Matematyczna Olimpiada Juniorów
www.omj.edu.pl

XVI Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody trzeciego stopnia (20 marca 2021 r.)

Rozwiązania zadań konkursowych

---

1. Dodatnie liczby całkowite a, b oraz n spełniają równość

$$\frac{a}{b}=\frac{a^2+n^2}{b^2+n^2}.$$

Wykaż, że liczba $\sqrt{ab}$ jest całkowita.

Rozwiązanie
Sposób I
Przekształcając równoważnie zależność $\frac{a}{b}=\frac{a^2+n^2}{b^2+n^2}$, uzyskujemy kolejno

$$\begin{aligned}
a(b^2+n^2)&=b(a^2+n^2),\\
ab^2+an^2&=ba^2+bn^2,\\
an^2-bn^2&=ba^2-ab^2,\\
n^2(a-b)&=ab(a-b),\\
(n^2-ab)(a-b)&=0.
\end{aligned}$$

Ostatnia równość jest spełniona jedynie w przypadkach, gdy $n^2-ab=0$ lub $a-b=0$, czyli odpowiednio $n^2=ab$ lub $a=b$. W pierwszym przypadku mamy więc $\sqrt{ab}=n$, a w drugim $\sqrt{ab}=a$, czyli w obu przypadkach liczba $\sqrt{ab}$ jest całkowita.

Sposób II
Z równości $\frac{a}{b}=\frac{a^2+n^2}{b^2+n^2}$ wynika, że istnieje taka dodatnia liczba r (niekoniecznie całkowita), że spełnione są równości

$$ar=a^2+n^2 \quad \text{oraz} \quad br=b^2+n^2.$$

Odejmując te równości stronami, uzyskujemy $ar-br=a^2-b^2$, skąd na mocy wzoru skróconego mnożenia otrzymujemy

$$(a-b)r=(a-b)(a+b).$$

Jeżeli $a=b$, to $\sqrt{ab}=a$, więc teza zadania jest spełniona.

W dalszej części rozwiązania załóżmy więc, że $a\neq b$, czyli $a-b\neq 0$. Wówczas uzyskaną wcześniej równość można podzielić stronami przez $a-b$, otrzymując $r=a+b$. Wobec tego

$$a^2+n^2=ar=a(a+b)=a^2+ab, \quad \text{skąd} \quad n^2=ab$$

i w konsekwencji $\sqrt{ab}=n$ jest liczbą całkowitą.

Sposób III
W rozwiązaniu skorzystamy z następującej obserwacji:

Jeżeli liczby x, y, z, t spełniają równości $x+y=z+t$ oraz $xy=zt$, to $(x,y)=(z,t)$ lub $(x,y)=(t,z)$.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej

Innymi słowy, suma oraz iloczyn pary liczb rzeczywistych wyznaczają tę parę jednoznacznie. Aby przekonać się o prawdziwości tego faktu, zauważmy, że

$$(x-z)(x-t)=x^2+zt-xz-xt=x^2+xy-xz-xt=x(x+y-z-t)=0,$$

skąd $x=z$ lub $x=t$. Na mocy $x+y=z+t$ jeśli $x=z$, to $y=t$ i podobnie jeśli $x=t$, to $y=z$.

Przechodzimy do rozwiązania zadania. Równość $\frac{a}{b}=\frac{a^2+n^2}{b^2+n^2}$ przekształcamy do postaci

$$\frac{a^2+n^2}{a}=\frac{b^2+n^2}{b}, \quad \text{czyli} \quad a+\frac{n^2}{a}=b+\frac{n^2}{b}.$$

Przyjmując $x=a$, $y=\frac{n^2}{a}$, $z=b$, $t=\frac{n^2}{b}$, uzyskujemy $x+y=z+t$. Ponadto $xy=zt=n^2$. Z przytoczonego faktu płynie więc wniosek, że $x=z$, czyli $a=b$ lub $x=t$, czyli $ab=n^2$. W pierwszym przypadku uzyskujemy zatem $\sqrt{ab}=a$, w drugim zaś $\sqrt{ab}=n$.

---

2. W trójkącie prostokątnym ABC punkt M jest środkiem przeciwprostokątnej AB. Punkty P i Q leżą odpowiednio na odcinkach AM i MB, przy czym $PQ=CQ$. Udowodnij, że $AP \leqslant 2\cdot MQ$.

Rozwiązanie

W obu rozwiązaniach skorzystamy z faktu, że jeśli punkt M jest środkiem przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego ABC, to $AM=BM=CM$.

Sposób I

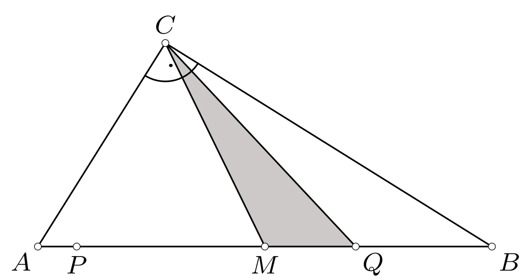
Z nierówności trójkąta zastosowanej dla punktów C, M, Q (rys. 1) otrzymujemy

$$CM \leqslant CQ+MQ.$$

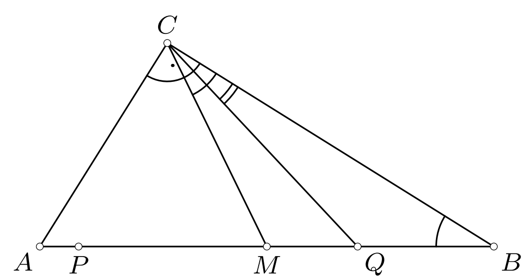
Wykorzystując równość $AM=CM$ oraz założenie $CQ=PQ$, uzyskujemy

$$AP+PM=AM=CM\leqslant CQ+MQ=PQ+MQ=PM+2\cdot MQ,$$

skąd $AP\leqslant 2\cdot MQ$ (przy czym równość zachodzi wyłącznie gdy $Q=M$ i $A=P$).



rys. 1



rys. 2

Sposób II

Z równości $AM=BM$ oraz $PQ=CQ$ wynika, że

$$AP=AM+MQ-PQ=BM+MQ-CQ=2\cdot MQ+BQ-CQ.$$

Do rozwiązania zadania wystarczy więc udowodnić, że $BQ-CQ\leqslant 0$, czyli $CQ\geqslant BQ$.

Odnotujmy, że

$$\measuredangle QBC=\measuredangle MBC=\measuredangle MCB\geqslant \measuredangle QCB,$$

gdyż $BM=CM$ oraz punkt Q leży na odcinku MB. Wobec tego $CQ\geqslant BQ$, gdyż w trójkącie BCQ naprzeciw kąta większej (lub równej) miary leży bok większej (lub równej) długości.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej

3. W turnieju badmintona uczestniczyło 16 zawodników. Każdy zawodnik rozegrał co najwyżej jeden mecz z każdym innym zawodnikiem, żaden mecz nie zakończył się remisem. Po turnieju okazało się, że każdy z zawodników wygrał inną liczbę meczów. Wykaż, że każdy z zawodników przegrał inną liczbę meczów.

Rozwiązanie

W przedstawionych rozwiązaniach liczbę zwycięstw zawodnika (czyli liczbę wygranych przezeń meczów) będziemy nazywali jego *wynikiem.*

Sposób I

Każdy zawodnik zagrał co najwyżej 15 meczów. Wobec tego jest 16 możliwych wyników: 0, 1, 2, …, 15. Ponieważ zawodników jest także 16, a żaden wynik się nie powtórzył, więc każdy z podanych wyników pojawił się dokładnie raz. Oznaczmy przez Z_w zawodnika, który wygrał w meczów, dla $w=0,1,2,\ldots,15$.

Zauważmy, że Z_{15} zagrał ze wszystkimi pozostałymi i wszystkie te mecze wygrał. Wobec tego przegrał 0 meczów. Z kolei Z_{14} przegrał mecz z Z_{15}, a zatem aby rozegrać 14 zwycięskich meczów, musiał zagrać ze wszystkimi pozostałymi (i z nimi wygrać).

Rozumując analogicznie stwierdzamy, że zawodnik Z_w przegrał ze wszystkimi zawodnikami o większych wynikach, a zatem aby wygrać w meczów, musiał zagrać (i wygrać) ze wszystkimi zawodnikami o mniejszych wynikach. Ostatecznie więc dla każdego wyniku $w=0,1,2,\ldots,15$ zawodnik Z_w przegrał $15-w$ meczów, skąd wniosek, że każda z możliwych liczb przegranych meczów pojawia się dokładnie raz.

Sposób II

Podobnie jak w poprzednim sposobie stwierdzamy, że każdy z wyników od 0 do 15 pojawił się dokładnie raz. Zauważmy, że łączna liczba meczów turnieju jest równa łącznej liczbie wszystkich zwycięstw, bo każdy mecz ma dokładnie jednego zwycięzcę. Wobec tego łączna liczba rozegranych meczów jest równa

$$0+1+2+\ldots+15=120.$$

Z drugiej strony największa możliwa liczba rozegranych meczów w całym turnieju jest równa maksymalnej liczbie różnych par jakie utworzyć można spośród 16 zawodników, czyli

$$\frac{1}{2}\cdot 16\cdot 15=120.$$

Stąd wniosek, że wszystkie możliwe mecze zostały rozegrane, czyli każdy z zawodników zagrał dokładnie 15 meczów. Zawodnik, który wygrał w meczów przegrał więc $15-w$ meczów, czyli dwaj zawodnicy mają tyle samo zwycięstw na koncie dokładnie wtedy, gdy mają tyle samo przegranych. Wobec tego skoro liczby wygranych meczów są wszystkie różne, to liczby przegranych meczów także.

Uwaga

Na drodze przeprowadzonego rozumowania doszliśmy do wniosku, że jeśli wszystkie wyniki są różne, to każdych dwóch zawodników rozegrało w istocie *dokładnie* jeden mecz (a nie tylko *co najwyżej* jeden). Nie jest to jednak wniosek oczywisty i należało wyprowadzić go z założeń zadania.

Odnotujmy, że teza zadania jest także prawdziwa dla dowolnej liczby zawodników $n\geqslant 2$, niekoniecznie $n=16$.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej

4. Na boku AB nierównoramiennego trójkąta ABC leżą takie punkty M i N, że $AN = AC$ oraz $BM = BC$. Prosta równoległa do BC przechodząca przez punkt M i prosta równoległa do AC przechodząca przez punkt N przecinają się w punkcie S. Wykaż, że $\sphericalangle CSM = \sphericalangle CSN$.

Rozwiązanie

Sposób I

Oznaczmy punkt przecięcia prostej SM i odcinka AC przez K, a punkt przecięcia prostej SN i odcinka BC przez L (rys. 3). Czworokąt $CKSL$ jest wówczas równoległobokiem. Aby uzasadnić, że jego przekątna SC połowi kąt KSL wystarczy więc wykazać, że równoległobok ten jest rombem.

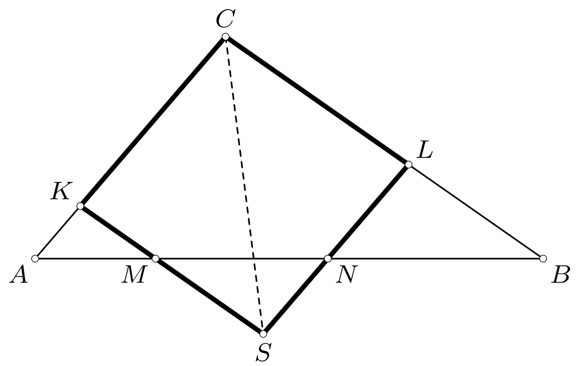
Ponieważ proste SM i BC są równoległe, więc na mocy twierdzenia Talesa otrzymujemy

$$\frac{CK}{AC} = \frac{BM}{AB}, \quad \text{skąd} \quad CK = \frac{AC \cdot BM}{AB} = \frac{AC \cdot BC}{AB}.$$

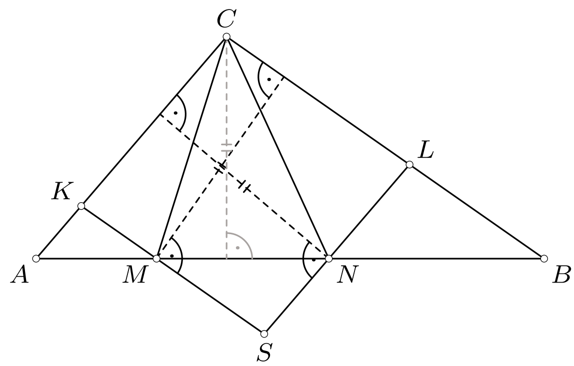
Analogicznie korzystając z równoległości prostych SN i AC, uzyskujemy

$$\frac{CL}{BC} = \frac{AN}{AB}, \quad \text{skąd} \quad CL = \frac{AN \cdot BC}{AB} = \frac{AC \cdot BC}{AB}.$$

Łącząc otrzymane równości, stwierdzamy, że $CK = CL$, czyli istotnie $CKSL$ jest rombem, co kończy rozwiązanie.



rys. 3



rys. 4

Sposób II

Podobnie jak w poprzednim sposobie wykażemy, że równoległobok $CKSL$ jest rombem, skąd wyniknie postulowana równość kątów.

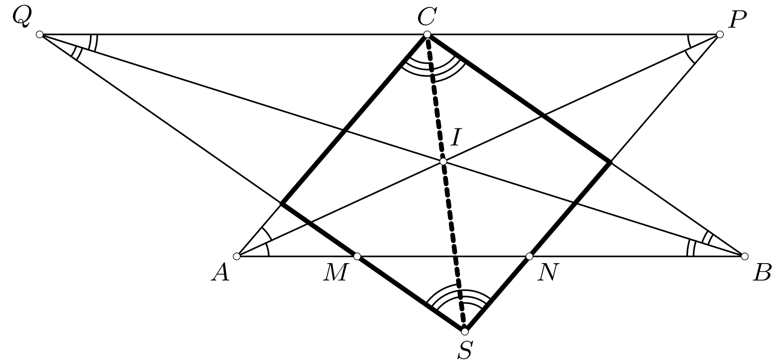
W trójkącie równoramiennym ACN wysokości poprowadzone z wierzchołków C i N są równej długości. Podobnie w trójkącie równoramiennym BCM wysokości poprowadzone z wierzchołków C i M są równej długości. Łącząc te obserwacje dochodzimy do wniosku, że odległość punktu N od prostej AC jest równa odległości punktu M od prostej BC. To oznacza, że wysokość równoległoboku $CKSL$ poprowadzona do boku CK jest równa wysokości poprowadzonej do boku CL, a zatem równoległobok ten jest rombem.

Sposób III

Niech P i Q będą takimi punktami, że czworokąty $ANPC$ oraz $BMQC$ są równoległobokami (rys. 5). Z warunków $AN = AC$ oraz $BM = BC$ wynika, że są to romby.

Niech I będzie punktem przecięcia odcinków AP oraz BQ. Skoro odcinki AP i BQ są zawarte w dwusiecznych kątów wewnętrznych trójkąta ABC przy wierzchołkach A i B, to ich punkt przecięcia I leży także na dwusiecznej kąta przy wierzchołku C. Podobne rozumowanie dla trójkąta PQS prowadzi do wniosku, że prosta SI jest dwusieczną kąta PSQ.

Do zakończenia rozwiązania pozostaje udowodnić, że punkty S, I, C są współliniowe. Zauważmy, że proste CI oraz SI są dwusiecznymi przeciwległych kątów wewnętrznych równoległoboku ograniczonego prostymi AC, BC, PS, QS, a zatem są równoległe. Jednak te proste mają punkt wspólny I, skąd wniosek, że się pokrywają.



rys. 5

Sposób IV

Oznaczmy punkty K i L tak samo, jak w pierwszym sposobie. Z równoległości prostych SK i BC oraz równoramienności trójkąta BMC wynika, że

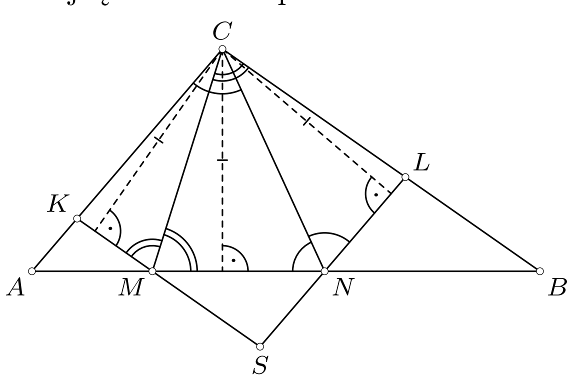
$$\sphericalangle KMC = \sphericalangle BCM = \sphericalangle BMC.$$

To oznacza, że punkt C leży na dwusiecznej kąta BMK, czyli jest jednakowo oddalony od prostych AB i SM (rys. 6). Analogicznie stwierdzamy, że $\sphericalangle LNC = \sphericalangle ANC$, skąd wynika, że punkt C leży na dwusiecznej kąta ANL i w konsekwencji jest jednakowo oddalony od prostych AB i SN.

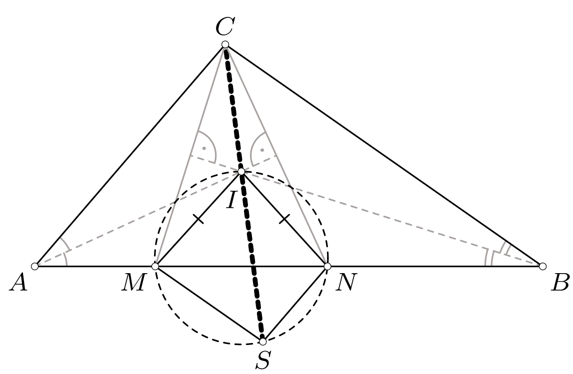
Łącząc powyższe obserwacje, dochodzimy do wniosku, że punkt C jest jednakowo oddalony od prostych SM i SN. To oznacza, że punkt C leży na dwusiecznej kąta KSL, co jest równoznaczne z tezą zadania.

Uwaga

Z przeprowadzonego rozumowania wynika, że istnieje okrąg o środku w punkcie C, który jest styczny do każdej z prostych AB, SN, SM. Taki okrąg nazywa się okręgiem *dopisanym* do trójkąta SMN naprzeciw wierzchołka S.



rys. 6



rys. 7

Sposób V

Niech I będzie punktem przecięcia dwusiecznych kątów BAC oraz ABC (rys. 7). Skoro $AN = AC$, to w trójkącie równoramiennym ACN dwusieczna kąta wewnętrznego przy wierzchołku A jest symetralną boku CN. Podobnie w trójkącie równoramiennym BCM dwusieczna kąta przy wierzchołku B jest jednocześnie symetralną boku CM. Łącząc te obserwacje,

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej

dochodzimy do wniosku, że punkt I jest punktem przecięcia symetralnych odcinków CM i CN, a zatem jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie CMN. Stąd $\sphericalangle MIN = 2\cdot\sphericalangle MCN$.

Korzystając wielokrotnie z własności sumy miar kątów wewnętrznych trójkąta oraz z równości $\sphericalangle ANC = \sphericalangle ACN$ oraz $\sphericalangle BCM = \sphericalangle BMC$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\sphericalangle MIN &= 2\cdot\sphericalangle MCN = 2\cdot(180^\circ - \sphericalangle NMC - \sphericalangle MNC) = \\ &= (180^\circ - \sphericalangle BMC - \sphericalangle BCM) + (180^\circ - \sphericalangle ANC - \sphericalangle ACN) = \\ &= \sphericalangle ABC + \sphericalangle BAC = 180^\circ - \sphericalangle ACB = 180^\circ - \sphericalangle MSN,\end{aligned}$$

co oznacza, że na czworokącie $MSNI$ można opisać okrąg.

Ponieważ $MI = NI$, więc na mocy twierdzenia o kątach wpisanych w okrąg opartych na przystających łukach zachodzi równość $\sphericalangle ISM = \sphericalangle ISN$. Pozostaje wykazać, że punkt C leży na prostej SI. Wynika to na przykład z następującego rachunku

$$\sphericalangle SIM + \sphericalangle MIC = \sphericalangle SNM + 2\cdot\sphericalangle MNC = \sphericalangle BAC + \sphericalangle ANC + \sphericalangle ACN = 180^\circ.$$

---

5. Dane są liczby naturalne a, b, które w zapisie dziesiętnym są zapisane takimi samymi cyframi (tzn. każda z cyfr od 0 do 9 występuje tyle samo razy w zapisie a co w zapisie b). Wykaż, że jeżeli $a+b=10^{1000}$, to liczby a i b są podzielne przez 10.

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że każda z liczb a, b ma dokładnie 1000 cyfr.

Istotnie, skoro suma $a+b$ jest najmniejszą liczbą 1001-cyfrową, to liczby a i b nie mogą mieć więcej niż po 1000 cyfr. Gdyby obydwie miały po mniej niż 1000 cyfr, to

$$a < 10^{999} \quad \text{oraz} \quad b < 10^{999}, \quad \text{skąd} \quad a+b < 2\cdot 10^{999} < 10\cdot 10^{999} = 10^{1000},$$

wbrew założeniu zadania.

Niech a_1 będzie cyfrą jedności liczby a, a_2 — cyfrą dziesiątek liczby a, i tak dalej, aż w końcu niech a_{1000} będzie pierwszą (od lewej) cyfrą w zapisie dziesiętnym liczby a. Analogicznie oznaczmy cyfry b_1, b_2, …, b_{1000} liczby b. Z warunków zadania wynika, że suma wszystkich cyfr od a_1 do a_{1000} jest równa sumie wszystkich cyfr od b_1 do b_{1000}. Oznaczmy tę sumę przez S.

Skoro ostatnią cyfrą sumy $a+b$ jest 0, to $a_1+b_1=0$ lub $a_1+b_1=10$. W pierwszym przypadku uzyskujemy $a_1=b_1=0$, czyli tezę zadania. Wykażemy, że drugi przypadek nie jest możliwy, co zakończy rozwiązanie zadania.

Przypuśćmy, że $a_1+b_1=10$. Z algorytmu pisemnego dodawania wynika kolejno, że

$$a_2+b_2=9, \quad a_3+b_3=9, \quad \ldots, \quad a_{1000}+b_{1000}=9.$$

Uzyskujemy zatem

$$2S = (a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{1000}) + (b_1+b_2+b_3+\ldots+b_{1000}) = 10 + \underbrace{9+9+\ldots+9}_{999\ \text{składników}} = 9001.$$

Lewa strona ostatniej równości jest liczbą parzystą, a prawa — nieparzystą. Uzyskana sprzeczność oznacza, że przypadek $a_1+b_1=10$ nie może mieć miejsca.

Uwaga 1.

Istnieją pary liczb a, b spełniające warunki zadania, na przykład $a=b=5\cdot 10^{999}$. Są wśród nich takie, w których zapisie dziesiętnym cyfra zero użyta jest tylko raz. Przykładowo dla

$$a=\underbrace{88\ldots8}_{499}\,\underbrace{11\ldots1}_{499}\,50,\qquad b=\underbrace{11\ldots1}_{499}\,\underbrace{88\ldots8}_{499}\,50$$

zachodzi równość $a+b=10^{1000}$ oraz liczby a i b są zapisane takimi samymi cyframi.

Uwaga 2.

Tezę zadania można wzmocnić. Okazuje się mianowicie, że jeśli liczby a i b spełniają warunki zadania, to obie są podzielne przez 50.

Aby się o tym przekonać, można kontynuować przedstawione rozumowanie następująco. Wiemy, że $a_1=b_1=0$. Jeśli $a_2+b_2=0$, to liczby a i b są podzielne przez 100 (a więc także przez 50). Jeśli $a_2=b_2=5$, to każda z liczb a i b jest zakończona cyframi „50”, a zatem każda z nich jest podzielna przez 50.

Pozostaje do rozważenia przypadek, w którym $a_2+b_2=10$ oraz $a_2\neq b_2$. Wykażemy, że przypadek ten nie może mieć miejsca. Niech N będzie liczbą wystąpień cyfry a_2 wśród cyfr b_3, ..., b_{1000}. Podobnie jak w rozwiązaniu stwierdzamy, że

$$a_3+b_3=a_4+b_4=\ldots=a_{1000}+b_{1000}=9,$$

co oznacza, że $9-a_2$ występuje N razy wśród cyfr a_3, ..., a_{1000}. Zauważmy jednak, że skoro cyfra a_2 występuje tyle samo razy w zapisie liczby a, jak i w zapisie liczby b oraz $a_2\neq b_1$ i $a_2\neq b_2$, to a_2 występuje $N-1$ razy wśród cyfr a_3, ..., a_{1000}. Zatem $9-a_2$ występuje wśród cyfr b_3, ..., b_{1000} jedynie $N-1$ razy. Jeśli $9-a_2\neq 0$, to cyfra $9-a_2$ nie jest równa żadnej z cyfr a_1, b_1, a_2, b_2 i w związku z tym występuje N razy w zapisie liczby a oraz $N-1$ razy w zapisie liczby b. Jeśli $9-a_2=a_1=b_1=0$, to cyfra ta występuje $N+1$ w zapisie liczby a oraz N razy w zapisie liczby b. Uzyskana w obu przypadkach sprzeczność kończy dowód.