STOWARZYSZENIE NA RZECZ EDUKACJI MATEMATYCZNEJ

KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ JUNIORÓW

Obóz Naukowy OMJ

Poziom OM
2018 rok

Matematyczna Olimpiada Juniorów www.omj.edu.pl

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Obóz Naukowy OMJ (poziom OM)

Obóz Naukowy OMJ (poziom OM) odbył się w dniach 27 maja – 2 czerwca 2018 r. w Szczyrku.

Przez pierwsze cztery dni obozu rozegrane zostały zawody indywidualne, w których uczestnicy rozwiązywali 23 zadania (punktowane w skali 0, 2, 5, 6). Trzy największe uzyskane sumy punktów to 113, 108 i 94 punkty (na 138 możliwych). Piątego dnia odbył się mecz matematyczny, w którym do rozwiązania było 11 zadań.

Niniejszy plik zawiera treści wszystkich zadań oraz wskazówki do rozwiązań.

Kadra obozu

Jerzy Bednarczuk
Łukasz Bożyk
Bartłomiej Bzdęga
Tomasz Przybyłowski
Tomasz Szymczyk
Jarosław Wróblewski

Uczestnicy

Cezary Botta
Antoni Buraczewski
Adam Dankowiakowski
Oskar Dąbkowski
Julia Filip
Kosma Kasprzak
Tymoteusz Kucharek
Marek Lisowski
Krzysztof Nawrocki
Filip Nogaj
Łukasz Orski
Michał Orżanowski
Mateusz Padarz
Justyna Palikowska
Kornel Sikora
Michał Słoniewski
Władysław Sowul
Jan Tryka
Szymon Urban
Dominik Wawszczak

Zestawienie ocen z zawodów indywidualnych

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
6	11	11	1	2	8	12	6	3	5	6	10	10	5
5	0	2	1	0	0	1	0	1	1	0	0	5	0
2	0	0	0	2	1	0	1	0	0	0	1	1	0
0	9	7	18	16	11	7	13	16	14	14	9	4	15

	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.
6	6	5	8	7	0	3	9	10	5	9
5	2	2	1	0	0	2	0	4	2	2
2	0	0	1	0	0	3	1	1	0	0
0	12	13	10	13	20	12	10	5	13	9

Treści zadań

Pierwsze zawody indywidualne

1. Wewnątrz równoległoboku $ABCD$ znajduje się taki punkt E, że

$$AE = DE \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle ABE = 90^\circ.$$

Punkt M jest środkiem odcinka BC. Wyznacz miarę kąta DME.

2. Wyznacz wszystkie ciągi (a_n) o wyrazach rzeczywistych spełniające dla każdych dodatnich liczb całkowitych m, n warunek

$$m \cdot n \cdot a_{m+n} = (m+n) \cdot a_m \cdot a_n.$$

3. Wyznacz najmniejszą stałą C, dla której nierówność

$$xy^2 + yz^2 \leqslant C \cdot \left(x^3 + y^3 + z^3\right)$$

jest prawdziwa dla każdych dodatnich liczb rzeczywistych x, y, z.

4. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC = BC$. Punkty D i E leżą odpowiednio na odcinkach BC i AC, przy czym

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABE = \sphericalangle ACB \quad \text{oraz} \quad AD + DE + EB = AC.$$

Wyznacz miarę kąta ACB.

5. Na płaszczyźnie danych jest 13 różnych punktów kratowych, z których żadne trzy nie są współliniowe. Udowodnij, że pewne trzy z tych punktów są wierzchołkami trójkąta o środku ciężkości w punkcie kratowym.

Uwaga. Punkt kratowy to punkt o obu współrzędnych całkowitych.

6. Udowodnij, że równanie

$$a_1^6 + a_2^6 + \ldots + a_8^6 = 9b^6$$

nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych a_1, a_2, $\ldots$, a_8, b.

7. Na siatce pewnego czworościanu zaznaczono punkty styczności sfery wpisanej w ten czworościan z jego ścianami. Udowodnij, że jeżeli siatka ta jest trójkątem ostrokątnym, to każdy z czterech zaznaczonych punktów jest ortocentrum trójkąta wyznaczonego przez trzy pozostałe punkty.

Uwaga. Ortocentrum trójkąta to punkt przecięcia jego wysokości.

8. Dana jest liczba pierwsza p o następujących własnościach:

- istnieją takie dodatnie liczby całkowite a, b niepodzielne przez p, że liczba $a^3 + 2b^3$ jest podzielna przez p;
- istnieją takie dodatnie liczby całkowite c, d niepodzielne przez p, że liczba $c^5 + 2d^5$ jest podzielna przez p.

Udowodnij, że istnieją takie dodatnie liczby całkowite m, n niepodzielne przez p, że liczba $m^{15} + 2n^{15}$ jest podzielna przez p.

Drugie zawody indywidualne

9. Ciąg (a_n) jest określony następująco:
$$a_0 = 1 \quad \text{oraz} \quad a_{n+1} = a_n + a_{[n/3]} \quad \text{dla } n \geqslant 0.$$
Wykaż, że w ciągu (a_n) jest nieskończenie wiele liczb podzielnych przez 13.

Uwaga. Przez $[x]$ oznaczamy największą liczbę całkowitą nie większą od x.

10. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AC < BC$. Punkty M i N są środkami odpowiednio boków AC i BC, a punkt D jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka C. Na odcinku MN znajduje się taki punkt K, że $AK = BK$. Półprosta $KD^{\to}$ przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie P. Udowodnij, że na czworokącie $BNKP$ można opisać okrąg.

11. Łódka może zabrać w rejs po jeziorze dokładnie 7 osób. Udowodnij, że można tak zaplanować rejsy 49-osobowej wycieczki, aby każdych dwóch uczestników płynęło ze sobą dokładnie raz.

12. Wykaż, że dla każdych dodatnich liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność
$$9x^2y^2\left(x^2+y^2\right) \leqslant x^6+y^6+16x^3y^3.$$

13. Wykaż, że dla każdych dodatnich liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność
$$24x^2y^2\left(x^2+y^2\right) \leqslant x^6+y^6+54x^3y^3.$$

Trzecie zawody indywidualne

14. Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym
$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC = 90^\circ \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle BAD < 90^\circ.$$
Na bokach AB i AD leżą odpowiednio takie punkty K i L, że
$$\sphericalangle AKL = \sphericalangle BKC \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle ALK = \sphericalangle DLC.$$
Punkt M jest rzutem prostokątnym punktu A na prostą KL. Udowodnij, że czworokąt $BCDM$ jest równoległobokiem.

15. Liczby całkowite a, b, c, d spełniają warunki
$$a+b+c = d, \quad a^2+b^2+c^2 = d^2, \quad \mathrm{NWD}(a,b,c,d) = 1.$$
Udowodnij, że liczba $|abc|$ jest kwadratem liczby całkowitej.

16. W okrąg wpisano ośmiokąt $ABCDEFGH$, przy czym
$$AB = CD = DE = FG \quad \text{oraz} \quad BC = EF = GH = HA.$$
Wykaż, że trójkąt ADG i czworokąt $BCEF$ mają równe pola.

17. Na każdym polu tablicy o wymiarach 77×77 znajduje się żarówka. Dysponujemy przełącznikami, które pozwalają na zmianę stanu żarówek (zapalona/zgaszona) umieszczonych na dowolnych 4 polach tworzących kwadrat o boku 2 lub na dowolnych 9 polach tworzących kwadrat o boku 3. Początkowo wszystkie żarówki są zapalone. Rozstrzygnij, czy używając dostępnych przełączników można doprowadzić do stanu, w którym wszystkie żarówki są zgaszone.

18. Na każdym polu tablicy o wymiarach 77×77 znajduje się żarówka. Dysponujemy przełącznikami, które pozwalają na zmianę stanu żarówek (zapalona/zgaszona) umieszczonych na dowolnych 9 polach tworzących kwadrat o boku 3 lub na dowolnych 25 polach tworzących kwadrat o boku 5. Początkowo wszystkie żarówki są zapalone. Rozstrzygnij, czy używając dostępnych przełączników można doprowadzić do stanu, w którym wszystkie żarówki są zgaszone.

Czwarte zawody indywidualne

19. W kuli o promieniu 3 umieszczono 28 sześcianów jednostkowych. Wykaż, że pewne dwa z tych sześcianów są odległe o mniej niż 1.

Uwaga. Przez *odległość* między dwoma sześcianami rozumiemy długość najkrótszego (być może zdegenerowanego) odcinka o jednym końcu należącym do jednego z tych sześcianów, a drugim do drugiego.

20. Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste t o tej własności, że dla każdej pary liczb rzeczywistych a, b wielomian $P(x)=x^4+ax^3+tx^2+bx+1$ posiada pierwiastek rzeczywisty.

21. Udowodnij, że istnieje 58-cyfrowa liczba o następującej własności: Po przeniesieniu cyfry jedności na początek dostajemy liczbę sześciokrotnie większą.

22. Wewnątrz kwadratu jednostkowego $\mathcal{K}$ znajduje się wielokąt wypukły $\mathcal{W}$ o polu większym od $\frac{3}{7}$. Czy wynika z tego, że wewnątrz wielokąta $\mathcal{W}$ można wskazać odcinek o długości $\frac{1}{2}$ równoległy do pewnego boku kwadratu $\mathcal{K}$?

23. Wewnątrz kwadratu jednostkowego $\mathcal{K}$ znajduje się wielokąt wypukły $\mathcal{W}$ o polu większym od $\frac{1}{2}$. Czy wynika z tego, że wewnątrz wielokąta $\mathcal{W}$ można wskazać odcinek o długości $\frac{1}{2}$ równoległy do pewnego boku kwadratu $\mathcal{K}$?

Mecz matematyczny

24. Liczby całkowite a, b, c, d, e, f są takie, że liczba
$$a^5+b^5+c^5+d^5+e^5+f^5$$
jest podzielna przez 25. Udowodnij, że liczba
$$a^{25}+b^{25}+c^{25}+d^{25}+e^{25}+f^{25}$$
jest podzielna przez 125.

25. Każdy z odcinków łączących środki przeciwległych boków czworokąta wypukłego ma długość równą średniej arytmetycznej długości boków, których środki łączy. Wykaż, że czworokąt ten jest rombem.

26. Wyznacz wszystkie takie dodatnie liczby całkowite n, że
$$n^{512}>2^{n+4096}.$$

27. Ciąg (a_n) jest określony następująco:
$$a_1=3, \quad a_2=5, \quad a_3=6, \quad \text{oraz} \quad a_{n+3}=2a_{n+2}-a_n \quad \text{dla } n\geqslant 1.$$
Udowodnij, że w ciągu (a_n) występuje nieskończenie wiele kwadratów liczb całkowitych.

28. Na kwadracie $ABCD$ o środku O opisano okrąg Γ. Punkt F leży na krótszym łuku CD okręgu Γ, a punkt M jest środkiem odcinka CD. Prosta FM przecina okrąg Γ w punktach E i F. Wykaż, że środek okręgu opisanego na trójkącie OEF leży na prostej CD.

29. Wykaż, że istnieją rosnące 2018-wyrazowe ciągi arytmetyczne
$$(a_1,a_2,\ldots,a_{2018}) \quad \text{oraz} \quad (b_1,b_2,\ldots,b_{2018})$$
o wyrazach całkowitych dodatnich spełniające następujące warunki:

- różnica ciągu $(b_1,b_2,\ldots,b_{2018})$ jest dwa razy większa od różnicy ciągu $(a_1,a_2,\ldots,a_{2018})$;
- iloczyny wyrazów obu ciągów są równe, czyli
$$a_1a_2\ldots a_{2018}=b_1b_2\ldots b_{2018}.$$

30. Sześcian o krawędzi 60 wypełniono klockami o wymiarach $1\times1\times11$ oraz sześcianami jednostkowymi. Ile co najmniej sześcianów jednostkowych musiało zostać użytych?

31. Punkt O jest środkiem trójkąta równobocznego ABC, a punkty K i L leżą na prostej AB w taki sposób, że proste OK i OL są prostopadłe. Punkt H jest ortocentrum trójkąta CKL. Wyznacz wszystkie możliwe wartości stosunku CH/OH.

32. Dwaj gracze grają w następującą grę. W pierwszym ruchu gracz rozpoczynający podaje dodatnią liczbę całkowitą mniejszą od 10^{10}. Kolejne ruchy, wykonywane przez graczy na przemian, polegają na przemnożeniu liczby podanej przez przeciwnika w jego ostatnim dotychczasowym ruchu przez liczbę naturalną większą od 1 i mniejszą od 10^{10}. Gra kończy się, gdy któryś z graczy poda liczbę większą od $N = 10^{10^{10}}$. Jeżeli ostatnia podana liczba jest mniejsza od $1{,}00001 \cdot N$, wygrywa gracz, który ją podał — w przeciwnym przypadku ten gracz przegrywa. Rozstrzygnij, który z graczy ma strategię wygrywającą.

33. Udowodnij, że równanie $1 + a^2 + b^7 = c^{14}$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych a, b, c.

Wskazówka: Przykładami trójek (a, b, c) spełniających podane równanie są

$$(677544, 63, 8) \quad \text{oraz} \quad (11100203906736, 16128, 127).$$

34. W przestrzeni dany jest sześcian $\mathcal{S}$ oraz nieprzecinająca go płaszczyzna π. Wierzchołki sześcianu $\mathcal{S}$ można oznaczyć przez A_1, A_2, $\ldots$, A_8 w taki sposób, że dla $k = 1, 2, \ldots, 8$ odległość punktu A_k od płaszczyzny π jest równa k. Wyznacz wszystkie możliwe długości krawędzi sześcianu $\mathcal{S}$.

Wskazówki

Pierwsze zawody indywidualne

1. *Odpowiedź:* $\measuredangle DME = 90°$.

Przedłuż DE do przecięcia z AB w F i wykaż, że punkt E jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ADF.

2. *Odpowiedź:* $a_n = na_1^n$, gdzie a_1 jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Przyjmij $b_n = a_n/n$ i z warunków zadania wywnioskuj, że $b_n = b_1^n$.

3. *Odpowiedź:* $C = \frac{1}{3}\left(1+\sqrt{5}\right)^{2/3}$.

Skorzystaj z nierówności między średnimi arytmetyczną i geometryczną dla trójek

$$(s^2x^3, y^3/s, y^3/s), \quad (t^2y^3, z^3/t, z^3/t),$$

gdzie $s > 0$ i $t > 0$ spełniają warunki

$$C = \frac{s^2}{3} = \frac{2}{3t} = \frac{2}{3s} + \frac{t^2}{3}.$$

4. *Odpowiedź:* $\measuredangle ACB = 20°$.

Odbij punkty A i B względem przeciwległych im boków trójkąta ABC i zauważ, że otrzymane punkty leżą na prostej DE.

5. Najpierw wybierz pięć punktów z taką samą resztą z dzielenia pierwszej współrzędnej przez 3, a następnie z tych pięciu punktów wybierz trzy, dla których suma drugich współrzędnych jest podzielna przez 3.

Uwaga. Liczbę 13 w treści zadania można zastąpić liczbą 9.

6. Rozważ reszty z dzielenia szóstych potęg liczb całkowitych przez 9.

7. Zauważ, że linie zgięcia siatki muszą być liniami środkowymi w trójkącie i skorzystaj z twierdzenia o odcinkach stycznych w przestrzeni, zauważając trójkąty przystające.

Uwaga. Można uzasadnić, że cztery zaznaczone punkty to środek okręgu przechodzącego przez środki boków trójkąta będącego siatką oraz punkty symetryczne do niego względem linii środkowych tego trójkąta.

8. Przyjmij $m = bc^2$ oraz $n = ad^2$.

Drugie zawody indywidualne

9. Sprawdź, że $a_7 = 13$ oraz, że dla każdego wyrazu a_n podzielnego przez 13 istnieje dalszy wyraz podzielny przez 13 i jeśli nie jest to a_{3n}, to jest to jeden z wyrazów od a_{9n} do a_{9n+12}.

10. Rozważ punkt symetryczny do punktu D względem punktu K i uzasadnij, że leży on na okręgu opisanym na trójkącie ABC.

11. Przyporządkuj każdemu uczestnikowi parę (a,b), gdzie $a, b \in \{0,1,\ldots,6\}$ i skonstruuj 8 serii po 7 rejsów: w serii $i = 0,1,\ldots,6$ w rejsie j płyną $(a,\, ai+j)$; w serii 7 w rejsie j płyną $(j,\, b)$.

12. *Sposób 1.* Przenieś wszystkie składniki na jedną stronę i wyłącz $(x-y)^4$ przed nawias.

Sposób 2. Podziel nierówność stronami przez x^3y^3, a następnie przyjmij $s = x/y$, $t = s + \frac{1}{s}$, uzyskując $t^3 - 12t + 16 \geqslant 0$.

13. *Sposób 1.* Przenieś wszystkie składniki na jedną stronę i wyłącz $(x^2 - 3xy + y^2)^2$ przed nawias.

Sposób 2. Podziel nierówność stronami przez x^3y^3, a następnie przyjmij $s = x/y$, $t = s + \frac{1}{s}$, uzyskując $t^3 - 27t + 54 \geqslant 0$.

Trzecie zawody indywidualne

14. Odbij punkt C symetrycznie względem prostych AB i AD, a następnie uzasadnij, że punkt M jest środkiem odcinka o końcach w uzyskanych dwóch punktach.

15. Wykaż, że jeżeli $abc \neq 0$, to istnieją takie liczby całkowite k, m, n, że $a = km$, $b = kn$, $c = mn$. Wykorzystaj przy tym podzielności $c|ab$, $a|bc$, $b|ca$ (wynikające z warunków zadania) i rozkład na czynniki pierwsze liczb a, b, c.

16. Każdą z tych figur podziel odpowiednią wysokością na dwa kawałki, a następnie z każdej z otrzymanych par ułóż prostokąt. Uczyń to w taki sposób, aby prostokąty uzyskane w obu przypadkach były przystające.

17. Wykręć wszystkie żarówki z 26 kolumn, których numery dają resztę 1 przy dzieleniu przez 3. Uzasadnij, że zostaje nieparzyście wiele zapalonych żarówek, a każdy przełącznik zmienia stan parzyście wielu.

18. Wykręć wszystkie żarówki z 26 kolumn, których numery dają resztę 1 przy dzieleniu przez 3 oraz z 16 wierszy, których numery dają resztę 1 przy dzieleniu przez 5. Uzasadnij, że zostaje nieparzyście wiele zapalonych żarówek, a każdy przełącznik zmienia stan parzyście wielu.

Czwarte zawody indywidualne

19. Zamiast sześcianów rozważ ich otoczenia o promieniu $\frac{1}{2}$ (złożone z dodatkowych sześciu prostopadłościanów $1\times 1\times \frac{1}{2}$, dwunastu ćwierćwalców o promieniu podstawy $\frac{1}{2}$ i wysokości 1 oraz ośmiu oktantów kuli o promieniu $\frac{1}{2}$). Wykaż, że suma objętości tych otoczeń jest większa od objętości kuli o promieniu $\frac{7}{2}$.

20. *Odpowiedź:* $t\leqslant -2$.

Rozważ wyrażenie $P(-1)+P(1)$ i wykaż, że dla każdego $t\leqslant -2$ i dla każdej pary a, b wielomian P przyjmuje w przedziale $\langle -1,\infty)$ wartości różnych znaków. Ponadto uzasadnij, że jeżeli $t>-2$, to np. dla $a=b=0$ wielomian P nie ma pierwiastków.

21. Znajdź takie liczby całkowite a, c, że $10^{56}\leqslant a<10^{57}$, $1\leqslant c\leqslant 9$ oraz

$$a=c\cdot\frac{10^{57}-6}{59}.$$

Zauważ (na przykład powołując się na małe twierdzenie Fermata), że $\left(10^{57}-6\right)/59$ jest liczbą całkowitą.

22. *Odpowiedź:* Nie.

Rozważ dwa przeciwległe wierzchołki kwadratu, które wraz z czterema punktami dzielącymi jego boki w stosunku $1:3$ tworzą sześciokąt o polu $7/16>3/7$.

23. *Odpowiedź:* Tak.

Podziel wielokąt $\mathcal{W}$ prostymi równoległymi do ustalonej pary boków danego kwadratu przechodzącymi przez wierzchołki $\mathcal{W}$ na trapezy i trójkąty. Przeprowadź dowód nie wprost.

Mecz matematyczny

24. Zauważ, że możliwe reszty z dzielenia piątych potęg liczb naturalnych przez 25 to 0, ± 1, ± 7, a jeśli suma sześciu takich liczb jest podzielna przez 25, to można je połączyć w pary liczb o przeciwnych resztach. Następnie uzasadnij, że jeśli $25|a+b$, to $125|a^5+b^5$.

25. *Sposób 1.* Skorzystaj dwukrotnie z następującego faktu: W czworokącie wypukłym odcinek łączący środki przeciwległych boków ma długość nie większą od średniej arytmetycznej długości dwóch pozostałych boków, przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy jest to odcinek łączący środki ramion trapezu.

Sposób 2. Rozważ okręgi, których średnicami są boki czworokąta i uzasadnij, że mają punkt wspólny będący punktem przecięcia przekątnych czworokąta. W tym celu udowodnij nie wprost, że przekątne czworokąta są prostopadłe.

26. *Odpowiedź:* $512<n<1024$.

Zauważ, że $a_{512}=a_{1024}=1$. Rozważ ciąg

$$a_n=n^{512}\big/2^{n+4096}$$

i udowodnij, że ciąg ilorazów a_{n+1}/a_n jest malejący, a w szczególności przyjmuje wartości najpierw większe od 1, a potem mniejsze od 1.

27. Wykaż, że $a_{4n}=(a_{2n}-2)^2$, na przykład wykorzystując równość

$$a_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n+2,$$

której można dowieść indukcyjnie.

28. Wykaż, że punkt P, symetryczny do O względem prostej CD, leży na okręgu opisanym na trójkącie OEF, na przykład korzystając z równości

$$ME\cdot MF=MC\cdot MD=MO\cdot MP.$$

29. Przyjmij

$$a_i=a+r(i-1),\ b_i=b+2r(i-1)$$

i dobierz a, b, r w taki sposób, aby iloczyny wyrazów obu ciągów były równe. Załóż dodatkowo, że $2a=b+2r$, czyli $2a_i=b_{i+1}$.

30. *Odpowiedź:* 125.

Sposób 1. Rozważ „trójwymiarową szachownicę” o boku $\frac{11}{2}$.

Sposób 2. Na każdej z trzech krawędzi napisz kolejno liczby: pięć szóstek, sześć minus piątek, pięć szóstek, sześć minus piątek, ..., pięć szóstek, a w pola dużego sześcianu wpisz iloczyny odpowiednich liczb z krawędzi (trójwymiarowa tabliczka mnożenia). Zauważ, że każdy klocek o wymiarach $1\times1\times11$ pokrywa pola o sumie 0, więc sześciany jednostkowe muszą pokryć pola o sumie równej sumie wszystkich wpisanych liczb.

31. *Odpowiedź:* 4.

Sposób 1. Oznacz spodki wysokości poprowadzonych z wierzchołków C i K w trójkącie CKL odpowiednio przez M i N, a punkt symetryczny do O względem AB przez P i zauważ, że L, N, O, P oraz L, N, H, M to czwórki punktów leżących na jednym okręgu. Wywnioskuj stąd na przykład, że

$$CH\cdot CM = CN\cdot CL = CO\cdot CP$$

skąd $CO/CH=3/4$.

Sposób 2. Oznacz przez D taki punkt w przestrzeni, że czworościan $ABCD$ jest foremny, a przez S — środek ciężkości ściany ABD. Zauważ, że

$$\sphericalangle KSL = \sphericalangle CSL = \sphericalangle CSK = 90^\circ$$

i wywnioskuj stąd, że rzut punktu S na płaszczyznę ABC jest środkiem ciężkości trójkąta CKL.

32. *Odpowiedź:* Pierwszy gracz ma strategię wygrywającą.

Gdyby drugi gracz miał strategię wygrywającą, miałby w szczególności zapewniającą zwycięstwo odpowiedź na ruch pierwszego gracza polegający na wybraniu liczby 1. Ale wówczas gracz pierwszy mógłby „ukraść” strategię drugiemu, samemu zaczynając od stosownego ruchu.

33. Rozważ równanie Pella

$$c^2-7d^2=1$$

i przyjmij $b=7d^2$, $a=7cd(7c^2d^2+1)$.

34. *Odpowiedź:* $\sqrt{21}$.

Zauważ, że odcinki A_1A_2, A_1A_3, A_1A_5 muszą być krawędziami danego sześcianu i oznacz przez B, C takie punkty leżące odpowiednio na krawędziach A_1A_3, A_1A_5, że $A_1B=\frac{1}{2}A_1A_3$ oraz $A_1C=\frac{1}{4}A_1A_5$. Następnie zauważ, że płaszczyzna A_2BC jest równoległa do płaszczyzny π i odległa od niej o 2. Wyraź objętość czworościanu $A_1A_2BC_2$ na dwa sposoby; uzasadnij, że z jednej strony jest to

$$\frac{x^3}{48},$$

a z drugiej

$$\frac{x^2\sqrt{21}}{48},$$

gdzie x jest szukaną długością krawędzi sześcianu.