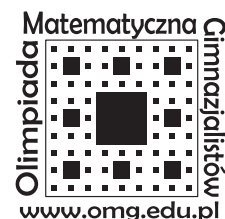


# III Czech-Polish-Slovak Junior Mathematical Match

Team contest  
(Wednesday, 14 May 2014)



1. Mnożinu  $\{1, 2, 3, \dots, 63\}$  sme rozdělili na tri neprázdné disjunktné množiny, vypočítali sme súčin všetkých čísel v každej množine a napokon sme určili najväčšieho spoločného deliteľa uvedených troch súčinov. Aký najväčší možný výsledok sme mohli dostať?

**Uwaga.** Rozwiązanie tego zadania powinno być napisane po czesku.

2. V rovnobežníku  $ABCD$  platí  $|\angle BAD| < 90^\circ$  a  $|AB| > |BC|$ . Os uhla  $BAD$  pretína úsečku  $CD$  v bode  $P$  a polpriamku opačnú k  $CB$  v bode  $Q$ . Dokážte, že stred kružnice opísanej trojuholníku  $CPQ$  je rovnako vzdialený od bodov  $B$  a  $D$ .

**Poznámka.** Řešení této úlohy odevzdejte v polském jazyce.

3. Znajdź wszystkie liczby całkowite  $n$  o tej własności, że

$$|n^3 - 4n^2 + 3n - 35| \quad \text{oraz} \quad |n^2 + 4n + 8|$$

są liczbami pierwszymi.

**Poznámka.** Řešení této úlohy odevzdejte ve slovenském jazyce.

4. Punkt  $M$  jest środkiem boku  $AB$  trójkąta ostrokątnego  $ABC$ . Okrąg o środku w punkcie  $M$  przechodzący przez punkt  $C$  przecina proste  $AC$  i  $BC$  po raz drugi odpowiednio w punktach  $P$  i  $Q$ . Punkt  $R$  należący do odcinka  $AB$  jest taki, że trójkąty  $APR$  i  $BQR$  mają równe pola. Wykaż, że proste  $PQ$  i  $CR$  są prostopadłe.

**Poznámka.** Riešenie tejto úlohy musí byť napísané v češtine.

5. Na tabuli je na počátku napsáno číslo 1. Pokud je na tabuli napsáno číslo  $a$ , pak na ni můžeme napsat rovněž přirozené číslo  $b$  takové, že  $a + b + 1$  je dělitelem čísla  $a^2 + b^2 + 1$ . Rozhodněte, zda se na tabuli po jistém čase může objevit kterékoliv předem dané přirozené číslo. Svou odpověď zdůvodněte.

**Poznámka.** Riešenie tejto úlohy musí byť napísané v polštine.

6. Určete největší a nejmenší hodnotu zlomku

$$F = \frac{y - x}{x + 4y},$$

jestliže reálná čísla  $x$  a  $y$  vyhovují rovnici  $x^2y^2 + xy + 1 = 3y^2$ .

**Uwaga.** Rozwiązanie tego zadania powinno być napisane po słowacku.

(version: mixed)