

W poszukiwaniu (kontr)przykładów

Zdalne seminarium olimpijskie OMJ, 20.09.2025

Podziały figur

Zadanie 1. Podziel kwadrat na:

- a) 4 kwadraty, a następnie na 9, 16, 25, ...
- b) 6 kwadratów, a następnie na 8, 10, 12, ...
- c) 7 kwadratów, a następnie na 9, 11, 13, ...

Czy da się podzielić kwadrat na 2, 3, 5 kwadratów?

Zadanie 2 (XXI OMJ, przykładowy zestaw zadań I stopnia, zad. 2). Prostokąt o obwodzie 300 został podzielony na 9 kwadratów o boku długości a . Wyznacz wszystkie możliwe wartości liczby a .

Zadanie 3 (XIV OMJ, część testowa, zad. 8). Czy trójkąt równoboczny można rozciąć na:

- a) 4 trójkąty równoboczne;
- b) 6 trójkątów równobocznych;
- c) 1000 trójkątów równobocznych?

Zadanie 4. Na ile trójkątów równobocznych da się podzielić trójkąt równoboczny?

Zadanie 5. Podziel dowolny:

- a) trójkąt prostokątny na 2 trójkąty równoramienne,
- b) trójkąt ostrokątny na 3 trójkąty równoramienne,
- c) trójkąt na 4 trójkąty równoramienne,
- d) trójkąt równoramienny na 3 trójkąty równoramienne,
- e) trójkąt na 5 trójkątów równoramiennych.

Zadanie 6. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej $n \geq 4$, każdy trójkąt da się podzielić na n trójkątów równoramiennych.

Zadanie 7. a) Czy każdy trójkąt da się rozciąć na cztery trójkąty przystające?

- b) Czy istnieje trójkąt, który da się rozciąć na pięć trójkątów przystających?
 - c) (Obóz naukowy OMJ 2025, poziom OMJ, zad. 14) Czy istnieje trójkąt nieprostokątny, który można podzielić na 5 trójkątów podobnych do niego?
-

O ułamkach prostych

Ułamek o liczniku równym 1 oraz mianowniku będącym dodatnią liczbą całkowitą nazywamy *prostym*.

Zadanie 8 (XVIII OMJ, część testowa, zad. 11). Czy liczbę $\frac{1}{7}$ można przedstawić jako:

- a) iloczyn dwóch ułamków prostych;
- b) sumę dwóch ułamków prostych;
- c) różnicę dwóch ułamków prostych?

Zadanie 9. Czy liczbę $\frac{1}{7}$ można zapisać jako sumę dwóch różnych ułamków prostych?

Zadanie 10. Na ile sposobów można przedstawić liczbę $\frac{1}{7}$ jako sumę dwóch ułamków prostych?

Zadanie 11. Udowodnij, że:

- a) każdy ułamek prosty różny od 1 jest sumą dwóch różnych ułamków prostych,
- b) dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej $n > 1$, ułamek postaci $\frac{2}{n}$ jest sumą dwóch różnych ułamków prostych,
- c) dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej $n > 1$, ułamek postaci $\frac{3}{n}$ jest sumą trzech różnych ułamków prostych.

Zadanie 12. Oblicz:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2024 \cdot 2025}.$$

Zadanie 13. a) Rozłóż na ułamki proste $\frac{5}{7}$ w następujący sposób. Wyznacz największy ułamek prosty nie większy niż $\frac{5}{7}$ i odejmij go od $\frac{5}{7}$. Podobnie postępuj dalej, zastępując $\frac{5}{7}$ przez otrzymany wynik. Co się dzieje z licznikami kolejnych wyników?

- b) Niech a, b będą dodatnimi liczbami całkowitymi oraz niech $\frac{1}{n}$ będzie największym ułamkiem prostym nie większym niż $\frac{a}{b}$. Udowodnij, że po odjęciu $\frac{1}{n}$ od $\frac{a}{b}$ otrzymamy w wyniku ułamek, który w formie nieskracalnej ma licznik mniejszy niż a .
- c) Udowodnij, że każda dodatnia liczba wymierna jest sumą skończonej liczby różnych ułamków prostych.

W poszukiwaniu liczb

Zadanie 14 (Obóz naukowy OMJ 2025, poziom OMJ, zad. 16). Na tablicy napisano 10 kolejnych dodatnich liczb całkowitych. Czy możliwe jest, że w tym celu każdej z cyfr 0, 1, 2, ..., 9 użyto tyle samo razy?

Zadanie 15 (XIX OMJ, część testowa, zad. 1). Czy istnieją dwie liczby pierwsze, których suma jest równa:

- a) 17;
- b) 18;
- c) 19?

Zadanie 16. Czy istnieją 2025 kolejnych dodatnich całkowitych liczb złożonych?

Zadanie 17 (XX OMJ, II stopnia, zad. 4). Czy istnieją takie dodatnie liczby całkowite a oraz b , że

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{2025}?$$

Zadanie 18 (XII OMJ, III stopnia, zad. 3). Dane są takie dodatnie liczby całkowite a i b , że każda z liczb ab oraz $(a + 1)(b + 1)$ jest kwadratem liczby całkowitej. Udowodnij, że istnieje taka liczba całkowita $n > 1$, dla której liczba $(a + n)(b + n)$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 19 (LXXII OM, II stopnia, zad. 3). Dodatnie liczby całkowite a , b , z spełniają zależność $ab = z^2 + 1$. Udowodnij, że istnieją takie dodatnie liczby całkowite x , y , że

$$\frac{a}{b} = \frac{x^2 + 1}{y^2 + 1}.$$

Źródła i dalsza lektura

1. Titu Andreescu, Razvan Gelca, „Mathematical Olympiad Challenges”, Birkhäuser 2000.
2. Jarosław Górnicki, „O podziale prostokąta na kwadraty”, czasopismo „Delta” 7/1989.
3. Joanna Jaszuńska, „Dzielenie figur”, czasopismo „Delta” 8/2009.
4. Andrzej Żak, „Dzielenie trójkąta na trójkąty podobne do niego”, czasopismo „Delta” 4/2003.
5. Marcin Kuczma, „Choć proste to nieproste”, czasopismo „Delta” 7/2014.