III Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne Juniorów

Zawody drużynowe (14 maja 2014 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Zbiór $\{1,2,3,\ldots,63\}$ został podzielony na trzy parami rozłączne zbiory A, B, C. Niech a, b, c oznaczają iloczyny elementów odpowiednio zbiorów A, B, C. Znajdź największą wartość, którą może przyjmować $d = \mathrm{NWD}(a,b,c)$.

Szkic rozwiązania

Powiemy, że liczba p dzieli liczbę n w wykładniku k, jeśli $p^k \mid n$. Największy wykładnik, w którym p dzieli n oznaczymy przez $v_p(n)$.

Niech p będzie ustaloną liczbą pierwszą mniejszą od 63. Zauważmy, że p dzieli każdą z liczb a, b, c w wykładniku co najmniej $v_p(d)$, a tym samym p dzieli liczbę $abc = 63!$ w wykładniku co najmniej $3v_p(d)$. W takim razie $v_p(d) \leqslant \frac{1}{3}v_p(63!)$.

Dla $p > 21$ zachodzi nierówność $v_p(63!) < 3$, z której wynika, że $v_p(d) \leqslant \frac{1}{3}v_p(63!) < 1$, skąd $v_p(d) = 0$. Tabela przedstawia wartości $v_p(63!)$ oraz maksymalne wartości $v_p(d)$ dla liczb pierwszych $p \leqslant 21$. Wynika z niej, że liczba d nie może być większa od

p	$v_p(63!)$	$v_p(d)$
19	3	1
17	3	1
13	4	1
11	5	1
7	10	3
5	14	4
3	30	10
2	57	19

$$2^{19} \cdot 3^{10} \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19.$$

Z drugiej strony, powyższa wartość jest osiągalna, co ilustruje następujący podział na zbiory A, B, C:

$$A = \{19,\ 17,\ 13,\ 11,\ 7,\ 14,\ 21,\ 5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 18,\ 24,\ 2,\ 4,\ 32\},$$
$$B = \{38,\ 34,\ 26,\ 22,\ 28,\ 35,\ 42,\ 25,\ 30,\ 55,\ 27,\ 36,\ 54,\ 8,\ 44,\ 46,\ 52\},$$
$$C = \{57,\ 51,\ 39,\ 33,\ 49,\ 56,\ 63,\ 40,\ 45,\ 50,\ 48,\ 60,\ 16,\ 58,\ 62\} \cup P,$$

gdzie zbiór $P = \{1,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61\}$ składa się z liczby 1 oraz liczb pierwszych większych od 19, ale mniejszych od 63.

---

2. Dany jest równoległobok $ABCD$, w którym $\sphericalangle BAD < 90°$ oraz $AB > BC$. Dwusieczna kąta BAD przecina odcinek CD w punkcie P oraz prostą BC w punkcie Q. Wykaż, że środek okręgu opisanego na trójkącie CPQ jest równoodległy od punktów B i D.

Szkic rozwiązania

Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie CPQ. Trójkąty OPC i OCQ są przystające, gdyż trójkąt CPQ jest równoramienny. Stąd wynika, że

$$\sphericalangle OCB = 180° - \sphericalangle OCQ = 180° - \sphericalangle OPC = \sphericalangle OPD.$$

Ponadto, $OC = OP$ oraz $PD = AD = BC$, gdyż trójkąt ADP jest równoramienny. Łącząc otrzymane równości dochodzimy do wniosku, że trójkąty OPD i OCB są przystające (cecha *bok–kąt–bok*), skąd $OD = OB$.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

3. Znajdź wszystkie liczby całkowite n o tej własności, że

$$|n^3-4n^2+3n-35| \quad \text{oraz} \quad |n^2+4n+8|$$

są liczbami pierwszymi.

Szkic rozwiązania

Przyjmijmy oznaczenia $P(n)=n^3-4n^2+3n-35$ oraz $Q(n)=n^2+4n+8$. Wówczas

$$P(n)=n(n-1)(n-3)-35 \quad \text{oraz} \quad Q(n)=(n-2)(n-4)+10n.$$

Stąd wynika, że jeśli n daje resztę 0, 1 lub 3 przy dzieleniu przez 5, to $5\,|\,P(n)$, a jeżeli n daje resztę 2 lub 4 przy dzieleniu przez 5, to $5\,|\,Q(n)$. Wobec tego dla każdej liczby całkowitej n jedna z liczb $P(n)$, $Q(n)$ jest podzielna przez 5. Skoro $|P(n)|$, $|Q(n)|$ mają być liczbami pierwszymi, to $P(n)=5$, $P(n)=-5$, $Q(n)=5$ lub $Q(n)=-5$.

Rozważając kolejno powyższe przypadki, otrzymujemy:

$$P(n)=5, \quad \text{czyli} \quad n(n-1)(n-3)=40, \quad \text{skąd} \quad n=5,$$
$$P(n)=-5, \quad \text{czyli} \quad n(n-1)(n-3)=30 \text{ — brak rozwiązania},$$
$$Q(n)=5, \quad \text{czyli} \quad n(n+4)=-3, \quad \text{skąd} \quad n=-3 \text{ lub } n=-1,$$
$$Q(n)=-5, \quad \text{czyli} \quad n(n+4)=-13 \text{ — brak rozwiązania}.$$

Ponieważ $Q(5)=53$, $|P(-1)|=43$ oraz $|P(-3)|=107$ są liczbami pierwszymi, więc liczby $\mathbf{-3}$, $\mathbf{-1}$ oraz $\mathbf{5}$ spełniają warunki zadania.

---

4. Punkt M jest środkiem boku AB trójkąta ostrokątnego ABC. Okrąg o środku w punkcie M przechodzący przez punkt C przecina proste AC i BC po raz drugi odpowiednio w punktach P i Q. Punkt R należący do odcinka AB jest taki, że trójkąty APR i BQR mają równe pola. Wykaż, że proste PQ i CR są prostopadłe.

Szkic rozwiązania

Załóżmy, że $M\neq R$. Wówczas bez straty ogólności możemy przyjąć, że punkt R należy do wnętrza odcinka AM. Oznaczmy przez N środek odcinka PQ. Dodając stronami równości pól $[AMC]=[BMC]$, $[APR]=[BQR]$ oraz $[PNR]=[QNR]$, uzyskujemy

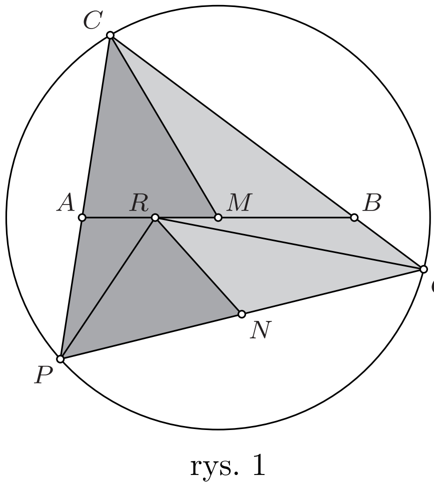
$$[PNRMC]=[QNRMC], \tag{1}$$

gdzie $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$ (rys. 1). Z drugiej strony zachodzi równość

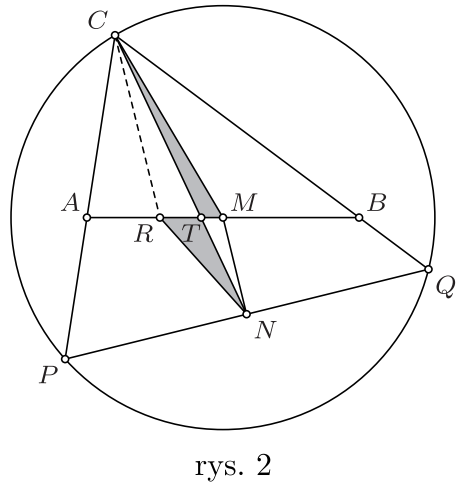
$$[PNC]=[QNC]. \tag{2}$$

Oznaczmy przez T punkt przecięcia odcinków AB i CN (rys. 2). Odejmując stronami równość (2) od równości (1), otrzymujemy

$$[CMT]-[NRT]=[NRT]-[CMT], \quad \text{skąd} \quad [CMT]=[NRT].$$



rys. 1



rys. 2

Dodając do obu stron ostatniej równości wielkość $[MNT]$, uzyskujemy

$$[MNC]=[MNR].$$

Powyższa zależność oznacza, że odległości punktów C i R od prostej MN są równe, a zatem $CR \parallel MN$. Ponadto prosta MN jest symetralną odcinka PQ, więc $MN \perp PQ$, skąd otrzymujemy tezę zadania.

Pozostał do rozpatrzenia przypadek, gdy $M=R$. Wówczas trójkąty APM i BQM mają równe pola i równe boki $AM=BM$ leżące na jednej prostej. Stąd wynika, że odległości punktów P i Q od prostej AB są równe, a tym samym $PQ \parallel AB$. Ponadto punkt M jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie CPQ, leży więc na symetralnej odcinka PQ. W takim razie czworokąt $PQBA$ jest trapezem równoramiennym, a punkt C, jako punkt przecięcia ramion tego trapezu, leży na jego osi symetrii. Ostatecznie $PQ \perp CM$, więc i w tym przypadku warunki zadania są spełnione.

---

5. Początkowo na tablicy napisana jest liczba 1. Jeśli na tablicy znajduje się liczba a, to można dopisać jeszcze taką dodatnią liczbę całkowitą b, że liczba $a+b+1$ jest dzielnikiem liczby a^2+b^2+1. Czy każda dodatnia liczba całkowita może w pewnym momencie pojawić się na tablicy? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Udowodnimy, że odpowiedź na postawione pytanie jest twierdząca. Wykażemy najpierw dwa stwierdzenia, prawdziwe dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n.

(1) Jeżeli na tablicy napisana jest liczba n^2, to można dopisać liczbę n. Rzeczywiście, wynika to natychmiast z następującego rachunku

$$n^4+n^2+1=n^4+2n^2+1-n^2=(n^2+1)^2-n^2=(n^2-n+1)(n^2+n+1)$$

oraz faktu, że liczba n^2-n+1 jest naturalna.

(2) Jeżeli na tablicy napisana jest liczba n^2, to można dopisać liczbę $(n+1)^2$. Zauważamy, że

$$\begin{aligned}(n+1)^4+n^4+1 &= (n^2+2n+1)^2-n^2+n^4+n^2+1= \\ &= (n^2+n+1)(n^2+3n+1)+(n^2+n+1)(n^2-n+1)=2(n^2+n+1)^2,\end{aligned}$$

a liczba $(n+1)^2+n^2+1=2(n^2+n+1)$ jest dzielnikiem liczby $2(n^2+n+1)^2$.

Korzystając z drugiego stwierdzenia $n-1$ razy, uzasadniamy, że na tablicy można napisać kolejno liczby 2^2, 3^2, $\ldots$, n^2 (skoro liczba 1^2 jest już napisana). Pozostaje skorzystać z pierwszego stwierdzenia — skoro na tablicy napisana jest liczba n^2, to można dopisać liczbę n. Wynika stąd, że każda dodatnia liczba całkowita może w pewnym momencie pojawić się na tablicy.

---

6. Znajdź największą i najmniejszą możliwą wartość ułamka

$$F=\frac{y-x}{x+4y}$$

wiedząc, że liczby rzeczywiste x i y spełniają równość

$$x^2y^2+xy+1=3y^2.$$

Szkic rozwiązania

Z równości $x^2y^2+xy+1=3y^2$ wynika, że $y\neq 0$. Dzieląc tę równość stronami przez y^2, otrzymujemy

$$t^2+tx+x^2=3, \quad \text{gdzie} \quad t=\frac{1}{y}.$$

Zauważmy, że

$$F=\frac{y-x}{x+4y}=\frac{1-\frac{x}{y}}{\frac{x}{y}+4}=\frac{1-tx}{tx+4}=\frac{5}{tx+4}-1. \tag{1}$$

Wystarczy zatem skupić się na oszacowaniu wartości iloczynu tx.

Nierówności $(t+x)^2\geqslant 0$ oraz $(t-x)^2\geqslant 0$ są prawdziwe dla dowolnych liczb rzeczywistych t, x. Przekształcając je równoważnie, otrzymujemy

$$-(t^2+tx+x^2)\leqslant tx \quad \text{oraz} \quad tx\leqslant \frac{1}{3}(t^2+tx+x^2).$$

Wobec tego $-3\leqslant tx\leqslant 1$, a zatem na mocy (1), uzyskujemy $0\leqslant F\leqslant 4$.

Pozostaje zauważyć, że $F=0$ dla $x=y=\pm 1$ oraz $F=4$ dla $x=\pm\sqrt{3}$ i $y=\mp\frac{\sqrt{3}}{3}$. Udowodniliśmy zatem, że najmniejsza i największa wartość, jaką może przyjąć ułamek F, wynosi odpowiednio **0** i **4**.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego