STOWARZYSZENIE NA RZECZ EDUKACJI MATEMATYCZNEJ

KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ GIMNAZJALISTÓW

Nierówności dla początkujących olimpijczyków

Aleksander Kubica

Tomasz Szymczyk

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Publikacja współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

STOWARZYSZENIE NA RZECZ EDUKACJI MATEMATYCZNEJ
KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ GIMNAZJALISTÓW

Nierówności

dla początkujących olimpijczyków

Aleksander Kubica
Tomasz Szymczyk

Warszawa 2014

Publikacja współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Nierówności dla początkujących olimpijczyków

Autorzy: Aleksander Kubica, Tomasz Szymczyk

Skład (systemem TEX/MEX): Tomasz Szymczyk

Projekt okładki: Adam Klemens

Publikacja przygotowana w ramach projektu „Opracowanie i wdrożenie kompleksowego systemu pracy z uczniem zdolnym” finansowanego ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

ISBN 978-83-63288-08-2

Nakład: 5 000

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Instytut Matematyczny PAN
ul. Śniadeckich 8
00-656 Warszawa

www.omg.edu.pl

EGZEMPLARZ BEZPŁATNY

Wstęp

Dowodzenie nierówności nie jest rzeczą łatwą. W niniejszej broszurze chcemy pokazać kilka najprostszych sposobów dowodzenia nierówności. Kierujemy ją do tych uczniów, dla których przygoda z olimpiadą matematyczną dopiero się rozpoczyna. Zadania przedstawione w niniejszym opracowaniu wykorzystywane były między innymi na zajęciach kół matematycznych dla gimnazjalistów oraz podczas seminariów olimpijskich z matematyki, kierowanych do nauczycieli.

Wybrane przez nas zadania pochodzą z różnych źródeł. Na końcu załączamy spis literatury, z której czerpaliśmy zadania. Niektóre z przedstawionych w tej broszurze zadań są oryginalne.

W literaturze matematycznej istnieją publikacje, w których można znaleźć wiele metod dowodzenia nierówności. Sposoby tam przedstawione są na ogół bardziej zaawansowane, a naszym celem było pokazanie kilku najprostszych metod. Wszystkim, którzy pragną pogłębić wiedzę na temat dowodzenia nierówności, szczególnie polecamy [1] i [2].

Badanie znaku różnicy

Aby wykazać, że prawdziwa jest nierówność $L \geqslant P$, wystarczy udowodnić prawdziwość nierówności $L - P \geqslant 0$. Pamiętać należy, że suma i iloczyn liczb nieujemnych jest liczbą nieujemną.

Przykład 1.

Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca.$$

Rozwiązanie
Zauważmy, że

$$a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) = \frac{1}{2}(a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2) =$$
$$= \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] \geqslant 0.$$

Stąd, dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b i c, prawdziwa jest nierówność

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca.$$

Przykład 2.

Wykazać, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geqslant a + b + c.$$

Rozwiązanie
Zbadajmy znak różnicy lewej i prawej strony danej nierówności. Mamy:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} - (a + b + c) = \frac{a^2}{b} - 2a + b + \frac{b^2}{c} - 2b + c + \frac{c^2}{a} - 2c + a =$$
$$= \left(\frac{a}{\sqrt{b}} - \sqrt{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{c}} - \sqrt{c}\right)^2 + \left(\frac{c}{\sqrt{a}} - \sqrt{a}\right)^2 \geqslant 0.$$

Wynika stąd, że dana nierówność jest prawdziwa dla dowolnych dodatnich liczb a, b i c. Zauważmy, że równość zachodzi tylko dla $a = b = c$.

Ćwiczenia

1. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c prawdziwe są nierówności:

a) $3(a^2+b^2+c^2) \geqslant (a+b+c)^2$,

b) $a^2+b^2+c^2+\frac{3}{4} \geqslant a+b+c$.

2. Udowodnić, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a i b prawdziwe są nierówności:

a) $a^3+b^3 \geqslant a^2b+ab^2$,

b) $a^4+b^4 \geqslant a^3b+ab^3$,

c) $a^{n+1}+b^{n+1} \geqslant a^nb+ab^n$, gdzie n jest dodatnią liczbą całkowitą.

3. Wykazać, że jeżeli $a^2+b^2>0$, to

$$\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2} \geqslant \frac{1}{3}.$$

4. Liczby a, b, c, d są takimi liczbami nieujemnymi, że $a+c=1$ i $b+d=1$. Wykazać, że

$$a+b+cd \geqslant 1.$$

5. Wykazać, że dla dodatnich liczb a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c} \leqslant a^2+b^2+c^2.$$

Zależności między średnimi

W dowodach wielu nierówności wykorzystywane są zależności zachodzące między średnimi. Średnie te definiuje się następująco:

- *średnią arytmetyczną* liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazywamy liczbę
$$A_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$
- *średnią geometryczną* liczb nieujemnych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazywamy liczbę
$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n},$$
- *średnią harmoniczną* liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazywamy liczbę
$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}},$$
- *średnią kwadratową* liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazywamy liczbę
$$K_n = \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}.$$

Dla dodatnich liczb rzeczywistych a_1, a_2, ..., a_n zachodzą następujące zależności $H_n \leqslant G_n \leqslant A_n \leqslant K_n$, czyli:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n} \leqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}.$$

Na przykład dla $n=2$ otrzymujemy

$$\frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}} \leqslant \sqrt{a_1\cdot a_2} \leqslant \frac{a_1+a_2}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2}{2}},$$

a dla $n=3$ mamy

$$\frac{3}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}} \leqslant \sqrt[3]{a_1\cdot a_2\cdot a_3} \leqslant \frac{a_1+a_2+a_3}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{3}}.$$

Przykład 3.

Wykazać, że dla nieujemnych liczb a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{b^2c}+\sqrt[3]{c^2a} \leqslant a+b+c.$$

Rozwiązanie

Korzystając z zależności między średnią geometryczną i artymetyczną dla trzech liczb nieujemnych, otrzymujemy

$$\sqrt[3]{a^2b} = \sqrt[3]{a\cdot a\cdot b} \leqslant \frac{a+a+b}{3} = \frac{2a+b}{3}.$$

Analogicznie uzyskujemy nierówności

$$\sqrt[3]{b^2c} \leqslant \frac{2b+c}{3} \quad \text{oraz} \quad \sqrt[3]{c^2a} \leqslant \frac{2c+a}{3}.$$

Dodając otrzymane trzy nierówności stronami, dostajemy

$$\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{b^2c}+\sqrt[3]{c^2a} \leqslant \frac{2a+b}{3}+\frac{2b+c}{3}+\frac{2c+a}{3} = a+b+c,$$

a to właśnie mieliśmy wykazać.

Przykład 4.

Wykazać, że dla nieujemnych liczb a, b zachodzi nierówność

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} \leqslant \sqrt{2(a+b)}.$$

Rozwiązanie

Wykorzystamy nierówność pomiędzy średnią artymetyczną i średnią kwadratową dla liczb nieujemnych $\sqrt{a}$ i $\sqrt{b}$. Mamy stąd:

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} \leqslant \sqrt{\frac{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2}{2}} = \sqrt{\frac{a+b}{2}}$$

i mnożąc obustronnie przez 2, dostajemy

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} \leqslant \sqrt{2(a+b)}.$$

Ćwiczenia

6. Wykazać, że jeżeli a_1, a_2, $\dots$, a_n są liczbami dodatnimi, których iloczyn jest równy 1, to prawdziwa jest nierówność

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \geqslant 2^n$$

7. Wykazać, że dla dodatnich liczb a, b i c zachodzi nierówność

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \leqslant \sqrt{3(a+b+c)}.$$

8. Wykazać, że dla dowolnych liczb a, b należących do przedziału $\langle 0;1\rangle$ prawdziwa jest nierówność

$$ab(1-a)(1-b) \leqslant \frac{1}{16}.$$

9. Wykazać, że jeżeli a, b, c, x są liczbami dodatnimi i $a+b+c=3$, to

$$(x+a)(x+b)(x+c) \leqslant (x+1)^3.$$

10. Wykazać, że dla dodatnich liczb a, b, c zachodzi nierówność

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 9.$$

11. Przyjmując, że zależności między średnimi są prawdziwe dla $n=2$, wykazać, że są prawdziwe dla $n=4$.

Przekształcenia równoważne

Dwie nierówności nazywamy równoważnymi, jeżeli jednocześnie obie są prawdziwe lub jednocześnie obie są fałszywe.

Jeżeli w nierówności $L \geqslant P$ obie strony są nieujemne, to nierówność ta jest równoważna nierówności $L^n \geqslant P^n$, gdzie n jest dodatnią liczbą całkowitą. Przekształceniem równoważnym jest też dodawanie do obu stron nierówności tego samego wyrażenia, mnożenie obu stron nierówności przez tę samą liczbę różną od zera, przy czym przy mnożeniu przez liczbę dodatnią zachowujemy odpowiedni znak nierówności, a przy mnożeniu przez liczbę ujemną zmieniamy znak nierówności na przeciwny. Należy pamiętać, że dodawanie nierówności, o jednakowym zwrocie, stronami jest dopuszczalne, ale nie jest to przekształcenie równoważne. Jeżeli $a \leqslant b$ i $c \leqslant d$, to na pewno $a+c \leqslant b+d$, ale jeżeli $a+c \leqslant b+d$, to nie musi być $a \leqslant b$ i $c \leqslant d$.

Przykład 5.

Wykazać, że dla nieujemnych liczb a, b prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} \leqslant \sqrt{2(a+b)}.$$

Rozwiązanie

Obie strony tej nierówności są nieujemne, więc jest ona równoważna następującej nierówności

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 \leqslant 2(a+b),$$

która z kolei jest równoważna nierówności
$$2\sqrt{ab} \leqslant a+b,$$
czyli
$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geqslant 0.$$
Ostania nierówność jest prawdziwa i jest ona równoważna nierówności z zadania, więc kończy to dowód (zobacz też rozwiązanie przykładu 4.).

Przykład 6.

Wykazać, że dla dodatnich liczb a, b, c, d prawdziwa jest nierówność
$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geqslant \sqrt{ab}+\sqrt{cd}.$$
Rozwiązanie

Obie strony danej nierówności są dodatnie, więc podnosząc do kwadratu obie jej strony, otrzymujemy nierówność równoważną. Wystarczy zatem wykazać, że prawdziwa jest nierówność
$$(a+c)(b+d) \geqslant ab+2\sqrt{abcd}+cd,$$
albo równoważnie $\dfrac{ad+bc}{2} \geqslant \sqrt{abcd}$.

Ostatnia nierówność jest prawdziwa na podstawie zależności między średnią arytmetyczną i geometryczną dla dwóch liczb dodatnich. Kończy to dowód nierówności danej w zadaniu.

Ćwiczenia

12. Wykazać, że dla dodatnich liczb a i b prawdziwa jest nierówność
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geqslant \frac{4}{a+b}.$$

13. Wykazać, że dla dowolnej liczby rzeczywistej a zachodzi nierówność
$$\frac{a^2}{1+a^4} \leqslant \frac{1}{2}.$$

14. Wykazać, że dla nieujemnych liczb całkowitych n zachodzi nierówność
$$\frac{2n+1}{n+1} \cdot \sqrt{\frac{3n+4}{3n+1}} \leqslant 2.$$

15. Wykazać, że dla dodatnich liczb a, b, c, d prawdziwa jest nierówność
$$ac+bd \leqslant \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2}.$$

16. Udowodnić nierówności między średnimi dla $n=2$.

Podstawienia

Dowody wielu nierówności upraszczają się lub sprowadzają się do nierówności znanych, jeżeli zastosujemy różne podstawienia. Nie ma jednej reguły na podstawienia. Wiele różnych podstawień, wraz z komentarzem, prezentowanych jest w [1] oraz [2].

Przykład 7.

Wykazać, że dla nieujemnych liczb rzeczywistych x prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}\leqslant 2\sqrt{x+2}.$$

Rozwiązanie
Przyjmijmy $x+1=a$ i $x+3=b$. Wtedy nasza nierówność przyjmuje postać

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant 2\sqrt{\frac{a+b}{2}}$$

lub równoważnie

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant \sqrt{2(a+b)}.$$

A ta nierówność jest prawdziwa i łatwa do udowodnienia (patrz przykład 4.)

Przykład 8.

Liczby a, b, c są długościami boków trójkąta. Wykazać, że zachodzi nierówność

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\leqslant \sqrt{3(a+b+c)}.$$

Rozwiązanie
Ponieważ liczby a, b, c są długościami boków trójkąta, więc wyrażenia podpierwiastkowe są dodatnie. Przyjmijmy teraz: $a+b-c=x$, $b+c-a=y$, $c+a-b=z$. Nasza nierówność jest więc równoważna nierówności

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\leqslant \sqrt{3(x+y+z)},$$

która jest łatwa do udowodnienia (patrz ćwiczenie 7.).

Ćwiczenia

17. Wykazać, że jeżeli a, b, c są liczbami dodatnimi, to zachodzi nierówność

$$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\geqslant \frac{4}{3}(a+b+c)^2.$$

18. Wykazać, że jeżeli liczby a, b, c są długościami boków trójkąta, to

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\leqslant abc.$$

19. Wykazać, że dla dodatnich liczb a, b i c zachodzi nierówność

$$\frac{2a+1}{b+c+1}+\frac{2b+1}{c+a+1}+\frac{2c+1}{a+b+1}\geqslant 3.$$

20. Wykazać, że dla dowolnych liczb a, b i c zachodzi nierówność

$$5\left(a^2+b^2+c^2\right)+4(ab+bc+ca) \geqslant 3(a+b+c)^2.$$

21. Wykazać, że jeżeli a, b i c są długościami boków trójkąta, to

$$\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{-a+b+c}+\frac{(a+b-c)(-a+b+c)}{a-b+c}+$$
$$+\frac{(-a+b+c)(a-b+c)}{a+b-c} \geqslant a+b+c.$$

Zadania

22. Wykazać, że jeżeli a, b, c są liczbami dodatnimi i $a+b+c=1$, to

$$\frac{\sqrt{a}}{b+1}+\frac{\sqrt{b}}{c+1}+\frac{\sqrt{c}}{a+1} \geqslant \frac{1}{2}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right).$$

23. Wykazać, że dla dodatnich liczb a, b zachodzą nierówności

$$\frac{a^4+b^4}{a^3+b^3} \geqslant \frac{a^2+b^2}{a+b} \geqslant \frac{a+b}{2}.$$

24. Wykazać, że jeżeli a, b, c są liczbami nieujemnymi, to

$$a^3+b^3+c^3+(a+b+c)^3 \geqslant (a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3.$$

25. Wykazać, że dla każdej liczby rzeczywistej $x \geqslant 1$ prawdzie są nierówności

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} < \frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}.$$

26. Wykazać, że jeżeli a, b są takimi liczbami dodatnimi, że $a+b \leqslant ab$, to $a+b \geqslant 4$.

27. Wykazać, że jeżeli a, b, c są liczbami rzeczywistymi, to

$$a^4+b^4+c^4+(a+b+c)^4 \geqslant \frac{2}{\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)^2.$$

28. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2+14 \geqslant 6a+8b+10c.$$

29. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b zachodzi nierówność

$$a^2+b^2+1 \geqslant ab+a+b.$$

30. Udowodnić, że dowolne nieujemne liczby x, y i z spełniają nierówność

$$\frac{2}{x+1}+\frac{2}{y+1}+\frac{2}{z+1} > \frac{1}{xy+1}+\frac{1}{yz+1}+\frac{1}{zx+1}.$$

31. Liczby a, b, c są dodatnie i $abc=1$. Wykazać, że
$$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2 \geqslant 4\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right).$$

32. Udowodnić zależności między średnimi dla $n=3$.

33. Wykazać, że jeżeli $a \geqslant b \geqslant c \geqslant 0$, to $(a-b+c)^3 \leqslant a^3-b^3+c^3$.

34. Wykazać, że jeżeli a, b, c, x są liczbami dodatnimi i $abc=1$, to
$$(x+a)(x+b)(x+c) \geqslant (x+1)^3.$$

35. Wykazać, że dla dowolnych liczb a, b zachodzi nierówność
$$a^4+b^4 \geqslant \frac{1}{2}ab(a+b)^2.$$

36. Liczby a, b, c są dodatnie i $abc=1$. Wykazać, że
$$\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+ca}{1+c} \geqslant 3.$$

37. Wykazać, że jeżeli a, b są liczbami różnymi od zera, to
$$a^4+b^4 \leqslant \frac{a^6}{b^2}+\frac{b^6}{a^2}.$$

38. Niech $0<a \leqslant b$. Wykazać, że
$$\frac{(b-a)^2}{8b} \leqslant \frac{a+b}{2}-\sqrt{ab} \leqslant \frac{(b-a)^2}{8a}.$$

39. Wykazać, że dla nieujemnych liczb a, b i c prawdziwa jest nierówność
$$9(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8(a+b+c)(ab+bc+ca).$$

40. Wykazać, że dla nieujemnych liczb a, b i c zachodzi nierówność
$$(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right) \geqslant 9abc.$$

41. Wykazać, że jeżeli x_1, x_2, …, x_n są liczbami dodatnimi, to zachodzi nierówność
$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right) \geqslant n^2.$$

42. Wykazać, że jeżeli $x \geqslant \sqrt{2}$ i $y \geqslant \sqrt{2}$, to prawdziwa jest nierówność
$$\frac{1}{2+x^2}+\frac{1}{2+y^2} \geqslant \frac{2}{2+xy}.$$

43. Wykazać, że dla nieujemnych liczb a, b i c prawdziwa jest nierówność
$$2\left(\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\right) \leqslant 3\left(\frac{a+b+c}{3}-\sqrt[3]{abc}\right).$$

44. Wykazać, że dla dodatnich liczb a i b takich, że $ab=4$ prawdziwa jest nierówność
$$\frac{(a+1)^3}{b+1}+\frac{(b+1)^3}{a+1}\geqslant 18.$$

45. Wykazać, że dla dodatnich liczb a, b, c takich, że $a+b+c=1$ prawdziwa jest nierówność
$$\frac{1}{1+6a}+\frac{1}{1+6b}+\frac{1}{1+6c}\geqslant 1.$$

46. Wykazać, że dla nieujemnych liczb a, b i c prawdziwa jest nierówność
$$(-a+b+c)^3+(a-b+c)^3+(a+b-c)^3\geqslant 3abc.$$

47. Liczby a, b, c należące do przedziału $(0;1)$ są takie, że $ab+bc+ca=4abc$. Wykazać, że spełniona jest nierówność
$$\sqrt{a(1-b)(1-c)}+\sqrt{b(1-c)(1-a)}+\sqrt{c(1-a)(1-b)}\leqslant\sqrt{abc}.$$

48. Wykazać, że jeżeli m, $n\geqslant 2$ są liczbami całkowitymi, to
$$\frac{1}{\sqrt[n]{m+1}}+\frac{1}{\sqrt[m]{n+1}}>1.$$

49. Wykazać, że jeżeli n jest dodatnią liczbą całkowitą, to prawdziwe są nierówności
$$\frac{6n}{(n+1)(2n+1)}\leqslant 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}\leqslant 2-\frac{1}{n}.$$

50. Wykazać, że jeżeli liczby a, b i c są długościami boków trójkąta, to
$$\sqrt{-a+b+c}+\sqrt{a-b+c}+\sqrt{a+b-c}\leqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}.$$

51. Wykazać, że dla dodatnich liczb a, b i c prawdziwa jest nierówność
$$\sqrt{\frac{bc}{(b+a)(c+a)}}+\sqrt{\frac{ca}{(c+b)(a+b)}}+\sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}}\leqslant\frac{3}{2}.$$

52. Wykazać, że dla dodatnich liczb a, b, c, d i e zachodzi nierówność
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}+\frac{64}{e}\geqslant\frac{256}{a+b+c+d+e}.$$

53. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest nierówność
$$(4x^2+3)(4y^2+3)\geqslant 16(x+y).$$

54. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c, d takich, że $a+b>0$ i $c+d>0$ zachodzi nierówność
$$\frac{ab+bc+cd+da}{a+b+c+d}\geqslant\frac{ab}{a+b}+\frac{cd}{c+d}.$$

55. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a_1, a_2, ..., a_n należących do przedziału $\langle -1;\, 1\rangle$ spełniona jest nierówność

$$\sqrt{(1-a_1)^2+(1+a_2)^2}+\sqrt{(1-a_2)^2+(1+a_3)^2}+\cdots$$
$$\cdots+\sqrt{(1-a_{n-1})^2+(1+a_n)^2}+\sqrt{(1-a_n)^2+(1+a_1)^2}\geqslant n\sqrt{2}.$$

56. Liczby a, b, c, d są takimi liczbami dodatnimi, że $abcd=1$. Wykazać, że

$$4\leqslant\frac{a+b}{2cd}+\frac{b+c}{2da}+\frac{c+d}{2ab}+\frac{d+a}{2bc}\leqslant a^3+b^3+c^3+d^3.$$

57. Wykazać, że jeżeli $|a|\leqslant 1$ i $|b|\leqslant 1$, to zachodzi nierówność

$$\sqrt{1-a^2}+\sqrt{1-b^2}\leqslant 2\sqrt{1-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}.$$

58. Liczby x_1, x_2, ..., x_n są takimi liczbami dodatnimi, że $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=n$. Wykazać, że

$$\frac{1}{1+x_1x_2}+\frac{1}{1+x_2x_3}+\cdots+\frac{1}{1+x_nx_1}\geqslant\frac{n}{2}.$$

59. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c spełniona jest nierówność

$$ab+bc+ca\leqslant\frac{3}{\sqrt{5}}(a^2+b^2+c^2).$$

60. Wykazać, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x, y, z zachodzi nierówność

$$x+y+z+\frac{3}{x}+\frac{3}{y}+\frac{3}{z}+3\geqslant 2(\sqrt{x+3}+\sqrt{y+3}+\sqrt{z+3}).$$

61. Dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają nierówności

$$a\leqslant b\leqslant c\leqslant d \quad \text{i} \quad a+b+c+d\geqslant 1.$$

Wykazać, że zachodzi nierówność

$$a^2+3b^2+5c^2+7d^2\geqslant 1.$$

62. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c należących do przedziału $\langle 0;1\rangle$ prawdziwa jest nierówność

$$a+b+c+2abc\geqslant ab+bc+ac+2\sqrt{abc}.$$

Szkice rozwiązań ćwiczeń i zadań

1. a) Badając znak różnicy lewej i prawej strony danej nierówności, otrzymujemy

$$\begin{aligned}3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2 &= 3(a^2+b^2+c^2)-(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)=\\ &= 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=\\ &= a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2=\\ &= (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

Stąd dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c mamy

$$3(a^2+b^2+c^2) \geqslant (a+b+c)^2.$$

Z rozwiązania wynika, że równość w tej nierówności zachodzi tylko wtedy, gdy $a=b=c$.

b) Podobnie jak w rozwiązaniu ćwiczenia 1a) zbadamy znak różnicy lewej i prawej strony danej nierówności. Zatem

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2+\frac{3}{4}-a-b-c &= a^2-a+\frac{1}{4}+b^2-b+\frac{1}{4}+c^2-c+\frac{1}{4}=\\ &= \left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\left(c-\frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0,\end{aligned}$$

skąd otrzymujemy, że

$$a^2+b^2+c^2+\frac{3}{4} \geqslant a+b+c$$

dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b i c. Równość zachodzi tylko wtedy, gdy $a=b=c=\dfrac{1}{2}$.

2. Rozwiążemy od razu przykład c). Przykłady a) i b) rozwiązuje się tak samo. W rozwiązaniu wykorzystamy wzór

$$a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-a}+b^{n-1}\right),$$

który jest prawdziwy dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b oraz dodatnich liczb całkowitych n. Zauważmy, że:

$$\begin{aligned}a^{n+1}+b^{n+1}-a^nb-ab^n &= a^n(a-b)+b^n(b-a)=a^n(a-b)-b^n(a-b)=\\ &= (a-b)(a^n-b^n)=(a-b)^2\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right) \geqslant 0,\end{aligned}$$

skąd wynika teza zadania.

3. Warunek $a^2+b^2>0$ zapewnia, że co najmniej jedna z liczb a, b jest różna od zera. Ponieważ
$$a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2,$$
oraz co najmniej jedna z liczb a, b jest różna od zera, więc $a^2+ab+b^2>0$. Zbadajmy teraz znak różnicy lewej i prawej strony danej nierówności:
$$\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}-\frac{1}{3}=\frac{3a^2-3ab+3b^2-a^2-ab-b^2}{3\,(a^2+ab+b^2)}=$$
$$=\frac{2a^2-4ab+2b^2}{3\,(a^2+ab+b^2)}=\frac{2(a-b)^2}{3\,(a^2+ab+b^2)}\geqslant 0,$$
gdyż licznik tego ułamka jest nieujemny, a mianownik to liczba dodatnia. Stąd już wynika teza zadania.

4. Przekształcając dane równości, otrzymujemy $c=1-a$ oraz $d=1-b$. Przenosząc wszystkie wyrazy na jedną stronę, jak również wykorzystując powyższe spostrzeżenie i uwzględniając, że liczby a i b są nieujemne, dostajemy:
$$a+b+cd-1=a+b+(1-a)(1-b)-1=a+b+1-a-b+ab-1=ab\geqslant 0,$$
co kończy rozwiązanie zadania.

5. Nietrudno zauważyć, że
$$a^2+b^2+c^2-\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}=\frac{(a^2+b^2+c^2)\,(a+b+c)-(a^3+b^3+c^3)}{a+b+c}=$$
$$=\frac{a^3+b^3+c^3+a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b-(a^3+b^3+c^3)}{a+b+c}=$$
$$=\frac{a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b}{a+b+c}\geqslant 0,$$
gdyż licznik i mianownik ostaniego ułamka są liczbami dodatnimi.

6. Liczby a_1, a_2, …, a_n są liczbami dodatnimi. Korzystając z nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną dla dwóch liczb, otrzymujemy ciąg nierówności
$$1+a_1\geqslant 2\sqrt{a_1},\quad 1+a_2\geqslant 2\sqrt{a_2},\quad \ldots,\quad 1+a_n\geqslant 2\sqrt{a_n}.$$
Obie strony każdej z tych nierówności są dodatnie. Mnożąc je stronami i korzystając z założenia, otrzymujemy
$$(1+a_1)\,(1+a_2)\ldots(1+a_n)\geqslant 2^n\sqrt{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}=2^n.$$

7. Korzystając z zależności między średnią arytmetyczną a kwadratową dla trzech nieujemnych liczb $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ i $\sqrt{c}$, otrzymujemy
$$\frac{1}{3}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\leqslant\sqrt{\frac{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2}{3}}=\sqrt{\frac{a+b+c}{3}},$$
a stąd, po pomnożeniu obu stron nierówności przez 3, tezę zadania. (Porównaj rozwiązanie przykładu 4.)

8. Ponieważ liczby a i b należą do przedziału $\langle 0;1\rangle$, więc liczby a, b, $1-a$, $1-b$ są nieujemne. Stosując do tych czterech liczb nierówność między średnią geometryczną i arytmetyczną otrzymujemy

$$\sqrt[4]{ab(1-a)(1-b)} \leqslant \frac{a+b+1-a+1-b}{4} = \frac{1}{2},$$

skąd, po podniesieniu obu stron nierówności do czwartej potęgi, tezę zadania.

9. Z zależności między średnią geometryczną i arytmetyczną dla trzech liczb dodatnich $x+a$, $x+b$, $x+c$ otrzymujemy

$$\sqrt[3]{(x+a)(x+b)(x+c)} \leqslant \frac{x+a+x+b+x+c}{3} = \frac{3x+a+b+c}{3}.$$

Po skorzystaniu z założenia i podniesieniu obu stron nierówności do trzeciej potęgi, otrzymujemy

$$(x+a)(x+b)(x+c) \leqslant (x+1)^3,$$

a to właśnie mieliśmy wykazać.

10. Korzystając z zależności między średnią arytmetyczną i geometryczną dla dwóch trójek liczb dodatnich: a, b, c oraz $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, otrzymujemy nierówności

$$a+b+c \geqslant 3\sqrt[3]{abc} \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}.$$

Mnożąc te nierówności stronami, otrzymujemy tezę zadania.

11. Pokażemy dowód nierówności między średnią arytmetyczną i kwadratową. Pozostałe nierówności pozostawiamy jako ćwiczenie do samodzielnego rozwiązania.

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} \leqslant \frac{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{\frac{c^2+d^2}{2}}}{2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{c^2+d^2}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}.$$

12. Ponieważ liczby a i b są dodatnie, więc dana nierówność jest równoważna kolejno następującym nierównościom

$$(a+b)^2 \geqslant 4ab; \quad a^2+2ab+b^2 \geqslant 4ab; \quad a^2-2ab+b^2 \geqslant 0; \quad (a-b)^2 \geqslant 0.$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, więc nierówność dana w zadaniu też jest prawdziwa.

13. Nierówność, którą mamy wykazać, jest równoważna kolejno następującym nierównościom

$$2a^2 \leqslant 1+a^4; \quad a^4-2a^2+1 \geqslant 0; \quad \left(a^2-1\right)^2 \geqslant 0.$$

Ponieważ ostatnia z tych nierówności jest zawsze prawdziwa, więc i nierówność dana w zadaniu jest zawsze prawdziwa.

14. Obie strony danej nierówności są dodatnie. Podnosząc tę nierówność obustronnie do kwadratu, otrzymujemy nierówność

$$\frac{(2n+1)^2(3n+4)}{(n+1)^2(3n+1)} \leqslant 4,$$

równoważną nierówności, którą mamy wykazać. Przkształcając dalej równoważnie, otrzymujemy kolejno

$$\begin{gathered}(4n^2+4n+1)(3n+4) \leqslant 4(n^2+2n+1)(3n+1)\\ 12n^3+28n^2+19n+4 \leqslant 12n^3+28n^2+20n+4\\ 0 \leqslant n.\end{gathered}$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, więc nierówność dana w zadaniu też jest prawdziwa.

15. Obie strony danej nierówności są dodatnie. Podnosząc ją obustronnie do kwadratu otrzymujemy nierówność $(ac+bd)^2 \leqslant (a^2+b^2)(c^2+d^2)$, równoważną wyjściowej. Nierówność ta z kolei jest równoważna następującym nierównościom

$$\begin{aligned}a^2c^2+2abcd+b^2d^2 &\leqslant a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2\\ 2abcd &\leqslant a^2d^2+b^2c^2\\ a^2d^2-2abcd+b^2c^2 &\geqslant 0\\ (ad-bc)^2 &\geqslant 0.\end{aligned}$$

Stąd nierówność dana w zadaniu, równoważna ostatniej z tych nierówności, również jest prawdziwa. Równość w danej nierówności zachodzi tylko wtedy, gdy $ad=bc$.

16. Najpierw udowodnimy zależność między średnią arytmetyczną i geometryczną, tj. $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$. Nierówność ta, po równoważnych przekształceniach, przyjmuje postać $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geqslant 0$ i jest ona prawdziwa dla dowolnych nieujemnych liczb a i b, więc kończy to dowód. Równość w tej nierówności zachodzi tylko dla $a=b$.
Korzystając teraz z zależności między średnią arytmetyczną i geometryczną wykażemy zależność między średnia harmoniczną i geometryczną. Weźmy liczby $\frac{1}{a}$ i $\frac{1}{b}$. Wtedy prawdziwa jest nierówność

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2} \geqslant \sqrt{\frac{1}{ab}},$$

a stąd wynika, że $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab}$. Równość w tej nierówności zachodzi tylko wtedy, gdy $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$, czyli wtedy, gdy $a=b$. Dowód zależności między średnią arytmetyczną i kwadratową pozostawiamy jako ćwiczenie do samodzielnego rozwiązania.

17. Przyjmijmy: $a+b=x$, $b+c=y$ i $c+a=z$. Nierówność dana w zadaniu przyjmuje teraz postać równoważną
$$x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{4}{3}\left(\frac{x+y+z}{2}\right)^2.$$
Otrzymana nierówność jest z kolei równoważna nierówności
$$3(x^2+y^2+z^2) \geqslant (x+y+z)^2,$$
która jest prawdziwa (patrz ćwiczenie 1a), więc nierówność dana w zadaniu też jest prawdziwa.

18. Niech $x=-a+b+c$, $y=a-b+c$ i $z=a+b-c$. Liczby a, b i c są długościami boków trójkąta, więc x, y i z są liczbami dodatnimi i dana w zadaniu nierówność jest równoważna nierówności
$$xyz \leqslant \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8}.$$
Nierówność tę możemy zapisać w sposób następujący
$$\sqrt{xy}\cdot\sqrt{yz}\cdot\sqrt{zx} \leqslant \frac{x+y}{2}\cdot\frac{y+z}{2}\cdot\frac{z+x}{2},$$
a na podstawie zależności między między średnią arytmetyczną i geometryczną dla dwóch liczb dodatnich jest ona prawdziwa. Tym samym dowód został zakończony.

19. Przyjmijmy: $b+c+1=x$, $c+a+1=y$, $a+b+1=z$.
Wtedy $2a+2b+2c+3=x+y+z$. Skoro $2b+2c+2=2x$, więc
$$2a+1=x+y+z-2b-2c-2=x+y+z-2(b+c+1)=-x+y+z.$$
Analogicznie otrzymujemy
$$2b+1=x-y+z \quad \text{i} \quad 2c+1=x+y-z.$$
Stąd nasza nierówność przyjmuje postać
$$\frac{-x+y+z}{x}+\frac{x-y+z}{y}+\frac{x+y-z}{z} \geqslant 3 \quad \text{albo} \quad \frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z} \geqslant 6.$$
Ostatnia nierówność jest prawdziwa dla dodatnich x, y i z na podstawie zależności między średnią arytmetyczną i geometryczną — kończy to dowód nierówności danej w zadaniu.

20. Zapiszmy naszą nierówność następująco
$$a^2+4ab+4b^2+b^2+4bc+4c^2+c^2+4ca+4a^2 \geqslant 3(a+b+c)^2.$$
Przyjmując: $a+2b=x$, $b+2c=y$ i $c+2a=z$, można tę nierówność zapisać w postaci
$$x^2+y^2+z^2 \geqslant 3\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2 \quad \text{albo równoważnie} \quad 3(x^2+y^2+z^2) \geqslant (x+y+z)^2.$$
Ostatnia nierówność jest prawdziwa (patrz ćwiczenie 1a), stąd nierówność dana w zadaniu też jest prawdziwa.

21. Ponieważ liczby a, b, c są długościami boków trójkąta, więc liczby

$$x = -a + b + c, \quad y = a - b + c, \quad z = a + b - c$$

są dodatnie i nasza nierówność jest równoważna nierówności

$$\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z} \geqslant x + y + z.$$

Prawdziwość tej nierówności dla dodatnich x, y i z wynika z zależności między średnią arytmetyczną i geometryczną:

$$\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z} = \frac{1}{2}\left(\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{zx}{y} + \frac{xy}{z}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt{z^2} + \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = x + y + z.$$

To kończy dowód danej nierówności.

22. Liczby a, b i c są nieujemne oraz $a+b+c=1$, stąd $1-a\geqslant 0$, $1-b\geqslant 0$ i $1-c\geqslant 0$. Wyznaczając różnicę lewej i prawej strony danej nierówności, otrzymujemy

$$\frac{\sqrt{a}}{b+1} + \frac{\sqrt{b}}{c+1} + \frac{\sqrt{c}}{a+1} - \frac{1}{2}\sqrt{a} - \frac{1}{2}\sqrt{b} - \frac{1}{2}\sqrt{c} =$$
$$= \sqrt{a}\left(\frac{1}{b+1} - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{b}\left(\frac{1}{c+1} - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{c}\left(\frac{1}{a+1} - \frac{1}{2}\right) =$$
$$= \frac{\sqrt{a}(1-b)}{2(b+1)} + \frac{\sqrt{b}(1-c)}{2(c+1)} + \frac{\sqrt{c}(1-a)}{2(a+1)} \geqslant 0.$$

Stąd wynika prawdziwość nierówności danej w zadaniu.

23. Udowodnimy lewą z tych nierówności (prawą pozostawiamy jako ćwiczenie do samodzielnego rozwiązania). Badając znak różnicy lewej i prawej strony nierówności, dostajemy

$$\frac{a^4+b^4}{a^3+b^3} - \frac{a^2+b^2}{a+b} = \frac{(a^4+b^4)(a+b) - (a^3+b^3)(a^2+b^2)}{(a+b)(a^3+b^3)} =$$
$$= \frac{ab(a^3+b^3-a^2b-ab^2)}{(a+b)(a^3+b^3)} = \frac{ab(a^2(a-b)-b^2(a-b))}{(a+b)(a^3+b^3)} = \frac{ab(a-b)^2(a+b)}{(a+b)(a^3+b^3)} \geqslant 0,$$

co kończy dowód lewej nierówności.

24. Po podniesieniu wyrażeń w nawiasach do trzeciej potęgi i obliczeniu różnicy lewej i prawej strony, otrzymujemy

$$a^3 + b^3 + c^3 + (a+b+c)^3 - \left((a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3\right) = 6abc \geqslant 0,$$

gdyż z założenia liczby a, b i c są nieujemne. Tym samym dana w zadaniu nierówność została wykazana.

25. Wykażemy nierówność prawą (lewą dowodzi się analogicznie i pozostawiamy jako ćwiczenie do samodzielnego rozwiązania). Wyznaczmy różnicę prawej i lewej strony. Po przeniesieniu wyrazów na jedną stronę i sprowadzeniu do wspólnego mianownika, dostajemy

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x}}=$$
$$=\frac{x+\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}-x-1}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}=$$
$$=\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}>0,$$

ponieważ z założenia $x\geqslant 1$. Stąd wynika, że prawa nierówność jest prawdziwa.

26. Korzystając z założenia oraz zależności między średnią geometryczną i arytmetyczną dla dwóch liczb dodatnich, otrzymujemy kolejno

$$x+y\leqslant xy\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2;\qquad (x+y)^2\geqslant 4(x+y);\qquad x+y\geqslant 4,$$

a to właśnie mieliśmy wykazać.

27. Z zależności między średnią arytmetyczną i geometryczną dla dwóch liczb nieujemnych otrzymujemy

$$a^4+\frac{1}{3}(a+b+c)^4\geqslant 2\cdot\sqrt{\frac{1}{3}a^4(a+b+c)^4}=\frac{2}{\sqrt{3}}a^2(a+b+c)^2.$$

Analogicznie

$$b^4+\frac{1}{3}(a+b+c)^4\geqslant 2\cdot\sqrt{\frac{1}{3}b^4(a+b+c)^4}=\frac{2}{\sqrt{3}}b^2(a+b+c)^2$$

$$c^4+\frac{1}{3}(a+b+c)^4\geqslant 2\cdot\sqrt{\frac{1}{3}c^4(a+b+c)^4}=\frac{2}{\sqrt{3}}c^2(a+b+c)^2.$$

Dodając stronami otrzymane trzy nierówności, dostajemy tezę zadania.

28. W rozwiązaniu wykorzystamy wzór

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$$

na kwadrat sumy trzech wyrażeń.
Badając znak różnicy lewej i prawej strony, dostajemy

$$\begin{aligned}&a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2+14-6a-8b-10c=\\&=a^2+b^2+c^2+(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)+14-6a-8b-10c=\\&=(a^2+b^2+1+2ab-2a-2b)+\\&\qquad+(a^2+c^2+4+2ac-4a-4c)+\\&\qquad\qquad+(b^2+c^2+9+2bc-6b-6c)=\end{aligned}$$

$$=(a+b-1)^2+(a+c-2)^2+(b+c-3)^2 \geqslant 0,$$

skąd wynika prawdziwość nierówności danej w zadaniu.

29. Badając znak różnicy lewej i prawej strony danej nierówności, otrzymujemy

$$\begin{aligned} a^2+b^2+1-ab-a-b &= \frac{1}{2}\left(a^2-2ab+b^2+a^2-2a+1+b^2-2b+1\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left((a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2\right) \geqslant 0, \end{aligned}$$

skąd wynika prawdziwość nierówności danej w zadaniu. Równość w tej nierówności zachodzi tylko dla $a=b=1$.

30. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}-\frac{1}{xy+1} &= \frac{(y+1)(xy+1)+(x+1)(xy+1)-(x+1)(y+1)}{(x+1)(y+1)(xy+1)} = \\ &= \frac{xy^2+xy+y+1+x^2y+xy+x+1-xy-x-y-1}{(x+1)(y+1)(xy+1)} = \\ &= \frac{xy(x+y+1)+1}{(x+1)(y+1)(xy+1)} > 0. \end{aligned}$$

Stąd

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1} > \frac{1}{xy+1}.$$

Analogicznie dostajemy $\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1} > \frac{1}{yz+1}$ oraz $\frac{1}{z+1}+\frac{1}{x+1} > \frac{1}{zx+1}$. Dodając otrzymane nierówności stronami, uzyskujemy tezę zadania.

31. Przekształcając lewą stronę nierówności, korzystając z założenia oraz zależności między średnią arytmetyczną i geometryczną dla dwóch liczb, otrzymujemy

$$\begin{aligned} 2a^2+2b^2+2c^2+2ab+2bc+2ca &= 2a^2+\frac{2}{a}+2b^2+\frac{2}{b}+2c^2+\frac{2}{c} \geqslant \\ &\geqslant 2\sqrt{2a^2\cdot\frac{2}{a}}+2\sqrt{2b^2\cdot\frac{2}{b}}+2\sqrt{2c^2\cdot\frac{2}{c}} = 4\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right). \end{aligned}$$

32. Udowodnimy najpierw zależność między średnią arytmetyczną i geometryczną. Biorąc cztery liczby: a, b, c oraz $\frac{a+b+c}{3}$ i stosując do nich nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną dla czterech liczb (zobacz ćwiczenie 11), dostajemy

$$\sqrt[4]{abc\cdot\frac{a+b+c}{3}} \leqslant \frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4}.$$

Przekształcając równoważnie tę nierówność, otrzymujemy kolejno

$$\sqrt[4]{abc\cdot\frac{a+b+c}{3}}\leqslant\frac{3a+3b+3c+a+b+c}{12}=\frac{a+b+c}{3}$$
$$abc\cdot\frac{a+b+c}{3}\leqslant\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4$$
$$abc\leqslant\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$$
$$\sqrt[3]{abc}\leqslant\frac{a+b+c}{3}.$$

Analogicznie dowodzi się zależność między średnią arytmetyczną i kwadratową:

$$\frac{a+b+c+\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}}{4}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}{4}}$$
$$\left(\frac{a+b+c+\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}}{4}\right)^2\leqslant\frac{a^2+b^2+c^2+\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}{4}=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$
$$\frac{a+b+c+\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}}{4}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$
$$a+b+c+\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\leqslant 4\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}},$$

a stąd

$$\frac{a+b+c}{3}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

Dowód zależności między średnią harmoniczną i geometryczną pozostawiamy jako ćwiczenie do samodzielnego rozwiązania.

33. Zbadamy znak różnicy lewej i prawej strony danej nierówności.

$$\begin{aligned}&(a-b+c)^3-\left(a^3-b^3+c^3\right)=\\&=a^3-b^3+c^3-3a^2b+3ab^2+3a^2c+3ac^2+3b^2c-3bc^2-6abc-a^3+b^3-c^3=\\&=-3a^2(b-c)+3a(b-c)^2+3bc(b-c)=-3(b-c)\left(a^2+a(b-c)-bc\right)=\\&=-3(b-c)(a+b)(a-c)\leqslant 0,\end{aligned}$$

ponieważ na podstawie założenia mamy $b\geqslant c$ oraz $a\geqslant c$.

34. Przekształcając lewą stronę nierówności, otrzymujemy

$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc.$$

Z zależności między średnią arytmetyczną i geometryczną dla trzech liczb dodatnich mamy

$$a+b+c \geqslant 3\sqrt[3]{abc} = 3 \quad \text{oraz} \quad ab+bc+ca \geqslant 3\sqrt[3]{(abc)^2} = 3.$$

Stąd i z założenia dla dodatnich x jest

$$(x+a)(x+b)(x+c) \geqslant x^3+3x^2+3x+1 = (x+1)^3,$$

a to mieliśmy wykazać.

35. Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwe są nierówności

$$a^4+b^4 \geqslant 2a^2b^2 \quad \text{oraz} \quad a^4+b^4 \geqslant a^3b+ab^3.$$

Dodając te nierówności stronami, otrzymujemy $2(a^4+b^4) \geqslant ab(a^2+2ab+b^2)$, a stąd $a^4+b^4 \geqslant \frac{1}{2}ab(a+b)^2$.

36. Korzystając z założenia $abc=1$ oraz zależności między średnią arytmetyczną i geometryczną dla trzech liczb dodatnich, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+ca}{1+c} &= \frac{abc+ab}{1+a}+\frac{abc+bc}{1+b}+\frac{abc+ca}{1+c} = \\ = \frac{ab(1+c)}{1+a}+\frac{bc(1+a)}{1+b}+\frac{ca(1+b)}{1+c} &\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{ab\cdot bc\cdot ca\cdot(1+c)\cdot(1+a)\cdot(1+b)}{(1+c)\cdot(1+a)\cdot(1+b)}} = \\ &= 3\sqrt[3]{(abc)^2} = 3.\end{aligned}$$

37. Badając znak różnicy lewej i prawej strony nierówności, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{a^6}{b^2}+\frac{b^6}{a^2}-a^4-b^4 &= \frac{a^8+b^8-a^6b^2-a^2b^6}{a^2b^2} = \frac{a^6\left(a^2-b^2\right)-b^6\left(a^2-b^2\right)}{a^2b^2} = \\ &= \frac{\left(a^2-b^2\right)\left(a^6-b^6\right)}{a^2b^2} = \frac{(a-b)^2(a+b)\left(a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5\right)}{a^2b^2} = \\ &= \frac{(a-b)^2(a+b)\left(a^4(a+b)+a^2b^2(a+b)+b^4(a+b)\right)}{a^2b^2} = \\ &= \frac{(a-b)^2(a+b)^2\left(a^4+a^2b^2+b^4\right)}{a^2b^2} \geqslant 0.\end{aligned}$$

Stąd wynika prawdziwość naszej nierówności dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b.

38. Wykażemy lewą nierówność — prawą dowodzi się analogicznie. Wyznaczając różnicę prawej i lewej strony danej nierówności, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}-\frac{(b-a)^2}{8b} &= \frac{4b(a+b)-8b\sqrt{ab}-\left(\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)\right)^2}{8b} = \\ &= \frac{4b\left(a-2\sqrt{ab}+b\right)-\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^2\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)^2}{8b} =\end{aligned}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^2}{8b} \cdot \left[4b - \left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^2 \left(2\sqrt{b}-\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)\left(2\sqrt{b}+\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)}{8b} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^3 \left(3\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)}{8b} \geqslant 0,$$

gdyż z założenia $b \geqslant a > 0$. Zatem $\dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geqslant \dfrac{(b-a)^2}{8b}$.

39. Wymnażając nawiasy po obu stronach nierówności, dostajemy

$$18abc + 9a^2b + 9a^2c + 9b^2a + 9b^2c + 9c^2a + 9c^2b \geqslant$$
$$\geqslant 24abc + 8a^2b + 8a^2c + 8b^2a + 8b^2c + 8c^2a + 8c^2b.$$

Powyższa nierówność jest równoważna kolejno nierównościom

$$a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b \geqslant 6abc$$

$$\frac{1}{6}\left(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b\right) \geqslant abc,$$

a ostatnia nierówność jest prawdziwa na mocy nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną. Stąd nierówność dana w zadaniu jest prawdziwa.

40. Z zależności między średnią arytmetyczną i geometryczną dla trzech liczb nieujemnych mamy

$$a+b+c \geqslant 3\sqrt[3]{abc} \quad \text{oraz} \quad a^2+b^2+c^2 \geqslant 3\sqrt[3]{(abc)^2}.$$

Mnożąc te nierówności stronami, otrzymujemy

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geqslant 9\sqrt[3]{(abc)^3} = 9abc.$$

41. Wykorzystamy nierówność między średnią arytmetyczną i harmoniczną dla n liczb dodatnich

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Przekształcając tę nierówność równoważnie otrzymujemy tezę zadania, czyli

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}\right) \geqslant n^2.$$

42. Przyjmijmy: $L = \dfrac{1}{2+x^2} + \dfrac{1}{2+y^2}$ oraz $P = \dfrac{1}{2+xy}$. Wyznaczmy różnicę

$$L - P = \frac{1}{2+x^2} + \frac{1}{2+y^2} - \frac{1}{2+xy} =$$
$$= \frac{(2+y^2)(2+xy) + (2+x^2)(2+xy) - 2(2+x^2)(2+y^2)}{(2+x^2)(2+y^2)(2+xy)} =$$

$$= \frac{4+2y^2+2xy+xy^3+4+2x^2+2xy+x^3y-8-4x^2-4y^2-2x^2y^2}{(2+x^2)(2+y^2)(2+xy)} =$$
$$= \frac{x^3y-2x^2y^2+xy^3-2(x^2-2xy+y^2)}{(2+x^2)(2+y^2)(2+xy)} =$$
$$= \frac{xy(x-y)^2-2(x-y)^2}{(2+x^2)(2+y^2)(2+xy)} = \frac{(x-y)^2(xy-2)}{(2+x^2)(2+y^2)(2+xy)}.$$

Ponieważ $x \geqslant \sqrt{2}$ i $y \geqslant \sqrt{2}$, więc $xy-2 \geqslant 0$. Stąd $L-P \geqslant 0$, a to wystarczyło wykazać.

43. Po wykonaniu mnożenia po lewej i prawej stronie nierówności możemy ją zapisać równoważnie

$$3\sqrt[3]{abc} \leqslant c+2\sqrt{ab}.$$

Podstawiając: $a=x^6$, $b=y^6$, $c=z^6$ nierówność przyjmuje postać

$$3x^2y^2z^2 \leqslant z^6+2x^3y^3 \quad \text{albo równoważnie} \quad x^2y^2z^2 \leqslant \frac{z^6+x^3y^3+x^3y^3}{3}.$$

Ostatnia nierówność, na podstawie nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną, jest prawdziwa, więc nierówność dana w zadaniu, równoważna ostatniej nierówności, też jest prawdziwa.

44. Korzystając z nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną, dostajemy $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}=4$ oraz

$$\frac{(a+1)^3}{b+1}+\frac{(b+1)^3}{a+1} \geqslant 2\sqrt{\frac{(a+1)^3}{b+1}\cdot\frac{(b+1)^3}{a+1}} = 2(a+1)(b+1) =$$
$$= 2ab+2a+2b+2 = 10+2(a+b) \geqslant 10+2\cdot 4 = 18.$$

czyli to, co mieliśmy udowodnić.

45. Z zadania 41. wiemy, że dla dodatnich liczb x_1, x_2, …, x_n prawdziwa jest nierówność

$$(x_1+x_2+\dots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}\right) \geqslant n^2.$$

Stosując tę nierówność do liczb $x_1=1+6a$, $x_2=1+6b$, $x_3=1+6c$, dostajemy

$$(1+6a+1+6b+1+6c)\left(\frac{1}{1+6a}+\frac{1}{1+6b}+\frac{1}{1+6c}\right) \geqslant 3^2.$$

Zauważmy, że $1+6a+1+6b+1+6c=3+6(a+b+c)=9$. Wykorzystując ten fakt w powyższej nierówności, otrzymujemy

$$9\left(\frac{1}{1+6a}+\frac{1}{1+6b}+\frac{1}{1+6c}\right) \geqslant 9 \quad \text{czyli} \quad \frac{1}{1+6a}+\frac{1}{1+6b}+\frac{1}{1+6c} \geqslant 1.$$

46. Wykorzystując wzór

$$(x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3+3x^2(y+z)+3y^2(z+x)+3z^2(x+y)+6xyz$$

do wyrażeń w nawiasach po lewej stronie danej nierówności oraz redukując wyrazy podobne, otrzymujemy

$$\begin{aligned}&(-a+b+c)^3+(a-b+c)^3+(a+b-c)^3=\\&\qquad=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3b^2c+3c^2a+3ab^2+3bc^2+3ca^2-18abc.\end{aligned}$$

Korzystając z zależności między średnią arytmetyczną i geometryczną, mamy

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3&\geqslant 3abc\\3a^2b+3b^2c+3c^2a&\geqslant 9abc\\3ab^2+3bc^2+3ca^2&\geqslant 9abc.\end{aligned}$$

Stąd

$$(-a+b+c)^3+(a-b+c)^3+(a+b-c)^3\geqslant 3abc+9abc+9abc-18abc=3abc.$$

47. Zauważmy, że na podstawie zależności między średnią arytmetyczną i geometryczną dostajemy

$$\sqrt{\frac{(1-a)(1-b)}{ab}}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1-a}{a}+\frac{1-b}{b}\right)=\frac{ac+bc-2abc}{2abc}.$$

Analogicznie otrzymujemy zależności

$$\sqrt{\frac{(1-b)(1-c)}{bc}}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1-b}{b}+\frac{1-c}{c}\right)=\frac{ba+ca-2abc}{2abc};$$

$$\sqrt{\frac{(1-c)(1-a)}{ca}}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1-c}{c}+\frac{1-a}{a}\right)=\frac{cb+ab-2abc}{2abc}.$$

Dodając otrzymane nierówności stronami i wykorzystując założenie, dostajemy

$$\sqrt{\frac{(1-a)(1-b)}{ab}}+\sqrt{\frac{(1-b)(1-c)}{bc}}+\sqrt{\frac{(1-c)(1-a)}{ca}}\leqslant\frac{2(ab+bc+ca)-6abc}{2abc}=1.$$

Mnożąc powyższą nierówność stronami przez $\sqrt{abc}$ otrzymujemy tezę zadania.

48. Zauważmy, że $m+1=(m+1)\cdot\underbrace{1\cdot1\cdot1\cdot\ldots\cdot1}_{n-1\text{ jedynek}}$. Korzystając z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną dla n liczb dodatnich, wśród których nie wszystkie są równe, dostajemy

$$\sqrt[n]{m+1}<\frac{m+1+(1+1+\cdots+1)}{n}=\frac{m+1+n-1}{n}=\frac{m+n}{n}.$$

Stąd $\dfrac{1}{\sqrt[n]{m+1}}>\dfrac{n}{m+n}$. Analogicznie $\dfrac{1}{\sqrt[m]{n+1}}>\dfrac{m}{m+n}$. Dodając dwie ostatnie nierówności stronami, otrzymujemy

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m+1}}+\frac{1}{\sqrt[m]{n+1}}>\frac{n}{m+n}+\frac{m}{m+n}=1.$$

49. Wykażemy najpierw nierówność lewą. Stosując nierówność

$$(x_1+x_2+\dots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}\right)\geqslant n^2$$

(patrz zadanie 41.) do liczb 1, 2^2, 3^2, ..., n^2, otrzymujemy

$$(1+2^2+3^2+\dots+n^2)\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}\right)\geqslant n^2.$$

Wykorzystując wzór

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

na sumę kwadratów n początkowych dodatnich liczb całkowitych, dostajemy

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\cdot\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}\right)\geqslant n^2,$$

a stąd, po prostych przekształceniach, lewą nierówność z treści zadania. Aby wykazać prawą nierówność zauważmy, że

$$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\quad\text{dla}\quad n\geqslant 2$$

(dla $n=1$ nierówność dana w zadaniu staje się równością). Stąd

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}\leqslant 1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=2-\frac{1}{n}.$$

50. Zauważmy, że wszystkie wyrażenia podpierwiastkowe są dodatnie. W rozwiązaniu wykorzystamy zależność między średnią arytmetyczną a kwadratową dla dwóch liczb $\sqrt{x}$ i $\sqrt{y}$, czyli nierówność $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}\leqslant\sqrt{\dfrac{x+y}{2}}$. Stosując tę nierówność, dostajemy

$$\begin{aligned}
&\sqrt{-a+b+c}+\sqrt{a-b+c}+\sqrt{a+b-c}=\\
&\qquad=\frac{\sqrt{-a+b+c}+\sqrt{a-b+c}}{2}+\frac{\sqrt{a-b+c}+\sqrt{a+b-c}}{2}+\\
&\qquad\quad+\frac{\sqrt{-a+b+c}+\sqrt{a+b-c}}{2}\leqslant\\
&\leqslant\sqrt{\frac{2c}{2}}+\sqrt{\frac{2a}{2}}+\sqrt{\frac{2b}{2}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c},
\end{aligned}$$

a to właśnie należało wykazać.

51. Korzystając z zależności między średnią arytmetyczną i geometryczną dla dwóch liczb dodatnich, dostajemy

$$\sqrt{\frac{bc}{(b+a)(c+a)}}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{b}{b+a}+\frac{c}{c+a}\right).$$

Analogicznie

$$\sqrt{\frac{ca}{(c+b)(a+b)}}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{c}{c+b}+\frac{a}{a+b}\right)$$

oraz

$$\sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+c}\right).$$

Dodając powyższe nierówności stronami, otrzymujemy tezę zadania.

52. W rozwiązaniu wykorzystamy nierówność $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geqslant \frac{4}{a+b}$ (zobacz ćwiczenie 12.). Stosując tę nierówność kilkakrotnie, dostajemy

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}+\frac{64}{e} \geqslant \frac{4}{a+b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}+\frac{64}{e} \geqslant \frac{16}{a+b+c}+\frac{16}{d}+\frac{64}{e} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{64}{a+b+c+d}+\frac{64}{e} \geqslant \frac{256}{a+b+c+d+e}.$$

53. Przyjmijmy: $2x = 2a+1$ i $2y = 2b+1$. Wtedy

$$4x^2 = 4a^2+4a+1, \quad 4y^2 = 4b^2+4b+1 \quad \text{i} \quad x+y = a+b+1.$$

Wstawiając to do danej nierówności, otrzymujemy

$$(a^2+a+1)(b^2+b+1) \geqslant a+b+1,$$

która to nierówność jest równoważna nierówności danej w zadaniu. Aby wykazać otrzymaną nierówność, obliczymy różnicę lewej i prawej strony tej nierówności. Dostajemy wtedy

$$a^2b^2+a^2b+a^2+ab^2+ab+a+b^2+b+1-a-b-1=$$
$$=a^2b^2+a^2b+ab^2+a^2+b^2+ab = \frac{1}{2}\Big((a+b)^2+a^2(b+1)^2+b^2(a+1)^2\Big) \geqslant 0,$$

co kończy dowód nierówności danej w zadaniu.

54. Obliczając różnicę lewej i prawej strony danej nierówności, otrzymujemy

$$\frac{ab+bc+cd+da}{a+b+c+d}-\left(\frac{ab}{a+b}+\frac{cd}{c+d}\right)=$$
$$=\frac{ab+bc+cd+da)(a+b)(c+d)-(a+b+c+d)(abc+abd+acd+bcd)}{(a+b+c+d)(a+b)(c+d)}=$$
$$=\frac{a^2d^2-2abcd+b^2c^2}{(a+b+c+d)(a+b)(c+d)}=\frac{(ad-bc)^2}{(a+b+c+d)(a+b)(c+d)} \geqslant 0,$$

ponieważ zgodnie z założeniem mianownik jest dodatni. Stąd wynika nierówność dana w zadaniu.

55. Ponieważ wszystkie liczby a_i, gdzie $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, są z przedziału $\langle -1; 1\rangle$, więc każda z liczb $1-a_i$ oraz $1+a_i$ jest nieujemna. Z zależności między średnią kwadratową i arytmetyczną dla dwóch liczb nieujemnych, dostajemy kolejno:

$$\sqrt{\frac{(1+a_1)^2+(1-a_2)^2}{2}} \geqslant \frac{1+a_1+1-a_2}{2}$$

$$\sqrt{\frac{(1+a_2)^2+(1-a_3)^2}{2}} \geqslant \frac{1+a_2+1-a_3}{2}$$

$$\vdots$$

$$\sqrt{\frac{(1+a_n)^2+(1-a_1)^2}{2}} \geqslant \frac{1+a_n+1-a_1}{2}.$$

Dodając powyższe nierówności stronami, a następnie mnożąc otrzymaną nierówność przez $\sqrt{2}$, dostajemy tezę zadania.

56. Aby wykazać nierówność prawą, wykorzystamy założenie oraz wynik ćwiczenia 2a. Zauważmy, że

$$\frac{a+b}{2cd} = \frac{a+b}{\frac{2}{ab}} = \frac{ab(a+b)}{2} = \frac{a^2b+ab^2}{2} \leqslant \frac{a^3+b^3}{2}.$$

Analogicznie mamy

$$\frac{b+c}{2da} \leqslant \frac{b^3+c^3}{2}; \qquad \frac{c+d}{2ab} \leqslant \frac{c^3+d^3}{2}; \qquad \frac{d+a}{2bc} \leqslant \frac{d^3+a^3}{2}.$$

Dodając otrzymane cztery nierówności stronami, dostajemy

$$\frac{a+b}{2cd}+\frac{b+c}{2da}+\frac{c+d}{2ab}+\frac{d+a}{2bc} \leqslant \frac{a^3+b^3}{2}+\frac{b^3+c^3}{2}+\frac{c^3+d^3}{2}+\frac{d^3+a^3}{2} = a^3+b^3+c^3+d^3,$$

a to właśnie mieliśmy udowodnić.

Przejdźmy teraz do dowodu lewej nierówności. Wykorzystując założenie oraz zależność między średnią arytmetyczną i geometryczną, otrzymujemy

$$\frac{a+b}{2cd}+\frac{b+c}{2da}+\frac{c+d}{2ab}+\frac{d+a}{2bc} \geqslant 4\cdot\sqrt[4]{\frac{(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)}{16(abcd)^2}} =$$

$$= 2\cdot\sqrt[4]{(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)} \geqslant 2\cdot\sqrt[4]{2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{cd}\cdot 2\sqrt{da}} =$$

$$= 4\cdot\sqrt[4]{\sqrt{(abcd)^2}} = 4.$$

57. Będziemy przekształcać daną nierówność równoważnie. Ponieważ obie strony nierówności są nieujemne, więc możemy podnieść ją obustronnie do kwadratu i otrzymamy wtedy nierówność

$$1-a^2+1-b^2+2\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2} \leqslant 4\left(1-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right);$$

co po dalszych przekształceniach możemy zapisać w postaci

$$\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \leqslant 1-ab.$$

W dalszym ciągu obie strony otrzymanej nierówności są nieujemne, więc jeszcze raz podnosimy ją obustronnie do kwadratu i dostajemy nierówność

$$1-a^2-b^2+a^2b^2 \leqslant 1-2ab+a^2b^2$$

lub równoważnie $(a-b)^2 \geqslant 0$. Ostatnia nierówność jest prawdziwa, więc dana w zadaniu, równoważna ostatniej, też jest prawdziwa.

58. Po raz kolejny w rozwiązaniu wykorzystamy zadanie 41. Na podstawie nierówności z tego zadania otrzymujemy

$$\frac{1}{1+x_1x_2}+\frac{1}{1+x_2x_3}+\dots+\frac{1}{1+x_nx_1}\geqslant\frac{n^2}{n+x_1x_2+x_2x_3+\dots+x_nx_1}.$$

Z oczywistej nierówności $(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+\dots+(x_n-x_1)^2\geqslant 0$ wynika, że

$$x_1x_2+x_2x_3+\dots+x_nx_1\leqslant x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2,$$

stąd

$$\frac{n^2}{n+x_1x_2+x_2x_3+\dots+x_nx_1}\geqslant\frac{n^2}{n+x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}.$$

Wykorzystując założenie $x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2=n$, otrzymujemy

$$\frac{1}{1+x_1x_2}+\frac{1}{1+x_2x_3}+\dots+\frac{1}{1+x_nx_1}\geqslant\frac{n^2}{2n}=\frac{n}{2}.$$

59. Daną w zadaniu nierówność możemy zapisać w sposób równoważny

$$2ab+2bc+2ca\leqslant\frac{6}{\sqrt{5}}(a^2+b^2+c^2),$$

albo

$$(*)\qquad\left(\frac{a^2}{\sqrt{5}}+\frac{5b^2}{\sqrt{5}}\right)+\left(\frac{b^2}{\sqrt{5}}+\frac{5c^2}{\sqrt{5}}\right)+\left(\frac{c^2}{\sqrt{5}}+\frac{5a^2}{\sqrt{5}}\right)\geqslant 2ab+2bc+2ca.$$

Zauważmy, że

$$\frac{a^2}{\sqrt{5}}+\frac{5b^2}{\sqrt{5}}-2ab=\frac{a^2-2\sqrt{5}ab+5b^2}{\sqrt{5}}=\frac{(a-b\sqrt{5})^2}{\sqrt{5}}\geqslant 0,$$

skąd

$$\frac{a^2}{\sqrt{5}}+\frac{5b^2}{\sqrt{5}}\geqslant 2ab.$$

Analogicznie

$$\frac{b^2}{\sqrt{5}}+\frac{5c^2}{\sqrt{5}}\geqslant 2bc\quad\text{oraz}\quad\frac{c^2}{\sqrt{5}}+\frac{5a^2}{\sqrt{5}}\geqslant 2ca.$$

Dodając stronami trzy powyższe nierówności, dostajemy nierówność $(*)$, która jest równoważna tezie z zadania.

60. Z zależności $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ między średnią arytmetyczną i geometryczną dla dwóch liczb dodatnich dostajemy

$$x+\frac{3}{x}+1=x+\frac{x+3}{x}\geqslant 2\sqrt{x+3}.$$

Analogicznie

$$y+\frac{3}{y}+1=y+\frac{y+3}{y}\geqslant 2\sqrt{y+3}\quad\text{oraz}\quad z+\frac{3}{z}+1=z+\frac{z+3}{z}\geqslant 2\sqrt{z+3}.$$

Dodając stronami trzy powyższe nierówności uzyskujemy tezę zadania.

61. Ze wzoru na kwadrat sumy wyrażeń dostajemy

$$(a+b+c+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd.$$

Ponieważ liczby a, b, c, d są dodatnie, więc nierówność $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$ jest równoważna nierówności $a^2 \leqslant b^2 \leqslant c^2 \leqslant d^2$. Korzystając teraz z nierówności $2xy \leqslant x^2+y^2$, która jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych, otrzymujemy

$$\begin{aligned} 2ab &\leqslant a^2+b^2 \leqslant 2b^2 \\ 2ac &\leqslant a^2+c^2 \leqslant 2c^2 \\ 2bc &\leqslant b^2+c^2 \leqslant 2c^2 \\ 2ad &\leqslant a^2+d^2 \leqslant 2d^2 \\ 2bd &\leqslant b^2+d^2 \leqslant 2d^2 \\ 2cd &\leqslant c^2+d^2 \leqslant 2d^2. \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} (a+b+c+d)^2 &= a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd \leqslant \\ &\leqslant a^2+b^2+c^2+d^2+2b^2+2c^2+2d^2+2c^2+2d^2+2d^2 = \\ &= a^2+3b^2+5c^2+7d^2. \end{aligned}$$

A ponieważ $a+b+c+d \geqslant 1$, więc również $a^2+3b^2+5c^2+7d^2 \geqslant 1$.

62. Dla liczb z przedziału $\langle 0;1\rangle$ prawdziwe są nierówności

$$a \geqslant 0, \quad 1-a \geqslant 0, \quad b \geqslant 0, \quad 1-b \geqslant 0, \quad c \geqslant 0, \quad 1-c \geqslant 0,$$

skąd

$$a(1-b)+b(1-a) \geqslant 0,$$

albo równoważnie $a+b \geqslant 2ab$. Ponieważ również $1-c \geqslant 0$, więc

$$\begin{aligned} (a+b)(1-c) &\geqslant 2ab(1-c) \\ a+b-ac-bc &\geqslant 2ab-2abc \\ a+b+2abc &\geqslant ab+bc+ac+ab. \end{aligned}$$

Dodając do obu stron tej nierówności c, dostajemy

$$a+b+c+2abc \geqslant ab+bc+ac+ab+c.$$

Z nierówności pomiędzy średnią arytmetyczna i geometryczną dla liczb nieujemnych mamy $ab+c \geqslant 2\sqrt{abc}$, więc ostatecznie

$$a+b+c+2abc \geqslant ab+bc+ac+2\sqrt{abc}.$$

Literatura

[**1**] Kourliandtchik L., *Wędrówki po krainie nierówności,* wydanie drugie. Wydawnictwo „Aksjomat”, Toruń 2006.

[**2**] Kourliandtchik L., *Matematyka elementarna w zadaniach, tom II.* Wydawnictwo „Aksjomat”, Toruń 2005.

[**3**] Mitrinović D., *Elementarne nierówności.* PWN, Warszawa 1972.

[**4**] Pawłowski H., *Zadania z olimpiad matematycznych z całego świata.* Oficyna Wydawnicza „Tutor”, Toruń 2002.

[**5**] Pawłowski H., Tomalczyk W., *Zadania z matematyki dla olimpijczyków*. Index–Books, Toruń 1992.

[**6**] Pawłowski H., *Olimpiady i konkursy matematyczne. Zadania dla uczniów szkół podstawowych i gimnazjów.* Oficyna Wydawnicza „Tutor”, Toruń 2002.

[**7**] Sprawozdania z olimpiad matematycznych wydawane przez Komitet Główny Olimpiady Matematycznej

---

Spis treści