeżeli $a = -2, b = 1$, to warunki zadania są spełnione, a przy tym $a \leq b$ i $ab = -2 \leq 0$.
c) Pierwszy warunek możemy przekształcić do postaci $a^2 - b^2 > 0$, czyli $(a - b)(a + b) > 0$. Jeżeli czynnik $a + b$ jest liczbą ujemną, to iloczyn $(a - b)(a + b)$ jest dodatni tylko wtedy, gdy czynnik $a - b$ jest ujemny. To oznacza, że $a - b < 0$, czyli $a < b$.

Skoro $a + b < 0$, to co najmniej jedna z liczb a, b jest ujemna. Jeżeli liczba a jest ujemna, a liczba b jest nieujemna, to $a^3 < 0 \leq b^3$. Jeżeli zaś obie liczby a i b są ujemne, to z nierówności $a < b$ wynika, że $|a| > |b|$. W konsekwencji $-a^3 = |a|^3 > |b|^3 = -b^3$, czyli $a^3 < b^3$.

Uwaga

Przedstawiony argument pokazuje również, po osobnym rozpatrzeniu nietrudnego przypadku $0 \leq a < b$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a < b$ zachodzi $a^3 < b^3$. Dla kwadratów analogiczny fakt jest prawdziwy, jeżeli założymy dodatkowo, że liczby a, b są nieujemne.

11. W każde pole tablicy 3×3 wpisano liczbę całkowitą w taki sposób, że suma liczb w każdym wierszu jest parzysta. Wynika z tego, że:

- | | |
|---|---|
| T | a) istnieją co najmniej trzy różne pola, w które wpisano liczbę parzystą; |
| T | b) istnieje kolumna zawierająca trzy liczby o parzystej sumie; |
| T | c) istnieją dwa wiersze zawierające sześć liczb o sumie podzielnej przez 4. |

Komentarz

a) W każdym wierszu tablicy znajdują się trzy liczby o parzystej sumie, więc co najmniej jedna z tych liczb jest parzysta — gdyby wszystkie trzy były nieparzyste, ich suma byłaby nieparzysta. To oznacza, że istnieją co najmniej trzy różne pola, w które wpisano liczby parzyste.

b) Suma wszystkich liczb w całej tablicy S jest liczbą parzystą, gdyż jest sumą trzech liczb parzystych (sum w wierszach). Gdyby suma liczb w każdej kolumnie była nieparzysta, to S , jako suma trzech liczb nieparzystych, byłaby nieparzysta. To oznacza, że co najmniej jedna kolumna zawiera trzy liczby o parzystej sumie.

c) W każdym wierszu suma liczb jest liczbą parzystą, więc daje resztę 0 lub 2 przy dzieleniu przez 4. Jeżeli pewne dwa wiersze mają sumy podzielne przez 4, to suma sześciu liczb w tych dwóch wierszach również jest podzielna przez 4. Jeżeli zaś jest co najwyżej jeden wiersz o sumie podzielnej przez 4, to są co najmniej dwa wiersze o sumie dającej resztę 2 przy dzieleniu przez 4. Suma sześciu liczb w takich dwóch wierszach jest liczbą podzielną przez 4.

12. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD , w którym $AB = AC = BD$.

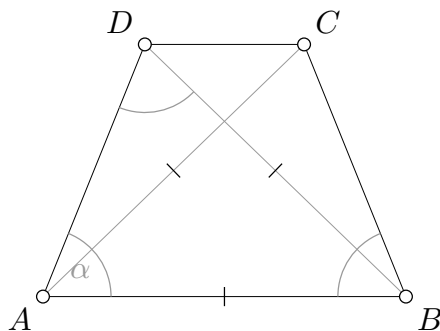
Wynika z tego, że

- | | |
|---|--|
| T | a) $\sphericalangle BAD > 60^\circ$; |
| N | b) $BC \leqslant CD$; |
| T | c) pole trójkąta ABD jest większe od pola trójkąta BCD . |

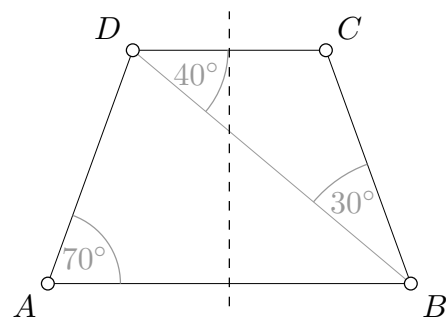
Komentarz

a) Przyjmijmy oznaczenie $\sphericalangle BAD = \alpha$ (rys. 5). Skoro trapez $ABCD$ ma przekątne równej długości, to jest trapezem równoramiennym, więc $\sphericalangle ABC = \alpha$. Skoro $AB = BD$, to $\sphericalangle ADB = \alpha$ i $\sphericalangle ABD = 180^\circ - 2\alpha$. Zatem nierówność $\sphericalangle ABC > \sphericalangle ABD$ przybiera postać

$$\alpha > 180^\circ - 2\alpha, \quad \text{czyli} \quad \alpha > 60^\circ.$$



rys. 5



rys. 6

b) Nierówność $BC \leqslant CD$ jest równoważna nierówności $\sphericalangle BDC \leqslant \sphericalangle CBD$, gdyż w trójkącie BCD naprzeciw większego kąta leży dłuższy bok. W terminach przyjętych wyżej oznaczeń mamy

$$\sphericalangle BDC = \sphericalangle ABD = 180^\circ - 2\alpha \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle CBD = \alpha - (180^\circ - 2\alpha) = 3\alpha - 180^\circ.$$

Wobec tego powyższa nierówność jest spełniona dokładnie wtedy, gdy

$$180^\circ - 2\alpha \leq 3\alpha - 180^\circ, \quad \text{czyli} \quad \alpha \geq 72^\circ.$$

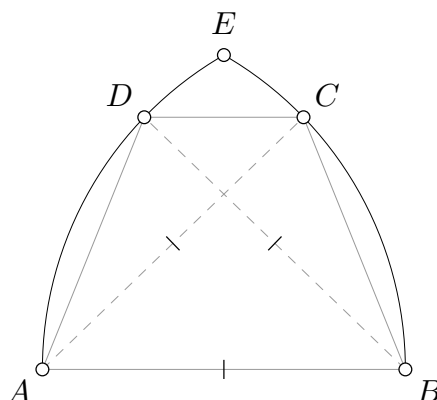
Przykład, w którym nierówność $BC \leq CD$ nie jest spełniona, otrzymamy, gdy $60^\circ < \alpha < 72^\circ$.

Przykładowo niech ABD będzie trójkątem, w którym $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ADB = 70^\circ$, oraz niech C będzie punktem symetrycznym do D względem symetralnej odcinka AB (rys. 6). Trapez $ABCD$ spełnia warunki zadania, ale $\sphericalangle CDB = 40^\circ > 30^\circ = \sphericalangle CBD$, więc $BC > CD$.

c) W trójkącie równoramiennym ABD kąt między podstawą a ramieniem jest ostry, skąd $\sphericalangle BAD < 90^\circ$. W konsekwencji kąty trapezu równoramiennego $ABCD$ przy podstawie AB są ostre, a zatem podstawa AB jest dłuższa od podstawy CD . Wysokość trójkąta ABD opuszczona na podstawę AB jest równa wysokości trójkąta BCD opuszczonej na podstawę CD (jest to odległość między prostymi AB i CD), więc większe pole ma ten z tych dwóch trójkątów, który ma dłuższą podstawę. To oznacza, że pole trójkąta ABD jest większe od pola trójkąta BCD .

Uwaga

Warunki zadania można również zilustrować następującą konstrukcją. Narysujmy odcinek AB oraz, po tej samej stronie prostej AB , dwa łuki okręgów o środkach A , B i promieniu AB . Niech E będzie punktem wspólnym tych łuków (rys. 7).



rys. 7

Jeżeli przetniemy tę figurę prostą równoległą do AB , przecinającą łuki odpowiednio w punktach D i C , to otrzymamy trapez $ABCD$. Z konstrukcji mamy $BD = AB = AC$. W ten sposób można otrzymać każdy trapez spełniający warunki zadania.

Konstrukcja ta daje intuicję stojącą za przykładem skonstruowanym w punkcie b). Jeżeli prostą CD poprowadzimy dostatecznie blisko punktu E , to odcinek CD będzie bardzo krótki, podczas gdy odcinek BC pozostanie znacznie dłuższy. Otrzymamy więc trapez, dla którego $BC > CD$.

13. Dodatnie liczby całkowite a, b są takie, że $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{12} + \frac{1}{24}$. Wynika z tego, że

- ☐ N a) liczby a oraz b są różne;
- ☐ N b) liczba $a + b$ jest parzysta;
- ☐ N c) liczba $a \cdot b$ jest niepodzielna przez 5.

Komentarz

Zauważmy, że $\frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$.

- a) Jeżeli $a = b = 16$, to $\frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$ oraz liczby a i b są równe.
- b) Jeżeli $a = 9$ oraz $b = 72$, to $\frac{1}{9} + \frac{1}{72} = \frac{1}{8}$ oraz liczba $a + b = 81$ jest nieparzysta.
- c) Jeżeli $a = 10$ oraz $b = 40$, to $\frac{1}{10} + \frac{1}{40} = \frac{1}{8}$ oraz liczba $a \cdot b = 400$ jest podzielna przez 5.

Uwaga

Aby znaleźć wszystkie rozwiązania równania $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{8}$, można postąpić następująco. Po pierwsze zauważamy, że jeżeli a, b spełniają to równanie, to $\frac{1}{a} < \frac{1}{8}$ oraz $\frac{1}{b} < \frac{1}{8}$, skąd $a > 8$ oraz $b > 8$. Równoważnie przekształcamy równanie kolejno do postaci

$$8a + 8b = ab, \quad 0 = ab - 8a - 8b, \quad 64 = ab - 8a - 8b + 64, \quad 64 = (a - 8)(b - 8).$$

Skoro $a > 8, b > 8$, to czynniki $a - 8$ oraz $b - 8$ są dodatnimi liczbami całkowitymi. Liczba 64 ma (z dokładnością do kolejności) następujące przedstawienia w postaci iloczynu dwóch takich liczb: $1 \cdot 64, 2 \cdot 32, 4 \cdot 16$ oraz $8 \cdot 8$. To oznacza, że wszystkimi parami (a, b) spełniającymi warunki zadania, w których $a \leq b$ są: $(9, 72), (10, 40), (12, 24), (16, 16)$.

14. Piotr zaznaczył na kartce cztery różne punkty, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Następnie każde dwa z tych punktów połączył odcinkiem. Okazało się, że pośród długości tych odcinków występują tylko dwie różne liczby. Wynika z tego, że

- ☐ N a) pewne dwa z narysowanych odcinków są prostopadłe;
- ☐ N b) pewne dwa z narysowanych odcinków mają punkt wspólny niebędący końcem żadnego z nich;
- ☐ N c) pewne trzy z zaznaczonych punktów są wierzchołkami trójkąta równobocznego.

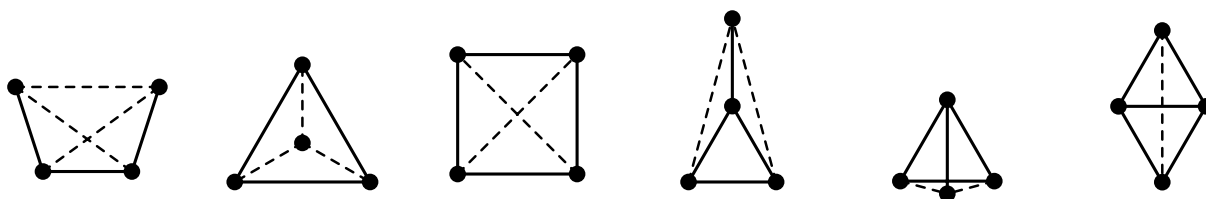
Komentarz

a), c) Jeżeli Piotr zaznaczył cztery spośród pięciu wierzchołków pięciokąta foremnego, to wśród narysowanych odcinków występują tylko dwie długości: długość boku i długość przekątnej pięciokąta. Żadne dwa z narysowanych odcinków nie są prostopadłe i żadne trzy z zaznaczonych punktów nie są wierzchołkami trójkąta równobocznego.

b) Jeżeli Piotr zaznaczył wierzchołki oraz środek pewnego trójkąta równobocznego, to wśród narysowanych odcinków występują tylko dwie długości: długość boku trójkąta oraz odległość jego środka od wierzchołka. Żadne dwa z narysowanych odcinków nie mają punktów wspólnych poza końcami.

Uwaga

Na rysunku 8 przedstawiono wszystkie (z dokładnością do podobieństwa) konfiguracje 4 punktów płaszczyzny, między którymi występują tylko dwie różne odległości. Jedna z długości zaznaczona jest pogrubioną linią, a druga — przerywaną. Pierwsze dwie konfiguracje zostały przywołane w przedstawionych rozwiązaniach.



rys. 8

15. Na powierzchni sześcianu o krawędzi 2 zaznaczono 20 punktów: wszystkie wierzchołki oraz środki wszystkich krawędzi. Pośród odcinków o obydwu końcach w zaznaczonych punktach są dokładnie 24 odcinki o długości

- | | |
|---|-------|
| T | a) 1; |
| T | b) 2; |
| T | c) 3. |

Komentarz

a) Odległość między zaznaczonymi punktami jest równa 1 dokładnie wtedy, gdy jeden z nich jest środkiem pewnej krawędzi sześcianu, a drugi — końcem tej krawędzi. Dla każdej z 12 krawędzi sześcianu są dwa końce, więc łączna liczba wszystkich odcinków o długości 1 jest równa $12 \cdot 2 = 24$.

b) Odległość między zaznaczonymi punktami jest równa 2, jeśli są to końce jednej z krawędzi sześcianu (takich par jest 12) lub jeśli są to środki przeciwległych boków pewnej ściany sześcianu (są dwie takie pary na każdej ścianie, więc łącznie takich par jest $6 \cdot 2 = 12$). Łączna liczba odcinków o długości 2 jest więc równa 24.

c) Odległość między zaznaczonymi punktami jest równa 3 wyłącznie jeśli jeden z tych punktów jest wierzchołkiem sześcianu, a drugi — środkiem jednej z trzech krawędzi wychodzących z wierzchołka przeciwległego do niego. Łączna liczba takich par jest równa $8 \cdot 3 = 24$.

Uwaga

Aby wyczerpująco uzasadnić, że odcinki o długościach 1, 2, 3 nie występują w innych sytuacjach niż opisane w rozwiązaniu, rozpatrzmy wszystkie możliwe rodzaje odcinków ze względu na to, jakiego typu są ich końce. Jeżeli obydwa końce odcinka są wierzchołkami sześcianu (rys. 9), to odcinek ten ma długość:

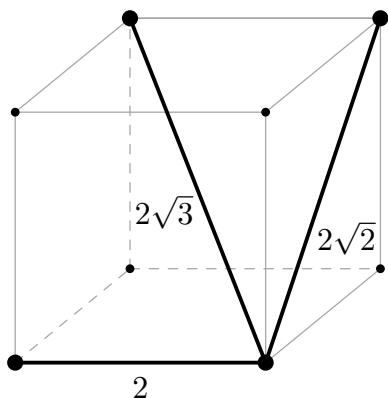
- 2, gdy jest krawędzią sześcianu;
- $2\sqrt{2}$, gdy jest przekątną pewnej ściany;
- $2\sqrt{3}$, gdy jest przekątną sześcianu.

Jeżeli obydwa końce odcinka są środkami krawędzi sześcianu (rys. 10), to odcinek ten ma długość:

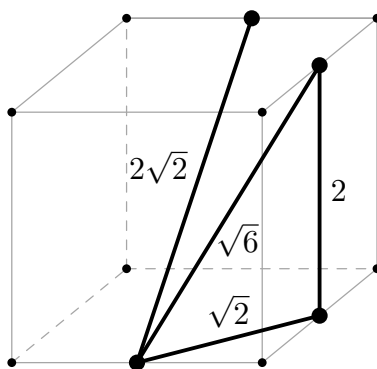
- $\sqrt{2}$, gdy są to środki sąsiednich boków pewnej ściany;
- 2, gdy są to środki przeciwległych boków pewnej ściany;
- $\sqrt{6}$, gdy są to środki pewnej pary krawędzi skośnych;
- $2\sqrt{2}$, gdy są to środki pewnej pary krawędzi przeciwległych.

Jeżeli jeden koniec odcinka jest wierzchołkiem sześcianu, a drugi — środkiem krawędzi (rys. 11), to odcinek ten ma długość:

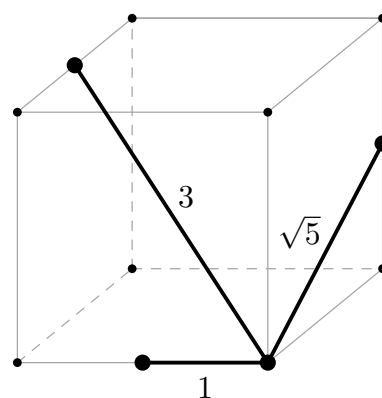
- 1, gdy jest to środek krawędzi mającej koniec w danym wierzchołku;
- $\sqrt{5}$, gdy jest to środek krawędzi zawartej w tej samej ścianie co dany wierzchołek, ale niekończącej się w nim;
- 3, gdy jest to środek krawędzi wychodzącej z wierzchołka przeciwległego.



rys. 9



rys. 10



rys. 11

Poniższa tabela prezentuje łączną liczbę odcinków o poszczególnych długościach.

długość	1	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$2\sqrt{2}$	3	$2\sqrt{3}$
liczba odcinków	24	24	24	48	24	18	24	4