



XIII CZESKO-POLSKO-SŁOWACKIE ZAWODY MATEMATYCZNE JUNIORÓW

19 MAJA 2025 — ZAWODY INDYWIDUALNE

1. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p , dla których liczbę

$$p^3 + p^2 + p + 1$$

można zapisać w postaci iloczynu dwóch różnych liczb pierwszych.

2. Wyznacz wszystkie trójkąty, które można podzielić na przystające części, z których każda jest trójkątem prostokątnym równoramiennym, w którym ramiona mają długość 1.

3. Dany jest trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle ACB = 60^\circ$. Punkty D, E leżą odpowiednio na bokach BC, AC tego trójkąta. Punkty K, L są takie, że trójkąty ADK i BEL są równoboczne, przy czym punkty A i L leżą po przeciwnych stronach prostej BE , a punkty B i K leżą po przeciwnych stronach prostej AD . Wykaż, że $AE + BD = KL$.

4. Początkowo na tablicy napisane są trzy nieujemne liczby całkowite. W pojedynczym kroku zastępujemy trójkę a, b, c liczb napisanych na tablicy sumami $a + b, b + c, c + a$. Wyznacz największą liczbę kroków, po wykonaniu której liczba 111 może znaleźć się na tablicy.

5. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$ liczba

$$A_n = \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2} + \frac{3}{n+3} - \frac{4}{n+4} + \dots + \frac{2n-1}{3n-1}$$

jest większa od $\frac{1}{3}$.

Uwaga. Częściowe punkty można uzyskać za poprawny dowód słabszego oszacowania (np., że $A_n > 0$ dla każdego n).

CZAS: 3 GODZINY 30 MINUT