VII Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne Juniorów

Karlov pod Pradědem (Czechy), 22 maja 2018 r.

Zawody drużynowe

Szkice rozwiązań zadań

1. Dodatnie liczby całkowite a, b, c spełniają warunek

$$(a+b+c)^2 \mid ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+3abc.$$

Wykaż, że

$$a+b+c \mid (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2.$$

Szkic rozwiązania

Ponieważ $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+3abc=(ab+bc+ca)(a+b+c)$, więc z danej w treści zadania podzielności wynika, że $a+b+c \mid ab+bc+ca$. Stąd wniosek, że $a+b+c$ jest dzielnikiem liczby

$$2(a+b+c)^2-6(ab+bc+ca)=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2,$$

co było do udowodnienia.

---

2. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o przeciwprostokątnej AB. Punkt K leży wewnątrz trójkąta ABC, a punkty L, M są symetryczne do punktu K odpowiednio względem prostych BC, AC. Wyznacz wszystkie możliwe wartości wyrażenia S_{ABLM}/S_{ABC}, gdzie $S_{\mathcal{F}}$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$.

Szkic rozwiązania

Ponieważ

$$\measuredangle LCM=\measuredangle LCB+\measuredangle BCK+\measuredangle KCA+\measuredangle ACM=2(\measuredangle BCK+\measuredangle KCA)=180^\circ,$$

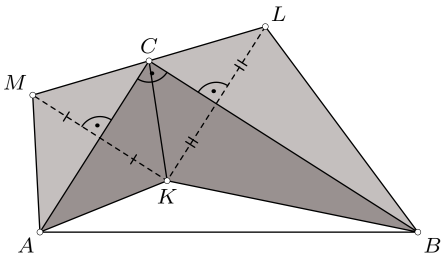
więc punkt C leży na odcinku LM. To oznacza, że

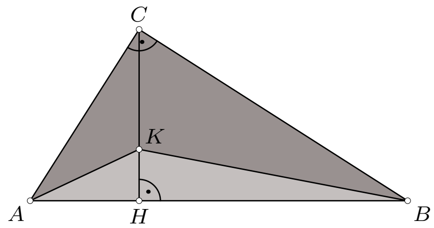
$$S_{ABLM}=S_{ABC}+S_{ACM}+S_{BCL}=S_{ABC}+S_{ACK}+S_{BCK}=2S_{ABC}-S_{ABK},$$

wobec czego

$$\frac{S_{ABLM}}{S_{ABC}}=2-\frac{S_{ABK}}{S_{ABC}}.$$

Ponieważ trójkąt ABK jest zawarty w trójkącie ABC, więc $S_{ABK}/S_{ABC}\in(0,1)$. Z drugiej strony, dla dowolnego $r\in(0,1)$, wybierając punkt K na wysokości CH trójkąta ABC w taki sposób, że $KH=r\cdot CH$, uzyskujemy $S_{ABK}=r\cdot S_{ABC}$. Stąd $S_{ABK}/S_{ABC}=r$, więc S_{ABK}/S_{ABC} może przyjmować dowolną wartość z przedziału $(0,1)$. To oznacza, że szukanym zbiorem możliwych wartości jest przedział $(1,2)$.





---

3. Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste r o następującej własności: Jeżeli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają nierówność $|ax^2+bx+c|\leqslant 1$ dla każdego $x\in\langle -1,1\rangle$, to spełniają również nierówność $|cx^2+bx+a|\leqslant r$ dla każdego $x\in\langle -1,1\rangle$.

Szkic rozwiązania

Niech a, b, c będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi takimi, że $|ax^2+bx+c|\leqslant 1$ dla każdego $x\in\langle -1,1\rangle$. Przyjmując $x=1$, $x=-1$ oraz $x=0$ w danym warunku, otrzymujemy odpowiednio

$$|a+b+c|\leqslant 1, \quad |a-b+c|\leqslant 1 \quad \text{oraz} \quad |c|\leqslant 1. \tag{$*$}$$

Zauważmy, że

$$cx^2+bx+a=(x^2-1)\cdot c+\frac{1+x}{2}\cdot(a+b+c)+\frac{1-x}{2}\cdot(a-b+c),$$

wobec czego, korzystając z nierówności $|y+z+t|\leqslant |y|+|z|+|t|$ prawdziwej dla dowolnych liczb rzeczywistych y, z, t, możemy zapisać

$$|cx^2+bx+a|\leqslant |1-x^2|\cdot|c|+\left|\frac{1+x}{2}\right|\cdot|a+b+c|+\left|\frac{1-x}{2}\right|\cdot|a-b+c|.$$

Skoro $x\in\langle -1,1\rangle$, to liczby $1-x^2$, $1+x$ oraz $1-x$ są nieujemne, więc powyższa nierówność przybiera postać

$$|cx^2+bx+a|\leqslant (1-x^2)\cdot|c|+\frac{1+x}{2}\cdot|a+b+c|+\frac{1-x}{2}\cdot|a-b+c|.$$

Na mocy $(*)$ prawą stronę powyższej nierówności możemy oszacować z góry przez

$$(1-x^2)\cdot 1+\frac{1+x}{2}\cdot 1+\frac{1-x}{2}\cdot 1=2-x^2\leqslant 2.$$

To oznacza, że dla każdego $r\geqslant 2$ zachodzi nierówność $|cx^2+bx+a|\leqslant r$.

Z drugiej strony dla $(a,b,c)=(2,0,-1)$ mamy

$$|ax^2+bx+c|=|2x^2-1|=|x^2+x^2-1|\leqslant |x^2|+|x^2-1|=x^2+1-x^2=1$$

dla każdego $x\in\langle -1,1\rangle$, czyli trójka ta spełnia warunki zadania. Ponadto dla $x=0$ mamy

$$|cx^2+bx+a|=2,$$

co oznacza, że żadna liczba $r<2$ nie ma postulowanej własności. Ostatecznie więc dana własność jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy $r\geqslant 2$.

---

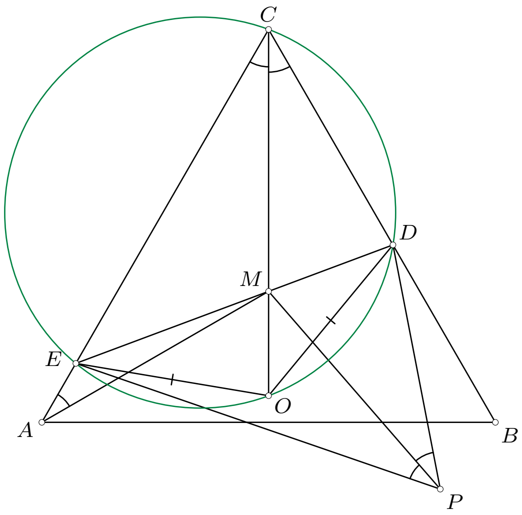
4. Prosta przechodząca przez środek M trójkąta równobocznego ABC przecina odcinki BC i CA odpowiednio w punktach D i E. Okręgi opisane na trójkątach AEM i BDM przecinają się w punktach M i P. Wykaż, że środek okręgu opisanego na trójkącie DEP leży na symetralnej odcinka AB.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez O środek okręgu opisanego na trójkącie DEP. Ponieważ EPM oraz EAM to kąty wpisane w okrąg oparte na tym samym łuku, więc $\sphericalangle EPM=\sphericalangle EAM=30^\circ$. Analogicznie uzasadniamy, że $\sphericalangle DPM=30^\circ$. W konsekwencji

$$\sphericalangle DOE=2\cdot\sphericalangle DPE=2\cdot(\sphericalangle EPM+\sphericalangle DPM)=120^\circ=180^\circ-\sphericalangle DCE,$$

co oznacza, że na czworokącie $DCEO$ można opisać okrąg. Ponadto $DO=EO$, gdyż punkt O leży na symetralnej odcinka DE, a zatem $\sphericalangle DCO=\sphericalangle ECO$. Tym samym punkt O leży na dwusiecznej kąta ACB, czyli na symetralnej odcinka AB, co było do udowodnienia.



---

5. Przy okrągłym stole siedzi $2n$ osób ($n \geqslant 2$) w taki sposób, że każdy siedzi naprzeciwko swojego nieznajomego oraz pomiędzy swoimi znajomymi. Wykaż, że te same osoby mogą usiąść przy okrągłym stole w taki sposób, aby każdy siedział pomiędzy swoim znajomym a nieznajomym.

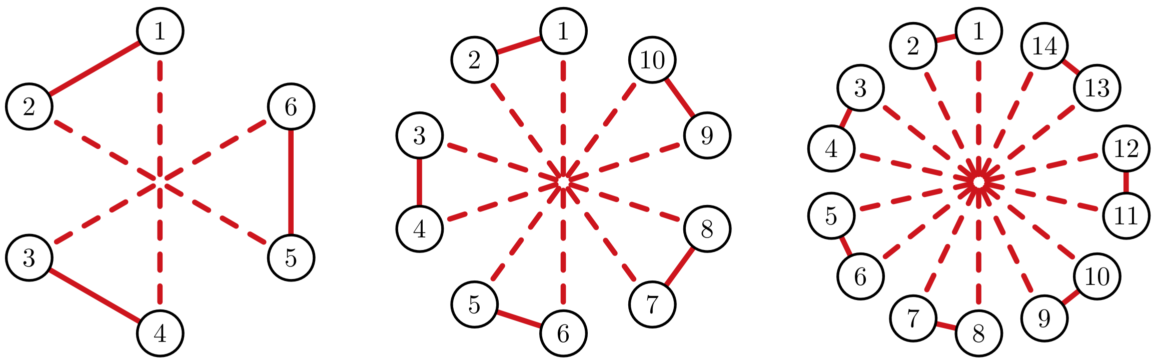
Szkic rozwiązania

Ponumerujmy osoby siedzące przy stole kolejno liczbami 1, 2, 3, ..., $2n$ oraz przyjmijmy oznaczenie $k \equiv \ell$, jeżeli osoby k i ℓ się znają oraz $k \sim \ell$, jeżeli osoby k i ℓ się nie znają. Mamy więc $i \equiv i+1$ oraz $i \sim n+i$ dla każdego $i = 1, 2, \ldots, 2n$, przy czym numery osób rozważamy z dokładnością do wielokrotności liczby $2n$.

Zauważmy, że jeżeli $n = 2k+1$ dla $k \geqslant 1$, to

$$1 \equiv 2 \sim 2k+3 \equiv 2k+4 \sim 3 \equiv 4 \sim \ldots \sim 2k-1 \equiv 2k \sim 4k+1 \equiv 4k+2 \sim 2k+1 \equiv 2k+2 \sim 1$$

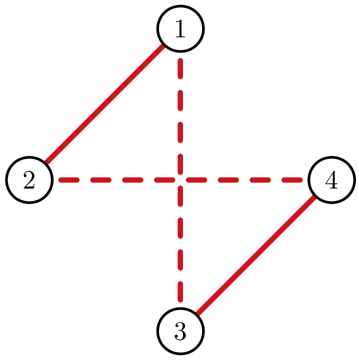
wyznacza kolejność usadzenia przy stole spełniającą zadane warunki (rysunki przedstawiają odpowiednią kolejność dla $k = 1, 2, 3$, przy czym ciągłe linie oznaczają znajomości, a przerywane — nieznajomości).

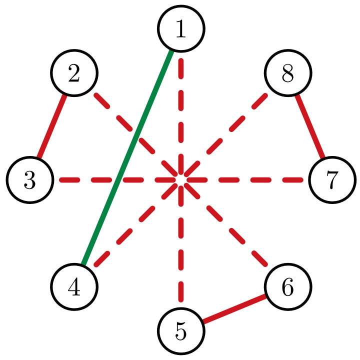


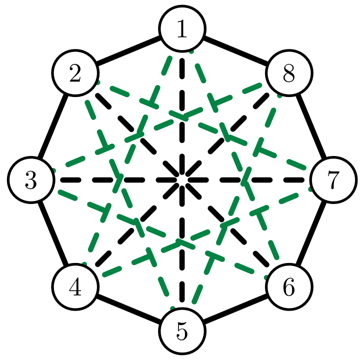
Dla $n = 2$ usadzenie $1 \equiv 2 \sim 4 \equiv 3 \sim 1$ spełnia warunki zadania. Jeśli $n = 2k$ dla $k \geqslant 2$, to

$$i \sim 2k+i \equiv 2k+1+i \sim 1+i \equiv 2+i \sim 2k+2+i \equiv 2k+3+i \sim \ldots \sim 4k-2+i \equiv 4k-1+i \sim 2k-1+i$$

dla $i = 1, 2, \ldots, 4k$. Gdyby istniało i takie, że $i \equiv 2k-1+i$, to pewną ścieżkę opisaną powyżej moglibyśmy dopełnić do usadzenia $2n$ osób mającego żądane w zadaniu własności. Przypuśćmy zatem, że $i \sim 2k-1+i$ dla każdego i (co oznacza również, że $i \sim 2k+1+i$ dla każdego i).







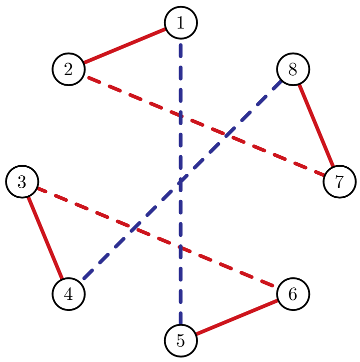
Jeżeli $k=2\ell$, czyli $n=4\ell$, to usadzenie

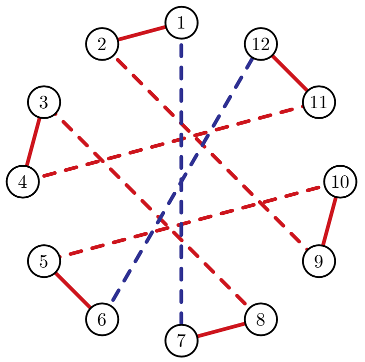
$$1\equiv 2\sim 4\ell+3\equiv 4\ell+4\sim \ldots \sim 4\ell-3\equiv 4\ell-2\sim 8\ell-1\equiv 8\ell\sim$$
$$\sim 4\ell\equiv 4\ell-1\sim 8\ell-2\equiv 8\ell-3\sim \ldots \sim 4\equiv 3\sim 4\ell+2\equiv 4\ell+1\sim 1$$

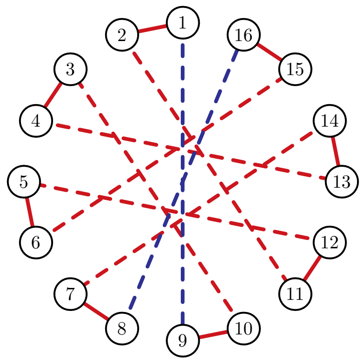
spełnia warunki zadania. Z kolei jeśli $k=2\ell+1$, czyli $n=4\ell+2$, to usadzenie

$$1\equiv 2\sim 4\ell+5\equiv 4\ell+6\sim 5\equiv 6\sim \ldots \sim 4\ell-3\equiv 4\ell-2\sim 8\ell+1\equiv 8\ell+2\sim 4\ell+1\equiv 4\ell+2\sim$$
$$\sim 8\ell+4\equiv 8\ell+3\sim 4\ell\equiv 4\ell-1\sim 8\ell\equiv 8\ell-1\sim \ldots \sim 4\ell+8\equiv 4\ell+7\sim 4\equiv 3\sim 4\ell+4\equiv 4\ell+3\sim 1$$

spełnia warunki zadania.







6. Dodatnie liczby rzeczywiste a, b są takie, że $a^3+b^3=2$. Wykaż, że zachodzi nierówność

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 2(a^2-a+1)(b^2-b+1).$$

Szkic rozwiązania

Z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną zastosowanej do par liczb dodatnich $(a,1)$, $(b,1)$, (a,b) wynika, że

$$(a+1)(b+1)(a+b)\geqslant 2\sqrt{a\cdot 1}\cdot 2\sqrt{b\cdot 1}\cdot 2\sqrt{a\cdot b}=8ab.$$

Ponadto z założeń zadania oraz nierówności między średnimi arytmetyczną i geometryczną dla liczb a^3+1 oraz b^3+1 wynika, że

$$2=\frac{a^3+1+b^3+1}{2}\geqslant\sqrt{(a^3+1)(b^3+1)},\quad \text{skąd}\quad 4\geqslant (a^3+1)(b^3+1).$$

Łącząc dwie uzyskane nierówności, otrzymujemy

$$(a+1)(b+1)(a+b)\geqslant 2ab(a^3+1)(b^3+1),$$

skąd ostatecznie wobec $a>0$ oraz $b>0$ mamy

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\frac{(a+1)(b+1)(a+b)}{ab(a+1)(b+1)}\geqslant\frac{2ab(a^3+1)(b^3+1)}{ab(a+1)(b+1)}=2(a^2-a+1)(b^2-b+1).$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku