XIII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody drugiego stopnia

(13 stycznia 2018 r.)

Matematyczna Olimpiada Juniorów www.omj.edu.pl

1. Czy istnieją dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c, x o tej własności, że

$$a^2+b^2=c^2 \quad \text{oraz} \quad (a+x)^2+(b+x)^2=(c+x)^2\,?$$

Odpowiedź uzasadnij.

2. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AC \neq BC$. Punkt K jest spodkiem wysokości tego trójkąta poprowadzonej z wierzchołka C. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Udowodnij, że pola czworokątów $AKOC$ oraz $BKOC$ są równe.

3. Wyznacz wszystkie trójki (x,y,z) liczb całkowitych spełniające układ równań

$$\begin{cases} x-yz=1 \\ xz+y=2\,. \end{cases}$$

4. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD. Punkty P i Q leżą odpowiednio na przekątnych AC i BD, przy czym

$$\sphericalangle APD = \sphericalangle BQC\,.$$

Wykaż, że $\sphericalangle AQD = \sphericalangle BPC$.

5. Każdą liczbę całkowitą pomalowano na jeden z trzech kolorów. Udowodnij, że istnieją dwie różne liczby tego samego koloru, których różnica jest kwadratem liczby całkowitej.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku