Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Juniorów — poziom OM



30 maja – 7 czerwca 2026 r.

Skład komputerowy: Bartosz Głowacki, Kosma Kasprzak, Szymon Tobiasz

Rysunki: Bartosz Głowacki

Recenzent: dr Arkadiusz Męcel

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Juniorów
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
ul. Śniadeckich 8
00-656 Warszawa
www.omj.edu.pl

Wstęp

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Juniorów (poziom OM) przeprowadzono w dniach 30 maja – 7 czerwca 2026 r. w Domu Rekolekcyjno-Konferencyjnym „Wieczernik" w Świętej Katarzynie (woj. świętokrzyskie). Do udziału w Obozie zakwalifikowano osoby z najlepszymi wynikami w XXI OMJ.

Każdego dnia uczestnicy Obozu rozwiązywali zadania w formule konkursowej, pracując zarówno indywidualnie, jak i w grupach. Popołudnia i wieczory poświęcone były na wykłady i zajęcia warsztatowe. W sobotę przeprowadzony został mecz matematyczny.

W niniejszym opracowaniu zebrane są zadania konkursowe wraz z rozwiązaniami. Zachęcamy do wykorzystania tych materiałów zwłaszcza w przygotowaniach do startów w kolejnych edycjach Olimpiady Matematycznej dla szkół ponadpodstawowych.

Trudność niektórych zadań, z którymi mierzyli się uczestnicy Obozu, przewyższa zdecydowanie poziom zawodów finałowych OMJ. Wychodząc (niekiedy wyraźnie) poza program merytoryczny Olimpiady, staraliśmy się wskazać niektóre podstawowe narzędzia przydatne na poziomie międzynarodowych zawodów matematycznych rozgrywanych na poziomie juniorskim (obejmujących także uczniów szkół średnich) oraz na zawodach pierwszego i drugiego stopnia Olimpiady Matematycznej.

Miłej lektury!

Uczestnicy Obozu Naukowego OMJ (poziom OM)

Uczniowie: Mateusz Bąk, Piotr Hryniewiecki, Benedykt Kaczmarek, Adam Kapka, Piotr Kasikowski, Piotr Kawecki, Mateusz Kaźmierczak, Bruno Krasoń, Leonard Królczyk, Oleksandra Lysakova, Natan Łazarewicz, Grzegorz Motylewski, Bartosz Muszyński, Filip Pachel, Bartosz Retka, Jan Roszkowski, Szymon Rynkiewicz, Bartosz Skublewski, Łukasz Sulowski, Jakub Wujec.

Kadra: Paweł Dziuba (kierownik), Bartosz Głowacki, Kosma Kasprzak, Arkadiusz Męcel, Szymon Tobiasz.

Rozkład ocen za rozwiązania zadań indywidualnych

Prace uczestników Obozu oceniane były w skali olimpijskiej 0, 2, 5, 6. Rozkład ocen przyznanych za rozwiązania zadań przedstawiony jest w poniższej tabeli.

	6 p.	5 p.	2 p.	0 p.
1.	7	3	6	4
2.	6	3	1	10
3.	9	1	8	2
4.	3	0	0	17
5.	6	0	2	12
6.	3	2	2	13
7.	11	0	0	9
8.	9	4	3	4
9.	4	0	1	15
10.	2	1	0	17
11.	0	0	0	20
12.	6	0	10	4
13.	16	2	2	0
14.	10	1	0	9
15.	3	0	0	17
16.	3	1	2	14
17.	14	2	1	3
18.	5	0	0	15
19.	10	1	1	8
20.	3	0	1	16
21.	0	0	2	18
22.	7	2	9	2
23.	5	2	1	12
24.	0	0	0	20
25.	3	0	1	16
26.	0	0	1	19

Treści zadań

Zadanie 1.

Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite k, dla których istnieje k kolejnych dodatnich liczb całkowitych, których iloczyn ma w zapisie dziesiętnym końcowe cyfry tworzące liczbę k.

Zadanie 2.

Znajdź wszystkie trójki dodatnich liczb całkowitych a, b, c, dla których iloraz

$$\frac{abc + ab + a}{abc + bc + c}$$

jest liczbą całkowitą.

Zadanie 3.

Niech a, b, c będą dodatnimi liczbami całkowitymi. W prostopadłościennym pudełku o wymiarach $a \times b \times c$ umieszczono abc sześciennych klocków o krawędzi długości 1. Niektóre klocki są białe, a pozostałe są czarne. Wiadomo, że każda prosta równoległa do jednej z krawędzi pudełka przechodzi przez wnętrze co najwyżej jednego białego klocka. Jaka jest największa możliwa liczba białych klocków w pudełku?

Zadanie 4.

W trapezie równoramiennym $ABCD$ o podstawach AB i CD, gdzie $AB \parallel CD$ i $AB > CD > BC$, przekątne AC i BD przecinają się w punkcie P. Okrąg opisany na trójkącie ABP przecina prostą BC po raz drugi w punkcie X, różnym od B. Punkt Y leżący na prostej AX spełnia warunek $DY \parallel BC$. Wykaż, że

$$\sphericalangle YDA = 2\sphericalangle YCA.$$

Zadanie 5.

Niezerowe liczby rzeczywiste a, b, c spełniają układ równań

$$\begin{cases} a^2 + b + c = \frac{1}{a} \\ b^2 + c + a = \frac{1}{b} \\ c^2 + a + b = \frac{1}{c}. \end{cases}$$

Wykaż, że pewne dwie z liczb a, b, c są równe.

Zadanie 6.

Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite n, których dodatnie dzielniki można podzielić na pary w taki sposób, że suma liczb w każdej parze jest potęgą trójki.

Zadanie 7.

W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku B jest prosty. Na okręgu opisanym na tym trójkącie wybrano punkt D różny od wierzchołków trójkąta. Przez M, N oznaczamy odpowiednio rzuty punktu B na proste AC i AD. Wykaż, że prosta MN przechodzi przez środek odcinka BD.

Zadanie 8.

Pewna liczba całkowita $n > 2$ ma k dodatnich dzielników. Wykaż, że istnieją dwa różne dzielniki a i b liczby n takie, że

$$k \mid a - b.$$

Zadanie 9.

Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c spełniających warunek $abc = 1$ zachodzi nierówność

$$\frac{a+b+c+3}{4} \geqslant \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}.$$

Zadanie 10.

Na osi liczbowej, w punkcie 0, stoi królik. Co minutę wykonuje skok dowolnej dodatniej całkowitej długości, w prawo albo w lewo. Łączna długość wszystkich jego skoków ma wynosić 2025.

Wyznacz wszystkie liczby całkowite k, dla których królik może zakończyć swoją podróż w punkcie k na nieparzyście wiele sposobów.

Zadanie 11.

W czworokącie wypukłym $ABCD$ kąt ADC jest prosty, a kąty BCD i ABC są równe i rozwarte. Ponadto $AB = 2CD$.

Prosta przechodząca przez punkt C i równoległa do prostej AD przecina dwusieczną zewnętrzną kąta ABC w punkcie T. Wykaż, że

$$\sphericalangle ATB + \sphericalangle BCD = 180^\circ.$$

Zadanie 12.

Niech $n > 1$ będzie liczbą całkowitą. Powiemy, że ciąg liczb całkowitych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jest *średnio rosnący*, jeżeli dla każdego $k = 1, 2, \ldots, n-1$ średnia arytmetyczna pierwszych k wyrazów jest mniejsza od średniej arytmetycznej pierwszych $k+1$ wyrazów tego ciągu.

W zależności od n wyznacz najmniejszą liczbę, która może wystąpić jako ostatni wyraz średnio rosnącej permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Zadanie 13.

Na okręgu, w równych odstępach, znajduje się 2025 żarówek. Każda z nich jest zapalona albo zgaszona. O każdej pełnej godzinie każda żarówka, która przez ostatnią godzinę była w innym stanie niż obaj jej sąsiedzi, zmienia swój stan. Wykaż, że o pewnej pełnej godzinie żadna żarówka nie zmieni swojego stanu.

Zadanie 14.

Rozstrzygnij, czy istnieje liczba pierwsza p oraz dodatnia liczba całkowita N, które spełniają następujący warunek: dla dowolnej dodatniej N-cyfrowej liczby całkowitej o niezerowych cyfrach można tak przestawić jej cyfry, aby otrzymać liczbę podzielną przez p.

Zadanie 15.

Dany jest romb $ABCD$. We wnętrzach boków AB i AD wybrano odpowiednio punkty P oraz Q tak, że odcinek PQ jest styczny do okręgu wpisanego w ten romb. Udowodnij, że pole trójkąta CPQ nie zależy od wyboru punktów P i Q.

Zadanie 16.

Ciąg dodatnich liczb całkowitych $a_1, a_2, \ldots$ nazwiemy *mraśnym*, jeżeli dla każdej dodatniej liczby całkowitej n spełniony jest warunek

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n-1} = a_n^2.$$

Wyznacz wszystkie ciągi mraśne, których pewien wyraz wynosi 3.

Zadanie 17.

Trójka parami różnych dodatnich liczb całkowitych a, b, c spełnia

$$\frac{a}{c} = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + b^2}.$$

Udowodnij, że $a^2 + b^2 + c^2$ nie jest liczbą pierwszą.

Zadanie 18.

W trapezie równoramiennym $ABCD$ o podstawach AB i CD, przy czym $AB > CD$, przekątne przecinają się w punkcie X. Przez I oznaczamy środek okręgu dopisanego do boku BX trójkąta ABX, a przez J środek okręgu dopisanego do boku CX trójkąta CDX. Wykaż, że odcinki IC i JB mają równe długości.

Zadanie 19.

Klasa w liceum składa się z 20 pszczół, przy czym każda pszczoła ma dokładnie trzech bliskich znajomych, a znajomość jest wzajemna. Pięć pszczół zakupiło już bilety na nadchodzący koncert. Kolejne zakupy odbywają się wyłącznie według następującej zasady: pszczoła kupuje bilet, gdy co najmniej dwóch jej bliskich znajomych już ma bilety. Czy jest możliwe, aby wszystkie pszczoły zakupiły bilety na koncert?

Zadanie 20.

Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych a, b zachodzi równość

$$\sum_{k=0}^{b-1} \left\lfloor \frac{ka}{b} \right\rfloor = \sum_{k=0}^{a-1} \left\lfloor \frac{kb}{a} \right\rfloor.$$

Zadanie 21.

Znajdź wszystkie niemalejące nieskończone ciągi $a_1, a_2, \ldots$ dodatnich liczb całkowitych spełniające następującą własność: dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych n, m liczby $a_n + a_m$ oraz $n + m$ mają tyle samo dodatnich dzielników.

Zadanie 22.

W rzędzie leży 2026 monet, z których każda jest obrócona do góry orłem albo reszką. W jednym ruchu możemy wybrać dowolny ciąg kolejnych monet i obrócić wszystkie z nich. Chcemy po pewnej liczbie ruchów doprowadzić do stanu, w którym wszystkie monety są obrócone do góry reszką. Jaka jest najmniejsza liczba ruchów, po której będziemy w stanie osiągnąć taki stan, niezależnie od początkowego ułożenia monet?

Zadanie 23.

Znajdź wszystkie trójki liczb rzeczywistych x, y, z spełniające układ równań

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 5, \\ x^4 + y^4 + z^4 = 17. \end{cases}$$

Zadanie 24.

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB < AC$, oraz okrąg o opisany na tym trójkącie. Niech D będzie środkiem odcinka AC, a E spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A na bok BC. Prosta DE przecina prostą AB w punkcie F. Punkt H, leżący na łuku BC okręgu o niezawierającym punktu A, spełnia warunek $\sphericalangle BHE = \sphericalangle ABC$. Udowodnij, że $\sphericalangle BHF = 90^\circ$.

Zadanie 25.

Niech $n > 1$ będzie liczbą całkowitą, a p liczbą pierwszą. Załóżmy, że

$$n \mid p - 1 \quad \text{oraz} \quad p \mid n^4 + n^2 + 1.$$

Udowodnij, że $4p - 3$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 26.

Dany jest na płaszczyźnie skończony zbiór S złożony z co najmniej trzech punktów i spełniający następujący warunek: dowolne trzy punkty zbioru S można pokryć kołem o promieniu 1. Udowodnij, że cały zbiór S można pokryć kołem o promieniu 1.

Mecz matematyczny

Zadanie 27.

Anna i Bananna grają w grę, używając $n \geqslant 3$ punktów zaznaczonych na okręgu. W swojej turze gracz musi narysować trójkąt o wierzchołkach w trzech spośród tych punktów, z których żaden nie był dotąd końcem żadnego narysowanego odcinka, przy czym nowo narysowane odcinki nie mogą przecinać żadnych odcinków narysowanych wcześniej. Gracz, który nie może wykonać ruchu, przegrywa. Jeśli Anna wykonuje pierwszy ruch, kto może zagwarantować sobie zwycięstwo?

Zadanie 28.

Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Połowa pól planszy $2n \times 2n$ jest czarna, a połowa biała. Jaś wpisuje w pola planszy liczby $1, 2, \ldots, 4n^2$ w taki sposób, że kolejne liczby znajdują się w polach sąsiadujących krawędzią, a w każdym polu znajduje się dokładnie jedna liczba. Wynikiem Jasia nazwiemy sumę liczb wpisanych w czarne pola. W zależności od n wyznacz największą liczbę W taką, że przy każdym dopuszczalnym pokolorowaniu planszy Jaś może uzyskać wynik co najmniej W.

Zadanie 29.

Na płaszczyźnie narysowano $n \geqslant 3$ prostych, z których żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. Proste te dzielą płaszczyznę na pewną liczbę wielokątów oraz pewną liczbę nieograniczonych obszarów. Wykaż, że co najmniej $n-2$ spośród tych wielokątów jest trójkątami.

Zadanie 30.

Znajdź wszystkie pary liczb pierwszych p, q takie, że liczby $p-q$ oraz $pq-q$ są kwadratami liczb całkowitych.

Zadanie 31.

Wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych $m, n > 1$, dla których każda z liczb

$$1^n - 1,\ 2^n - 1,\ \ldots,\ n^n - 1$$

jest podzielna przez m.

Zadanie 32.

Na tablicy napisana jest liczba 2026. Jeżeli na tablicy znajduje się liczba postaci $a^k + b^k$ dla pewnych dodatnich liczb całkowitych a, b, k, to możemy dopisać do tablicy liczbę $a^l + b^l$ dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej l. Znajdź wszystkie liczby, które mogą pojawić się na tablicy po pewnej liczbie takich ruchów.

Zadanie 33.

Niech n będzie nieujemną liczbą całkowitą, a $a_0, a_1, \ldots, a_n$ liczbami rzeczywistymi. Wykaż, że istnieje taka nieujemna liczba całkowita $k \leqslant n$, że nierówność

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \leqslant a_0 + a_1 + \ldots + a_k$$

jest spełniona dla dowolnej liczby rzeczywistej x z przedziału $[0, 1]$.

Zadanie 34.

Parami różne liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunki

$$a + b + c = 0 \qquad \text{oraz} \qquad a^2 - b = b^2 - c = c^2 - a.$$

Wykaż, że

$$ab + bc + ca = -3.$$

Zadanie 35.

Czy możliwe jest pokolorowanie każdej z liczb

$$1+\sqrt{2},\ 1+2\sqrt{2},\ \ldots,\ 1+2026\sqrt{2}$$

na żółto albo zielono tak, aby iloczyn wszystkich liczb żółtych miał taką samą część ułamkową jak iloczyn wszystkich liczb zielonych?

Zadanie 36.

W trójkącie ostrokątnym ABC spełniony jest warunek $AB < AC$. Na krótszym łuku BC okręgu opisanego na trójkącie ABC wybrano punkty X, Y tak, aby punkty B, X, Y, C występowały na tym łuku w podanej kolejności oraz

$$BX = XY = YC.$$

Na odcinku AY wybrano punkt N spełniający warunek

$$AB = AN = CN.$$

Wykaż, że prosta CN przechodzi przez środek odcinka AX.

Zadanie 37.

W trójkącie ABC, w którym $AC = BC$, dwusieczna kąta przy wierzchołku B przecina bok AC w punkcie D. Prosta prostopadła do BD, przechodząca przez środek okręgu opisanego na trójkącie ABC, przecina bok BC w punkcie E. Prosta przechodząca przez E i równoległa do BD przecina bok AC w punkcie F. Wykaż, że

$$CE = FD.$$

Zadanie 38.

Okręgi o_1 i o_2 o środkach odpowiednio w punktach O_1 i O_2 przecinają się w punktach A i B, przy czym $\sphericalangle O_1BO_2 > 90^\circ$. Półproste O_1B i O_2B przecinają okręgi o_2 i o_1 po raz drugi odpowiednio w punktach E i F. Przez punkt B prowadzimy prostą równoległą do prostej EF, która przecina okręgi o_1 i o_2 po raz drugi odpowiednio w punktach M i N. Wykaż, że

$$MN = AE + AF.$$

Rozwiązania zadań

Zadanie 1.

Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite k, dla których istnieje k kolejnych dodatnich liczb całkowitych, których iloczyn ma w zapisie dziesiętnym końcowe cyfry tworzące liczbę k.

Rozwiązanie: Zapiszmy

$$k = 10a + b$$

dla pewnych nieujemnych liczb całkowitych a, b, przy czym $b \leqslant 9$. Wśród dowolnych k kolejnych liczb całkowitych co najmniej a liczb jest podzielnych przez 10. Stąd zapis dziesiętny iloczynu k kolejnych liczb kończy się co najmniej a zerami. W takim razie liczba k ma co najmniej $a+1$ cyfr. Inaczej bowiem jej zapis dziesiętny musiałby składać się z samych zer. Liczba mająca co najmniej $a+1$ cyfr jest niemniejsza niż 10^a. Stąd uzyskujemy

$$10a + b = k \geqslant 10^a.$$

Nietrudno sprawdzić, że dla $a \geqslant 2$ mamy

$$10^a > 10a + 9,$$

więc otrzymujemy $a < 2$.

Jeśli $a = 1$, to iloczyn k kolejnych liczb zawiera czynnik podzielny przez 10. Stąd sama liczba k jest podzielna przez 10. Zatem ograniczyliśmy możliwe wartości k do liczb $1, 2, \ldots, 10$.

Dla $k = 10$ wśród k kolejnych liczb znajdziemy co najmniej dwie liczby parzyste i dwie liczby podzielne przez 5, więc rozważany iloczyn będzie liczbą podzielną przez 100, a zatem nie będzie kończył się cyframi 10.

Dla liczb nieparzystych $k > 1$ iloczyn k kolejnych liczb jest liczbą parzystą, której cyfra jedności jest parzysta. Natomiast sama liczba k ma nieparzystą cyfrę jedności, co prowadzi do sprzeczności. Zatem $k = 1$ lub k jest liczbą parzystą.

Zauważmy wreszcie, że dla $k = 6$ i $k = 8$ iloczyn k kolejnych liczb jest liczbą podzielną przez 5, więc jego cyfra jedności nie jest równa 6 ani 8.

Pozostałe możliwe wartości k równe są $1, 2, 4$. Każda z tych wartości spełnia warunek zadania:

$$1 = 1, \quad 1 \cdot 2 = 2, \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Zadanie 2.

Znajdź wszystkie trójki dodatnich liczb całkowitych a, b, c, dla których iloraz

$$\frac{abc + ab + a}{abc + bc + c}$$

jest liczbą całkowitą.

Rozwiązanie: Zauważmy, że

$$abc + ab + a \leqslant 3abc < 3 \cdot (abc + bc + c).$$

Rozważany iloraz jest więc dodatni i mniejszy od 3. Jeśli jest liczbą całkowitą, to jest równy 1 lub 2.

W pierwszym przypadku mamy $abc + ab + a = abc + bc + c$, czyli

$$ab + a = bc + c,$$

co można zapisać równoważnie w postaci

$$(b + 1)(a - c) = 0.$$

Skoro $b + 1 > 0$, to w tym przypadku uzyskujemy $a = c$.

Jeśli natomiast rozważany iloraz jest równy 2, to

$$abc + ab + a = 2(abc + bc + c) > 2abc,$$

więc $ab + a > abc$. Wtedy jednak

$$2ab \geqslant ab + a > abc,$$

więc $2 > c$, czyli $c = 1$. Po podstawieniu $c = 1$ otrzymujemy

$$2ab + a = 2(ab + b + 1),$$

czyli

$$a = 2b + 2.$$

Zatem jedynymi możliwymi rozwiązaniami są trójki postaci (a, b, a) dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych a, b oraz trójki postaci $(2b + 2, b, 1)$ dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej b. Nietrudno sprawdzić, że dla trójek pierwszej postaci rozważany iloraz wynosi 1, a dla trójek drugiej postaci wynosi 2. Wszystkie te trójki spełniają więc warunek zadania.

Zadanie 3.

Niech a, b, c będą dodatnimi liczbami całkowitymi. W prostopadłościennym pudełku o wymiarach $a \times b \times c$ umieszczono abc sześciennych klocków o krawędzi długości 1. Niektóre klocki są białe, a pozostałe są czarne. Wiadomo, że każda prosta równoległa do jednej z krawędzi pudełka przechodzi przez wnętrze co najwyżej jednego białego klocka. Jaka jest największa możliwa liczba białych klocków w pudełku?

Rozwiązanie: Odpowiedź to minimum z liczb ab, bc, ca.

Załóżmy bez straty ogólności, że $a \leqslant b \leqslant c$. Podzielmy pudełko na kolumny długości c, czyli złożone z c klocków. W każdej z nich jest maksymalnie jeden biały klocek, zatem łączna liczba białych klocków jest niewiększa niż ab.

Pozostaje wskazać rozmieszczenie ab białych klocków spełniające warunek zadania. Skoro $c \geqslant b$, to wystarczy przeprowadzić konstrukcję w części pudełka o wymiarach $a \times b \times b$. Wszystkie klocki poza tą częścią pokolorujemy na czarno.

Wprowadźmy układ współrzędnych kartezjańskich o osiach równoległych do krawędzi pudełka, w którym środkami klocków w rozważanej części pudełka złożonej z ab^2 klocków są dokładnie punkty (x, y, z), gdzie $x \in \{1, \ldots, a\}$ oraz $y, z \in \{1, \ldots, b\}$.

Pokolorujmy na biało dokładnie te z ab^2 klocków, których środki (x, y, z) spełniają warunek

$$b \mid (x + y + z).$$

Pozostałe klocki pokolorujmy na czarno. Białych klocków jest wtedy dokładnie ab: dla każdej z ab par (x, y) istnieje bowiem dokładnie jedna liczba z ze zbioru $1, \ldots, b$, dla której suma $x + y + z$ jest podzielna przez b.

Pozostaje sprawdzić, że żadna prosta równoległa do jednej z krawędzi pudełka nie przechodzi przez wnętrza dwóch różnych białych klocków. Przypuśćmy przeciwnie, że istnieje taka prosta, a środki tych klocków mają współrzędne (x, y, z) i (x', y', z'). Skoro rozważana prosta jest równoległa do jednej z osi układu współrzędnych, to zachodzą co najmniej dwie z równości $x = x', y = y', z = z'$. Gdyby na przykład pierwsze dwie równości były prawdziwe, to z wyboru białych klocków uzyskalibyśmy

$$b \mid (x + y + z) - (x + y + z') = z - z'.$$

Skoro jednak klocki te są różne oraz zakładamy, że $x = x'$ i $y = y'$, to $z \neq z'$. Jednocześnie $z, z' \in \{1, \ldots, b\}$, więc $0 < |z - z'| < b$, co przeczy podzielności $z - z'$ przez b. Pozostałe dwa przypadki wykluczamy analogicznie: skoro $a \leqslant b$, to wszystkie współrzędne należą do zbioru $\{1, \ldots, b\}$. Uzasadniliśmy zatem, że wskazane kolorowanie spełnia warunki zadania.

Zadanie 4.

W trapezie równoramiennym $ABCD$ o podstawach AB i CD, gdzie $AB \parallel CD$ i $AB > CD > BC$, przekątne AC i BD przecinają się w punkcie P. Okrąg opisany na trójkącie ABP przecina prostą BC po raz drugi w punkcie X, różnym od B. Punkt Y leżący na prostej AX spełnia warunek $DY \parallel BC$. Wykaż, że

$$\sphericalangle YDA = 2\sphericalangle YCA.$$

Rozwiązanie: Nierówność $CD > BC$ zapewnia, że punkt X leży na przedłużeniu odcinka CB za punktem B. Z kolei nierówność $AB > CD$ gwarantuje, że punkt Y leży między A i X.

Skoro $DY \parallel BX$ i punkty A, P, B, X leżą na jednym okręgu, to

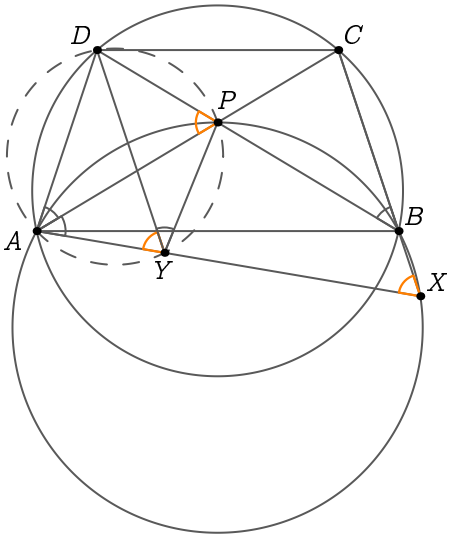
$$\sphericalangle AYD = \sphericalangle AXB = 180^\circ - \sphericalangle APB = \sphericalangle APD,$$

czyli również punkty A, Y, P, D leżą na jednym okręgu. Stąd $\sphericalangle YDA = \sphericalangle APY$. Wystarczy zatem wykazać, że $PC = PY$. Wówczas trójkąt PCY będzie równoramienny, czyli $\sphericalangle PCY = \sphericalangle PYC$. Z twierdzenia o kącie zewnętrznym zastosowanym do trójkąta PCY otrzymamy $\sphericalangle APY = \sphericalangle PCY + \sphericalangle PYC = 2\sphericalangle PCY = 2\sphericalangle YCA$.

Skoro trapez $ABCD$ jest równoramienny, to $PC = PD$. Zauważmy również, że

$$\sphericalangle PYD = \sphericalangle PAD = \sphericalangle PBC = 180^\circ - \sphericalangle PBX = \sphericalangle PAX = \sphericalangle YDP,$$

więc $PD = PY$, co kończy dowód.



Zadanie 5.

Niezerowe liczby rzeczywiste a, b, c spełniają układ równań

$$\begin{cases} a^2 + b + c = \frac{1}{a} \\ b^2 + c + a = \frac{1}{b} \\ c^2 + a + b = \frac{1}{c}. \end{cases}$$

Wykaż, że pewne dwie z liczb a, b, c są równe.

Rozwiązanie: Mnożąc pierwsze równanie przez a, otrzymujemy

$$a^3 + ab + ac = 1.$$

Mnożąc drugie równanie przez b i odejmując otrzymaną równość od poprzedniej, dostajemy

$$a^3 - b^3 + ac - bc = 0.$$

Lewą stronę tego równania możemy rozłożyć na czynniki, korzystając ze wzoru na różnicę sześcianów:

$$0 = a^3 - b^3 + ac - bc = (a - b)(a^2 + ab + b^2 + c).$$

Przypuśćmy nie wprost, że liczby a, b, c są parami różne. Wówczas $a - b \neq 0$, więc możemy podzielić powyższą równość przez $a - b$, otrzymując

$$a^2 + ab + b^2 + c = 0.$$

Postępując podobnie z drugim i trzecim równaniem wyjściowego układu, otrzymamy

$$b^2 + bc + c^2 + a = 0.$$

Odejmując drugą z tych równości od pierwszej, otrzymujemy

$$a^2 - c^2 + ab - bc + c - a = 0.$$

Ponownie rozkładamy lewą stronę na czynniki. W rezultacie otrzymujemy

$$(a - c)(a + b + c - 1) = 0.$$

Skoro $a \neq c$, to możemy podzielić tę równość przez $a - c$, otrzymując

$$a + b + c = 1.$$

W rezultacie pierwsze z równań wyjściowego układu możemy zapisać w postaci

$$\frac{1}{a} = a^2 + b + c = a^2 + (1 - a).$$

Mnożąc to równanie przez a, uzyskujemy

$$0 = a^3 - a^2 + a - 1 = (a - 1)(a^2 + 1).$$

Skoro $a^2 + 1 > 0$, to otrzymujemy $a = 1$. Analogicznie otrzymujemy $b = c = 1$, co przeczy przypuszczeniu, że liczby a, b, c są parami różne.

Zadanie 6.

Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite n, których dodatnie dzielniki można podzielić na pary w taki sposób, że suma liczb w każdej parze jest potęgą trójki.

Rozwiązanie: Wszystkie takie liczby są postaci $n = 2 \cdot 3^k$, gdzie k jest nieujemną liczbą całkowitą. Dodatnie dzielniki tych liczb można pogrupować w pary $(3^m, 2 \cdot 3^m)$ dla $m = 0, 1, \ldots, k$ i w każdej parze suma dzielników wynosi 3^{m+1}. Uzasadnimy, że wszystkie liczby n spełniające warunek z treści zadania są opisanej postaci.

Sposób I:

Przypuśćmy, że liczba n spełnia założenia z treści zadania. Oznaczmy przez r tę nieujemną liczbę całkowitą, dla której $3^r \leqslant n < 3^{r+1}$. Oznaczmy przez d dzielnik sparowany z liczbą n. Skoro d jest dzielnikiem właściwym liczby n, to $d \leqslant \frac{n}{2}$, więc

$$3^r < n + d < \frac{3}{2} \cdot 3^{r+1} < 3^{r+2}.$$

Liczba $n + d$ jest potęgą trójki, więc $3^{r+1} = n + d \leqslant \frac{3}{2}n$, czyli $n \geqslant 2 \cdot 3^r$.

Zauważmy też, że liczba n musi być parzysta – inaczej obie liczby n i d byłyby nieparzyste, więc liczba $d + n$ byłaby parzysta i nie mogłaby być potęgą trójki.

Niech $n = 2m$. Wykażemy, że $m = d$. Przypuśćmy przeciwnie, że $m \neq d$, i oznaczmy przez d' dzielnik sparowany z m. Mamy $d' \neq m$, a także $d' \neq n$, skoro liczba n jest już sparowana z d. Zatem iloraz $n/d' \geqslant 3$, czyli $d' \leqslant \frac{n}{3}$. Wtedy jednak

$$3^r \leqslant m < m + d' \leqslant \frac{n}{2} + \frac{n}{3} < n < 3^{r+1},$$

więc $m + d'$ nie może być potęgą trójki. Uzyskujemy sprzeczność.

Widzimy zatem, że $m = d$, czyli $n + d = 3m$ jest potęgą trójki. Stąd $n = 2m$ jest dwukrotnością potęgi trójki.

Sposób II:

Zapiszmy

$$n = 3^a \cdot m,$$

gdzie a jest nieujemną liczbą całkowitą, a m jest dodatnią liczbą całkowitą niepodzielną przez 3. Zauważmy, że nie możemy połączyć w parę dzielnika liczby n podzielnego przez 3 z dzielnikiem liczby n niepodzielnym przez 3, bo ich suma byłaby niepodzielna przez 3. Dzielniki liczby n niepodzielne przez 3 to dokładnie dzielniki liczby m. Wnioskujemy stąd, że liczba m również spełnia warunki zadania.

Pozostaje wykazać, że $m = 2$. Wiemy już, że liczba m spełnia warunek zadania i nie jest podzielna przez 3.

Zauważmy najpierw, że żadna liczba pierwsza p nie spełnia warunku $p^2 \mid m$. Istotnie, gdyby $p^2 \mid m$, to więcej niż połowa dzielników m byłaby podzielna przez p. Pewne dwa takie dzielniki musiałyby więc zostać połączone w jedną parę. Ich suma byłaby podzielna przez $p \neq 3$, a zatem nie mogłaby być potęgą trójki. Zatem m jest iloczynem różnych liczb pierwszych.

Zauważmy jednak, że dla każdej liczby pierwszej $p \mid m$ dokładnie połowa dzielników liczby m jest podzielna przez p, więc w każdej parze musi występować dokładnie jedna liczba podzielna przez p.

Jeśli zatem dzielnik d jest sparowany z dzielnikiem e, to każda liczba pierwsza dzieląca m dzieli dokładnie jedną z liczb d, e. Ponieważ m jest iloczynem różnych liczb pierwszych, więc $de = m$, czyli $e = m/d$. Zatem każda para dzielników ma postać $(d, m/d)$.

Z drugiej strony, liczba m jest parzysta – inaczej w każdej parze dzielników oba byłyby nieparzyste, więc suma byłaby parzysta, czyli nie byłaby potęgą trójki. Możemy zatem zapisać $m = 2m'$.

Wiemy już, że dzielnik 1 jest sparowany z $2m'$, a dzielnik 2 jest sparowany z m'. Zatem liczby $1 + 2m'$ i $2 + m'$ są potęgami trójki. Nietrudno jednak sprawdzić, że

$$2 + m' \leqslant 1 + 2m' < 3 \cdot (2 + m').$$

Gdyby pierwsza nierówność była ostra, otrzymalibyśmy dwie potęgi trójki, których iloraz należy do przedziału $(1, 3)$, co jest niemożliwe. Zatem

$$2 + m' = 1 + 2m',$$

czyli $m' = 1$. Stąd $m = 2$, a więc $n = 2 \cdot 3^a$.

Zadanie 7.

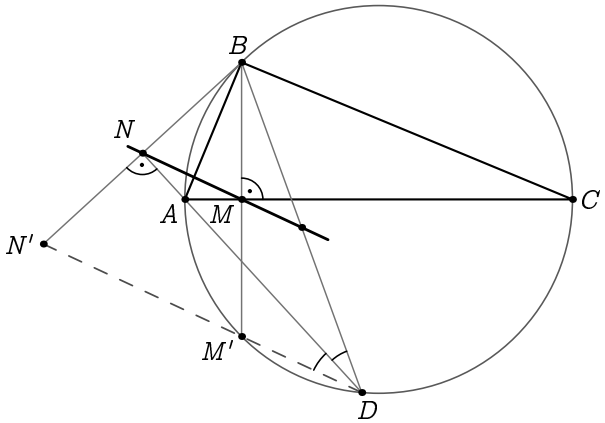
W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku B jest prosty. Na okręgu opisanym na tym trójkącie wybrano punkt D różny od wierzchołków trójkąta. Przez M, N oznaczamy odpowiednio rzuty punktu B na proste AC i AD. Wykaż, że prosta MN przechodzi przez środek odcinka BD.

Rozwiązanie: Niech M', N' będą punktami symetrycznymi do punktu B odpowiednio względem prostych AC i AD. Skoro AC jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie ABC, to punkt M' leży na tym okręgu. Jeśli $M' = D$, to punkt M jest środkiem odcinka BD, więc teza jest spełniona. Dalej zakładamy, że $M' \neq D$.

Zauważmy, że $AB = AM'$, więc punkt A jest środkiem jednego z łuków o końcach B, M'. W konsekwencji proste DB i DM' są symetryczne względem prostej DA.

Z definicji punktu N' obrazem prostej DB w tej samej symetrii jest prosta DN', ponieważ punkt D pozostaje nieruchomy. Zatem proste DM' i DN' pokrywają się, czyli punkty M', N', D są współliniowe.

Jednokładność o środku B i skali $\frac{1}{2}$ przekształca punkty M', N', D odpowiednio w punkty M, N i środek odcinka BD. Skoro jednokładność zachowuje współliniowość punktów, to środek odcinka BD leży na prostej MN.



Zadanie 8.

Pewna liczba całkowita $n > 2$ ma k dodatnich dzielników. Wykaż, że istnieją dwa różne dzielniki a i b liczby n takie, że

$$k \mid a - b.$$

Rozwiązanie:

Przypuśćmy nie wprost, że istnieje liczba całkowita $n > 2$, która nie spełnia tezy zadania. Niech

$$1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$$

będą dzielnikami n. Z przypuszczenia wynika, że dla $i \neq j$

$$k \nmid (d_i - d_j),$$

więc dzielniki $d_1, \ldots, d_k$ dają parami różne reszty z dzielenia przez k. Skoro dzielników jest k, to każda z reszt $0, 1, \ldots, k-1$ występuje dokładnie raz. W szczególności dla pewnego i mamy $k \mid d_i$. Skoro $d_i \mid n$, to otrzymujemy $k \mid n$, czyli k również jest dodatnim dzielnikiem liczby n. Gdybyśmy mieli $k \neq n$, to k i n byłyby dwoma różnymi dzielnikami liczby n spełniającymi

$$k \mid (n - k),$$

wbrew naszemu przypuszczeniu. Zatem $k = n$.

Pozostaje więc rozpatrzyć przypadek, gdy $k = n$. Wszystkie dodatnie dzielniki liczby n należą do zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$. Skoro jest ich $k = n$, to każda z liczb w tym zbiorze musi dzielić n. W szczególności $n - 1 \mid n$, a więc także $n - 1 \mid 1$. Jest to niemożliwe, ponieważ $n > 2$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

Zadanie 9.

Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c spełniających warunek $abc = 1$ zachodzi nierówność

$$\frac{a+b+c+3}{4} \geqslant \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}.$$

Rozwiązanie: Wykażemy, że zachodzi nierówność

$$\frac{c+1}{4} \geqslant \frac{1}{a+b}.$$

Z nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną mamy $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, a więc również

$$\frac{1}{a+b} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{ab}}.$$

Zauważmy dalej, że korzystając z założenia $abc = 1$, mamy

$$\frac{1}{\sqrt{ab}} = \sqrt{c}.$$

Wreszcie, znów korzystając z nierówności między średnimi, uzyskujemy

$$\frac{c+1}{2} \geqslant \sqrt{c}.$$

Łącząc otrzymane oszacowania, uzyskujemy nierówność pomocniczą:

$$\frac{1}{a+b} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{c}}{2} \leqslant \frac{c+1}{4}.$$

Po analogicznym rozumowaniu dla pozostałych dwóch składników prawej strony nierówności z treści zadania uzyskujemy

$$\frac{a+b+c+3}{4} = \frac{c+1}{4} + \frac{a+1}{4} + \frac{b+1}{4} \geqslant \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}.$$

Zadanie 10.

Na osi liczbowej, w punkcie 0, stoi królik. Co minutę wykonuje skok dowolnej dodatniej całkowitej długości, w prawo albo w lewo. Łączna długość wszystkich jego skoków ma wynosić 2025.

Wyznacz wszystkie liczby całkowite k, dla których królik może zakończyć swoją podróż w punkcie k na nieparzyście wiele sposobów.

Rozwiązanie: Wykażemy, że jedynymi możliwymi liczbami k są -1 oraz 1.

Każdy skok w prawo zapiszmy jako ciąg plusów, a każdy skok w lewo jako ciąg minusów. Liczba znaków w takim ciągu jest równa długości skoku. Każde dwa kolejne skoki oddzielmy znakiem |, który będziemy nazywać *ścianą*. Na przykład: ciąg trzech skoków

$$0 \xrightarrow{+2} 2 \xrightarrow{+3} 5 \xrightarrow{-3} 2$$

oznaczymy przez ++|+++|---.

W zapisie całej trasy występuje łącznie dokładnie 2025 plusów i minusów. Ściany umieszczamy wyłącznie między sąsiednimi znakami, co najwyżej po jednej w każdej przerwie. Między różnymi znakami musi występować ściana, natomiast między jednakowymi znakami może występować, ale nie musi.

Każdy taki zapis odpowiada dokładnie jednej trasie królika i każda trasa ma dokładnie jeden taki zapis. Punkt końcowy trasy jest równy liczbie plusów pomniejszonej o liczbę minusów, więc nie zależy od rozmieszczenia ścian.

Ustalmy zatem ciąg 2025 plusów i minusów. Nazwijmy go *trefnym*, jeśli można umieścić w nim ściany na nieparzyście wiele sposobów.

Zauważmy, że dla każdych dwóch kolejnych plusów możemy wybrać, czy wstawiamy między nie ścianę, czy nie. Podobnie z kolejnymi minusami. Oznaczmy przez m liczbę par sąsiednich plusów, a przez n liczbę par sąsiednich minusów. W każdej z tych $m+n$ przerw niezależnie decydujemy, czy wstawić ścianę. Liczba dopuszczalnych rozmieszczeń ścian wynosi więc 2^{m+n}. Zatem jedyne *trefne ciągi* to te, w których $m=n=0$, czyli dwa ciągi, w których plusy i minusy występują na zmianę. Jeden z tych ciągów odpowiada królikowi lądującemu w punkcie 1, a drugi w punkcie -1.

Przypuśćmy, że k jest liczbą różną od 1 i -1, i podzielmy trasy kończące się w punkcie k na grupy, umieszczając w jednej grupie te, które po usunięciu ścian mają ten sam ciąg plusów i minusów. Stąd jest parzyście wiele sposobów na zakończenie w punkcie k. Stąd $k=-1$ lub $k=1$. Dla każdej z tych wartości dokładnie jedna grupa jest jednoelementowa: odpowiada ona właściwemu ciągowi trefnemu. Wszystkie pozostałe grupy mają parzystą liczbę elementów.

Zadanie 11.

W czworokącie wypukłym $ABCD$ kąt ADC jest prosty, a kąty BCD i ABC są równe i rozwarte. Ponadto $AB = 2CD$.

Prosta przechodząca przez punkt C i równoległa do prostej AD przecina dwusieczną zewnętrzną kąta ABC w punkcie T. Wykaż, że

$$\sphericalangle ATB + \sphericalangle BCD = 180^\circ.$$

Rozwiązanie: Oznaczmy środki odcinków AB i AC odpowiednio przez M i N.

Mamy $MB = \frac{1}{2}AB = CD$ oraz $\sphericalangle MBC = \sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD$. Zatem czworokąt $MDCB$ jest trapezem równoramiennym o podstawach MD i BC. Ponadto MN jest linią środkową trójkąta ABC, więc $MN \parallel BC$. Zatem punkty M, N, D leżą na jednej prostej.

Punkt N jest środkiem przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego ADC, skąd uzyskujemy $ND = NC$. Korzystając także z tego, że $DN \parallel BC$, otrzymujemy

$$\sphericalangle ACD = \sphericalangle NCD = \sphericalangle CDN = 180^\circ - \sphericalangle BCD.$$

Ponieważ $CT \parallel AD$ oraz $AD \perp CD$, więc $CT \perp CD$. Otrzymana równość kątów oznacza więc, że prosta CT jest dwusieczną wewnętrzną kąta BCA.

Prosta BT jest natomiast dwusieczną zewnętrzną kąta ABC. Zatem T jest środkiem okręgu dopisanego do trójkąta ABC naprzeciw wierzchołka C, czyli do boku AB. Zachodzi zatem równość

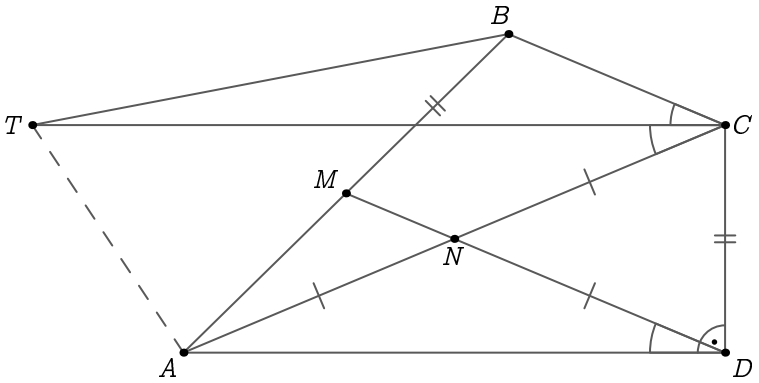
$$\sphericalangle ATB = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle ACB.$$

Wiemy natomiast, że

$$\sphericalangle BCD = \sphericalangle DCT + \sphericalangle TCB = 90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle ACB.$$

Zatem ostatecznie

$$\sphericalangle ATB + \sphericalangle BCD = 180^\circ.$$



Zadanie 12.

Niech $n > 1$ będzie liczbą całkowitą. Powiemy, że ciąg liczb całkowitych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jest *średnio rosnący*, jeżeli dla każdego $k = 1, 2, \ldots, n-1$ średnia arytmetyczna pierwszych k wyrazów jest mniejsza od średniej arytmetycznej pierwszych $k+1$ wyrazów tego ciągu.

W zależności od n wyznacz najmniejszą liczbę, która może wystąpić jako ostatni wyraz średnio rosnącej permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Rozwiązanie: Średnia wszystkich wyrazów dowolnej permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ wynosi $\frac{n+1}{2}$. Jeśli ostatnim wyrazem permutacji jest k, to warunek wzrostu średniej

w ostatnim kroku przyjmuje postać

$$\frac{\frac{n(n+1)}{2}-k}{n-1}<\frac{n+1}{2}, \quad \text{czyli} \quad k>\frac{n+1}{2}.$$

Skoro k jest liczbą całkowitą, to otrzymujemy

$$k \geqslant \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1.$$

Oznaczmy prawą stronę powyższej nierówności przez m. Ustawmy liczby ze zbioru $\{1,\ldots,n\}\setminus\{m\}$ w porządku rosnącym, a na końcu dopiszmy m. Pierwsze $n-1$ wyrazów tworzy ciąg rosnący, a więc także średnio rosnący. Ostatnia średnia również wzrasta, ponieważ $m>\frac{n+1}{2}$. Zatem otrzymana permutacja jest średnio rosnąca.

Zadanie 13.

Na okręgu, w równych odstępach, znajduje się 2025 żarówek. Każda z nich jest zapalona albo zgaszona. O każdej pełnej godzinie każda żarówka, która przez ostatnią godzinę była w innym stanie niż obaj jej sąsiedzi, zmienia swój stan. Wykaż, że o pewnej pełnej godzinie żadna żarówka nie zmieni swojego stanu.

Rozwiązanie: Powiemy, że żarówka jest *stała* o godzinie n, jeśli o tej godzinie nie zmieniła stanu. Jeśli żarówka nie zmieniła stanu o godzinie n, to tuż przed tą godziną miała ten sam stan co przynajmniej jeden z jej sąsiadów. Sąsiad ten również nie zmienił stanu. Dwie sąsiadujące żarówki w tym samym stanie nigdy już go nie zmienią, więc żarówka stała o godzinie n jest stała o każdej późniejszej godzinie.

Skoro liczba 2025 jest nieparzysta, to na początku pewne dwie sąsiadujące żarówki są w tym samym stanie, czyli są stałe o godzinie 1. Oznaczmy kolejne żarówki na okręgu liczbami $1,2,\ldots,2025$ w taki sposób, aby właśnie rozważane dwie żarówki miały numery 1 i 2025.

Udowodnimy przez indukcję, że żarówka o numerze n jest stała o godzinie n. Dla $n=1$ jest to prawda. Załóżmy zatem, że jest to prawda dla pewnego n, i wykażmy, że jest to prawda również dla $n+1$.

Jeśli żarówka o numerze $n+1$ nie zmieniła stanu o godzinie n, to jest stała również o godzinie $n+1$. Jeśli natomiast zmieniła wtedy stan, to przed zmianą miała stan przeciwny do stanu żarówki o numerze n. Ta ostatnia nie zmieniła stanu, więc po aktualizacji obie żarówki mają ten sam stan. Zatem o godzinie $n+1$ żadna z nich nie zmieni stanu. To kończy dowód indukcyjny.

Zatem po 2025 godzinach wszystkie żarówki będą stałe i nigdy już nie zmienią stanu.

Zadanie 14.

Rozstrzygnij, czy istnieje liczba pierwsza p oraz dodatnia liczba całkowita N, które spełniają następujący warunek: dla dowolnej dodatniej N-cyfrowej liczby całkowitej o niezerowych cyfrach można tak przestawić jej cyfry, aby otrzymać liczbę podzielną przez p.

Rozwiązanie: Załóżmy, że (p, N) jest parą liczb spełniającą warunek zadania. Rozpatrzmy liczbę

$$k = \frac{10^N - 1}{9} = \underbrace{111\ldots1}_{N \text{ jedynek}}.$$

Jasne jest, że dowolna permutacja jej cyfr nie zmienia jej wartości. W szczególności musimy więc mieć $p \mid k$. Rozpatrzmy teraz liczbę złożoną z $N-1$ jedynek i jednej dwójki. Z założenia cyfry tej liczby można przestawić tak, aby otrzymać liczbę podzielną przez p. Każda liczba otrzymana przez takie przestawienie ma postać $k+10^t$, gdzie $0 \leqslant t \leqslant N-1$. Zatem dla pewnej liczby całkowitej t z tego zakresu mamy

$$p \mid (k + 10^t).$$

Oznacza to, że

$$p \mid \left(k + 10^t\right) - k = 10^t,$$

więc $p = 2$ lub $p = 5$. Jednak liczba k kończy się cyfrą 1, więc nie jest podzielna ani przez 2, ani przez 5. Przeczy to warunkowi $p \mid k$. Oznacza to, że nie istnieje para liczb (p, N) spełniająca warunki zadania.

Zadanie 15.

Dany jest romb $ABCD$. We wnętrzach boków AB i AD wybrano odpowiednio punkty P oraz Q tak, że odcinek PQ jest styczny do okręgu wpisanego w ten romb. Udowodnij, że pole trójkąta CPQ nie zależy od wyboru punktów P i Q.

Rozwiązanie: Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w romb $ABCD$, a E, F, J niech będą punktami styczności tego okręgu odpowiednio z odcinkami AB, AD, PQ. Pola figur będziemy oznaczać nawiasami kwadratowymi.

Punkt I jest środkiem przekątnej AC. Trójkąty CPI i API mają więc równe podstawy CI i AI oraz wspólną wysokość opuszczoną z punktu P. Analogiczna obserwacja dla punktu Q daje

$$[CPI] = [API], \qquad [CQI] = [AQI].$$

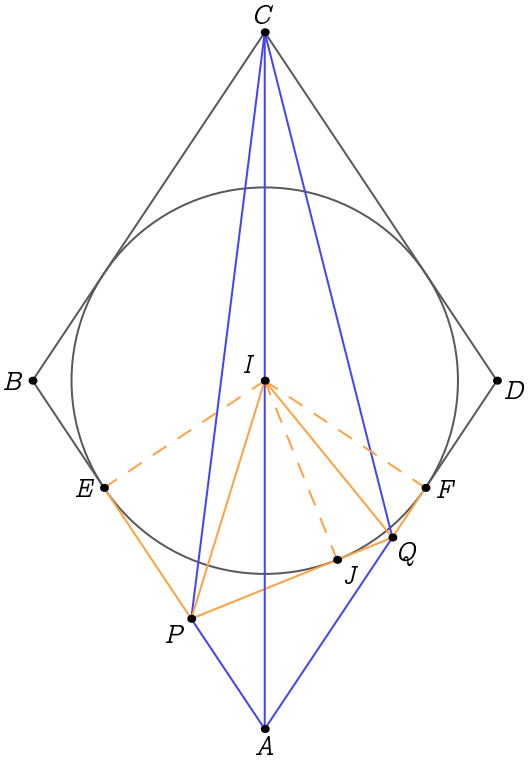
Z równości odcinków stycznych poprowadzonych z punktu P mamy $PJ = PE$. Ponadto $IJ = IE$, ponieważ są to promienie okręgu. Trójkąty prostokątne IPJ oraz IPE są zatem przystające, a więc mają równe pola. Argumentując podobnie dla punktu Q, uzyskujemy równości pól

$$[IPJ] = [IPE], \quad [IQJ] = [IQF].$$

Punkt I leży wewnątrz trójkąta CPQ, a punkt J na jego boku PQ. Rozkładając ten trójkąt na cztery mniejsze i korzystając z powyższych równości, uzyskujemy

$$\begin{aligned}[CPQ] &= [CPI] + [IPJ] + [CQI] + [IQJ] \\ &= [API] + [IPE] + [AQI] + [IQF] \\ &= [AEI] + [AFI] = [AEIF].\end{aligned}$$

W przedostatniej równości korzystamy z tego, że punkt P leży między punktami A oraz E, a punkt Q leży między punktami A oraz F. Czworokąt $AEIF$ zależy więc wyłącznie od danego rombu, a nie od wyboru punktów P oraz Q. Zatem pole trójkąta CPQ jest stałe.



Zadanie 16.

Ciąg dodatnich liczb całkowitych $a_1, a_2, \ldots$ nazwiemy *mraśnym*, jeżeli dla każdej dodatniej liczby całkowitej n spełniony jest warunek

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n-1} = a_n^2.$$

Wyznacz wszystkie ciągi mraśne, których pewien wyraz wynosi 3.

Rozwiązanie: Dla $n = 1$ mamy $a_1 = a_1^2$. Skoro $a_1 > 0$, to $a_1 = 1$.

Zauważmy teraz, że ciąg (a_n) jest ściśle rosnący. Istotnie, odejmując od warunku z treści zadania dla $n+1$ warunek dla n, uzyskujemy

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = a_{2n} + a_{2n+1}.$$

Prawa strona powyższej równości jest dodatnia, więc $a_{n+1}^2 > a_n^2$, a skoro wszystkie wyrazy rozważanego ciągu są dodatnie, to

$$a_{n+1} > a_n.$$

Korzystając jeszcze raz z powyższej równości, stwierdzamy, że

$$(a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n) = (a_{2n} + a_{2n+1}).$$

Skoro rozważany ciąg jest ściśle rosnący, to

$$a_{2n} > a_n \qquad \text{oraz} \qquad a_{2n+1} > a_{n+1}.$$

Stąd $a_{2n} + a_{2n+1} > a_n + a_{n+1}$, więc

$$a_{n+1} - a_n \geqslant 2.$$

Skoro $a_1 = 1$, dla każdego $t \geqslant 1$ otrzymujemy

$$a_t \geqslant 1 + 2(t-1) = 2t - 1.$$

Skoro ciąg zawiera liczbę 3, to z powyższej nierówności wynika, że $a_2 = 3$.

Podstawiając teraz $n = 2$ do warunku z treści zadania, otrzymujemy

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_2^2.$$

Zatem

$$1 + 3 + a_3 = 9, \qquad \text{więc} \quad a_3 = 5.$$

Wykażemy teraz poprzez (silną) indukcję, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi równość

$$a_n = 2n - 1.$$

Wiemy już, że jest to prawda dla $n = 1, 2, 3$. Załóżmy, że dla pewnego $n \geqslant 3$ mamy

$$a_k = 2k - 1$$

dla wszystkich $k = 1, \ldots, n$. Korzystając z warunku z treści zadania dla n, mamy

$$(2n-1)^2 = a_n^2 = a_1 + \ldots + a_{2n-1} \geqslant 1 + 3 + \ldots + (4n-3) = (2n-1)^2.$$

W szczególności wszystkie nierówności $a_t \geqslant 2t - 1$ dla $t \leqslant 2n - 1$ muszą być równościami. Skoro $2n - 1 > n + 1$, to dostajemy $a_{n+1} = 2n + 1$, co kończy dowód indukcyjny. Ostatecznie dostajemy $a_n = 2n - 1$ dla każdego $n \geqslant 1$. Nietrudno zweryfikować, że ten ciąg jest mrośny, co kończy dowód.

Zadanie 17.

Trójka parami różnych dodatnich liczb całkowitych a, b, c spełnia

$$\frac{a}{c} = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + b^2}.$$

Udowodnij, że $a^2 + b^2 + c^2$ nie jest liczbą pierwszą.

Rozwiązanie: Niech $S = a^2 + b^2 + c^2$. Z założenia mamy

$$c(a^2 + b^2) = a(c^2 + b^2).$$

Możemy zapisać powyższą równość w postaci $ac(a - c) - b^2(a - c) = 0$, a następnie

$$(a - c)(ac - b^2) = 0.$$

Ponieważ $a \neq c$, więc otrzymujemy $b^2 = ac$. Zauważmy w takim razie, że

$$S = a^2 + b^2 + c^2 = \left(a^2 + 2ac + c^2\right) - b^2 = (a + c - b)(a + c + b).$$

Bez straty ogólności przyjmijmy, że $a > c$. Z równości $b^2 = ac$ wynika wówczas, że $c < b < a$. Skoro liczby a i b są całkowite, to $a - b \geqslant 1$, więc

$$a + c + b > a + c - b \geqslant c + 1 > 1.$$

Zatem $S = (a + c - b)(a + c + b)$ nie jest liczbą pierwszą.

Zadanie 18.

W trapezie równoramiennym $ABCD$ o podstawach AB i CD, przy czym $AB > CD$, przekątne przecinają się w punkcie X. Przez I oznaczamy środek okręgu dopisanego do boku BX trójkąta ABX, a przez J środek okręgu dopisanego do boku CX trójkąta CDX. Wykaż, że odcinki IC i JB mają równe długości.

Rozwiązanie: Zauważmy, że

$$\sphericalangle CXJ = \frac{1}{2}\sphericalangle CXB = \sphericalangle XAB = \sphericalangle DCX.$$

Kolejne równości wynikają odpowiednio z tego, że prosta XJ jest dwusieczną zewnętrzną kąta DXC, z równoramienności trójkąta ABX oraz z równoległości prostych AB i CD. Zauważmy również, że

$$\sphericalangle XCJ = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle DCX) = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle CXJ,$$

gdyż prosta CJ jest dwusieczną zewnętrzną kąta DCX. Zatem trójkąt CXJ jest równoramienny. Analogicznie uzasadniamy, że trójkąt BXI jest równoramienny.

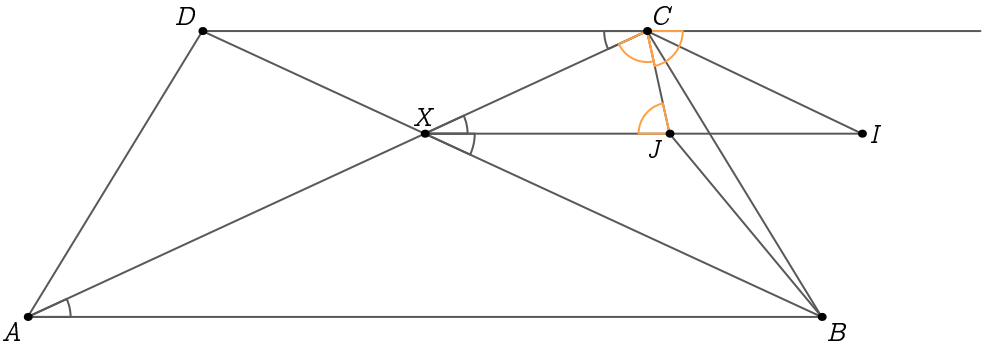
W trójkątach BXJ i IXC mamy zatem

$$BX = IX \quad \text{oraz} \quad XJ = XC,$$

a także

$$\sphericalangle BXJ = \frac{1}{2}\sphericalangle BXC = \sphericalangle IXC,$$

gdyż zarówno prosta XJ, jak i prosta XI dzielą kąt BXC na połowy. Trójkąty BXJ i IXC są więc przystające na mocy cechy bok–kąt–bok. W szczególności $JB = IC$.



Zadanie 19.

Klasa w liceum składa się z 20 pszczół, przy czym każda pszczoła ma dokładnie trzech bliskich znajomych, a znajomość jest wzajemna. Pięć pszczół zakupiło już bilety na nadchodzący koncert. Kolejne zakupy odbywają się wyłącznie według następującej zasady: pszczoła kupuje bilet, gdy co najmniej dwóch jej bliskich znajomych już ma bilety. Czy jest możliwe, aby wszystkie pszczoły zakupiły bilety na koncert?

Rozwiązanie: Nie jest to możliwe. Zinterpretujmy sytuację jako graf, w którym wierzchołkami są pszczoły, a krawędź prowadzimy między pszczołami, które są znajomymi.

Sposób I: Rozważmy łączną liczbę krawędzi pomiędzy pszczołami z biletami a pszczołami bez biletów – oznaczmy ją przez S. Na początku mamy $S \leqslant 15$, ponieważ każda z pięciu pszczół z biletem ma trzech znajomych, ale nie wszyscy muszą być bez biletów. W momencie, gdy pszczoła kupuje bilet, ma dwóch lub trzech znajomych z biletami – zatem liczba S zmniejsza się o 1 lub o 3.

Na początku 15 pszczół nie ma biletu – załóżmy nie wprost, że wszystkie mogą je kupić. Rozważmy moment, gdy bilet będą mieli wszyscy poza jedną pszczołą. Wtedy $S = 3$, ponieważ jedyna pszczoła bez biletu ma trzech znajomych z biletami. Z drugiej strony od początku nastąpiło 14 zakupów, a każdy zmniejszył S o co najmniej 1. Zatem $S \leqslant 15 - 14 = 1$. Uzyskujemy sprzeczność.

Sposób II: Usuńmy z grafu 5 pszczół z biletami (wraz ze wszystkimi krawędziami wychodzącymi z nich). Na początku liczba krawędzi w grafie wynosiła

$$\frac{20 \cdot 3}{2} = 30,$$

więc po usunięciu 5 pszczół w grafie pozostanie co najmniej 15 krawędzi. Jednocześnie będzie miał on dokładnie 15 wierzchołków. Skorzystamy teraz z faktu, że jeśli w grafie jest co najmniej tyle krawędzi, ile wierzchołków, to istnieje w nim cykl. Istnieje zatem liczba $k \geqslant 3$ i pszczoły $P_1, P_2, \ldots, P_k$ bez biletów, z których każde dwie kolejne są znajomymi (i P_1 jest znajomą P_k).

Żadna z pszczół na tym cyklu nie kupi biletu. Gdyby było inaczej, rozważylibyśmy tę, która kupiłaby go jako pierwsza. W chwili zakupu jej dwaj sąsiedzi na cyklu nie mieliby jeszcze biletów. Miałaby więc co najwyżej jednego znajomego z biletem, wbrew zasadzie dokonywania zakupów.

Zatem wszystkie pszczoły $P_1, \ldots, P_k$ pozostaną bez biletów. W szczególności dotyczy to co najmniej trzech pszczół.

Zadanie 20.

Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych a, b zachodzi równość

$$\sum_{k=0}^{b-1} \left\lfloor \frac{ka}{b} \right\rfloor = \sum_{k=0}^{a-1} \left\lfloor \frac{kb}{a} \right\rfloor .$$

Rozwiązanie: Sposób I: Rozważmy prostokąt o wierzchołkach

$$(0,0), \quad (b,0), \quad (b,a), \quad (0,a)$$

oraz jego przekątną łączącą punkty $(0,0)$ i (b,a). Ma ona równanie

$$y = \frac{a}{b} \cdot x.$$

Policzmy najpierw punkty kratowe leżące wewnątrz tego prostokąta, na przekątnej lub pod nią. Dokładniej, rozważamy punkty kratowe (x,y) spełniające warunki

$$1 \leqslant x \leqslant b-1, \qquad 1 \leqslant y \leqslant a-1$$

oraz

$$y \leqslant \frac{a}{b} \cdot x.$$

Dla ustalonego $x = k$ liczba możliwych wartości y jest równa

$$\left\lfloor \frac{ka}{b} \right\rfloor .$$

Zatem liczba wszystkich takich punktów jest równa

$$\sum_{k=1}^{b-1} \left\lfloor \frac{ka}{b} \right\rfloor = \sum_{k=0}^{b-1} \left\lfloor \frac{ka}{b} \right\rfloor .$$

Z drugiej strony policzmy punkty kratowe leżące wewnątrz tego samego prostokąta, na przekątnej lub nad nią. Dla ustalonego $y = k$ liczba możliwych wartości x jest równa

$$\left\lfloor \frac{kb}{a} \right\rfloor .$$

Wobec tego liczba punktów kratowych leżących na przekątnej lub nad nią jest równa

$$\sum_{k=1}^{a-1} \left\lfloor \frac{kb}{a} \right\rfloor = \sum_{k=0}^{a-1} \left\lfloor \frac{kb}{a} \right\rfloor .$$

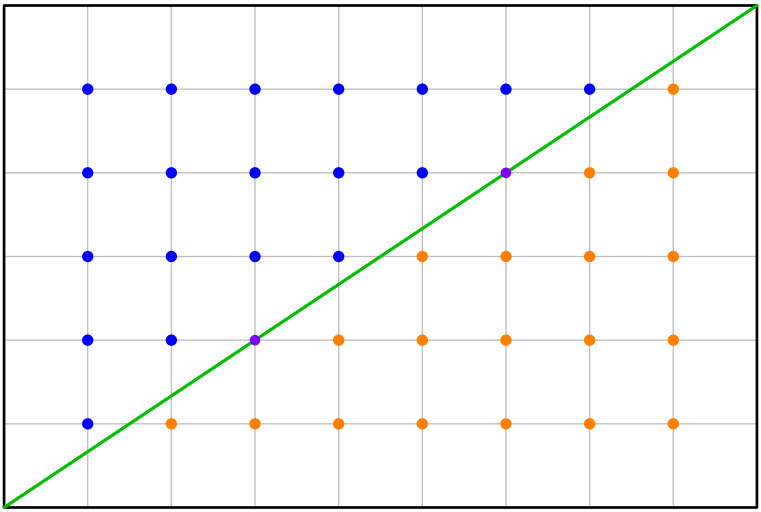
Pozostaje zauważyć, że obie policzone liczby są równe. Istotnie, przekształcenie

$$(x, y) \longmapsto (b - x, a - y)$$

jest symetrią środkową prostokąta. Przeprowadza ono punkty kratowe na punkty kratowe, zachowuje przekątną oraz zamienia punkty leżące pod przekątną na punkty leżące nad przekątną. Otrzymujemy więc wzajemną jednoznaczność między punktami kratowymi leżącymi na przekątnej lub pod nią oraz punktami kratowymi leżącymi na przekątnej lub nad nią. Stąd

$$\sum_{k=0}^{b-1} \left\lfloor \frac{ka}{b} \right\rfloor = \sum_{k=0}^{a-1} \left\lfloor \frac{kb}{a} \right\rfloor,$$

co należało udowodnić.



Sposób II: Zapiszmy

$$2\sum_{k=0}^{b-1} \left\lfloor \frac{ka}{b} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{b-1} \left(\left\lfloor \frac{ka}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(b-k)a}{b} \right\rfloor \right),$$

gdzie

$$\left\lfloor \frac{(b-k)a}{b} \right\rfloor = a + \left\lfloor -\frac{ka}{b} \right\rfloor.$$

Zauważmy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } x \text{ jest liczbą całkowitą,} \\ -1, & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Jeśli zatem przez S oznaczymy liczbę takich k w przedziale $[1, b-1]$, dla których $b \mid ka$, to otrzymamy

$$\sum_{k=1}^{b-1} \left(\left\lfloor \frac{ka}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(b-k)a}{b} \right\rfloor \right) = (a-1)(b-1) + S.$$

Aby znaleźć wartość S, oznaczmy $d = \mathrm{NWD}(a, b)$ i niech $a = dx$ oraz $b = dy$ dla pewnych liczb całkowitych x, y. Wtedy warunek $b \mid ka$ jest równoważny warunkowi $y \mid kx$, czyli $y \mid k$. Liczb k podzielnych przez y jest w przedziale $[1, b]$ dokładnie d, a zatem $S = d - 1$. W rezultacie wnioskujemy stąd, że lewa strona równości z treści zadania jest równa

$$\frac{(a-1)(b-1) + d - 1}{2}.$$

Analogicznie przekształcając prawą stronę, otrzymamy tę samą wartość, a zatem równość z treści faktycznie zachodzi.

Zadanie 21.

Znajdź wszystkie niemalejące nieskończone ciągi $a_1, a_2, \ldots$ dodatnich liczb całkowitych spełniające następującą własność: dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych n, m liczby $a_n + a_m$ oraz $n + m$ mają tyle samo dodatnich dzielników.

Rozwiązanie: Przez $d(n)$ oznaczmy liczbę dodatnich dzielników liczby n. Warunek z treści zadania możemy zapisać jako

$$d(a_i + a_j) = d(i + j)$$

dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych i, j.

Wykażemy najpierw, że dla każdej liczby pierwszej p zachodzi

$$a_{2^{p-2}} = 2^{p-2}.$$

Podstawmy bowiem $i = j = 2^{p-2}$. Wtedy $i + j = 2^{p-1}$, więc

$$d(2a_{2^{p-2}}) = d(2^{p-1}) = p. \tag{1}$$

Wykażemy, że jeśli liczba n ma dokładnie p dodatnich dzielników, gdzie p jest liczbą pierwszą, to $n = q^{p-1}$ dla pewnej liczby pierwszej q. Istotnie, niech q będzie dowolnym dzielnikiem pierwszym n i zapiszmy $n = q^e \cdot m$ dla m niepodzielnego przez q. Wtedy zbiór dzielników liczby n to dokładnie zbiór iloczynów dzielników q^e i dzielników m, więc

$$d(n) = d(q^e) \cdot d(m).$$

Skoro $e \geqslant 1$, to $d(q^e) = e + 1 > 1$. Z pierwszości liczby $d(n) = p$ wynika więc, że $d(m) = 1$, czyli $m = 1$. Ale wtedy $d(n) = d(q^e) = e + 1$, więc $e = p - 1$.

Z równości (1) wnioskujemy, że liczba $2a_{2^{p-2}}$ jest potęgą liczby pierwszej. Liczba ta jest jednak parzysta, skąd wynika, że $2a_{2^{p-2}} = 2^{p-1}$. W rezultacie

$$a_{2^{p-2}} = 2^{p-2}.$$

Skorzystamy teraz z faktu, że dodatnia liczba całkowita ma nieparzystą liczbę dodatnich dzielników wtedy i tylko wtedy, gdy jest kwadratem. Istotnie, dodatnie dzielniki liczby n można pogrupować w pary

$$\left(r, \frac{n}{r}\right), \quad \text{gdzie} \quad r < \sqrt{n}.$$

Jeśli liczba n nie jest kwadratem, pary te obejmują wszystkie dzielniki. Jeśli zaś liczba n jest kwadratem, poza nimi pozostaje dokładnie jeden dzielnik, równy $\sqrt{n}$.

Wykażemy, że ciąg (a_n) jest ściśle rosnący. Przypuśćmy, że $a_i = a_{i+1}$ dla pewnego $i \geqslant 1$. Wybierzmy dodatnią liczbę całkowitą M taką, że $M^2 > i$. Korzystając z warunku zadania, otrzymujemy

$$d(M^2) = d(a_{M^2-i} + a_i) = d(a_{M^2-i} + a_{i+1}) = d(M^2 + 1).$$

Jednak liczba M^2 jest kwadratem, a liczba $M^2 + 1$ nim nie jest, ponieważ

$$M^2 < M^2 + 1 < (M + 1)^2.$$

Zatem liczba $d(M^2)$ jest nieparzysta, a liczba $d(M^2 + 1)$ – parzysta. Otrzymujemy sprzeczność. Ciąg (a_n) jest zatem niemalejący i nie ma równych sąsiednich wyrazów, więc jest ściśle rosnący.

Ustalmy dowolną liczbę naturalną $n \geqslant 1$ i wybierzmy liczbę pierwszą p tak dużą, aby $t = 2^{p-2} > n$. Wiemy już, że $a_t = t$. Skoro ciąg jest ściśle rosnący i ma wyrazy będące liczbami całkowitymi, to

$$t = a_t \geqslant a_n + (t - n),$$

czyli $a_n \leqslant n$. Z drugiej strony dodatniość i ścisły wzrost dają

$$a_n \geqslant a_1 + n - 1 \geqslant n.$$

Łącząc obie nierówności, otrzymujemy $a_n = n$.

Ciąg ten jest niemalejący i spełnia warunek zadania, ponieważ $a_i + a_j = i + j$.

Zadanie 22.

W rzędzie leży 2026 monet, z których każda jest obrócona do góry orłem albo reszką. W jednym ruchu możemy wybrać dowolny ciąg kolejnych monet i obrócić wszystkie z nich. Chcemy po pewnej liczbie ruchów doprowadzić do stanu, w którym wszystkie monety są obrócone do góry reszką. Jaka jest najmniejsza liczba ruchów, po której będziemy w stanie osiągnąć taki stan, niezależnie od początkowego ułożenia monet?

Rozwiązanie: Zauważmy, że niezależnie od początkowego ustawienia możemy otrzymać same reszki w co najwyżej 1013 ruchach. Rzeczywiście, jeśli w rzędzie jest co najmniej 1013 reszek, możemy po prostu obrócić wszystkie orły jeden po drugim, a jeśli reszek jest mniej niż 1013, możemy obrócić reszki jedna po drugiej, a następnie w jednym ruchu obrócić wszystkie monety.

Pozostało wykazać, że może być nam potrzebne 1013 ruchów. Stanie się to, gdy w początkowym układzie reszki i orły są ułożone na zmianę.

Istotnie, rozważmy liczbę par kolejnych monet obróconych w tę samą stronę. Na początku jest ona równa 0, a na końcu musi wynieść 2025. Jeśli obrócimy obie monety z danej pary albo nie obrócimy żadnej z nich, nie zmieni się to, czy pokazują jednakowe strony. Zmiana może więc dotyczyć jedynie par na granicach obracanego fragmentu, których jest co najwyżej dwie. Zatem w jednym ruchu liczba takich par może wzrosnąć o co najwyżej 2. Zatem potrzebujemy co najmniej

$$\left\lceil \frac{2025}{2} \right\rceil = 1013$$

ruchów.

Zadanie 23.

Znajdź wszystkie trójki liczb rzeczywistych x, y, z spełniające układ równań

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 5, \\ x^4 + y^4 + z^4 = 17. \end{cases}$$

Rozwiązanie: Wykażemy, że jedynymi rozwiązaniami są permutacje trójki $(0, 1, 2)$. Nietrudno sprawdzić, że wskazane trójki spełniają ten układ.

Załóżmy więc, że trójka liczb rzeczywistych (x, y, z) spełnia warunki zadania. Z pierwszych dwóch równości wnioskujemy, że

$$9 = (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 5 + 2(xy + yz + zx),$$

więc

$$xy + yz + zx = 2. \tag{1}$$

Mamy również

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^4 + y^4 + z^4 + 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2).$$

Korzystając z równości $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ oraz $x^4 + y^4 + z^4 = 17$, uzyskujemy

$$25 = 17 + 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2),$$

więc

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 4. \tag{2}$$

Z drugiej strony, korzystając z równości (1), uzyskujemy

$$4 = (xy + yz + zx)^2.$$

Po rozwinięciu prawej strony mamy

$$(xy + yz + zx)^2 = x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2xyz(x + y + z).$$

Korzystając z równości (2) oraz z warunku $x + y + z = 3$, otrzymujemy

$$4 = 4 + 6xyz,$$

czyli

$$xyz = 0. \tag{3}$$

Możemy więc bez straty ogólności założyć, że $x = 0$. Wtedy z równości (1) dostajemy

$$yz = 2.$$

W szczególności oznacza to, że liczby y, z są niezerowe. Podstawiając $z = 2/y$ do pierwszego równania wyjściowego układu, otrzymujemy

$$y + \frac{2}{y} = 3,$$

skąd

$$0 = y^2 - 3y + 2 = (y - 1)(y - 2).$$

Oznacza to, że $y = 1$ lub $y = 2$, co prowadzi odpowiednio do $z = 2$ lub $z = 1$. Stąd trójka (x, y, z) jest faktycznie permutacją $(0, 1, 2)$.

Zadanie 24.

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB < AC$, oraz okrąg o opisany na tym trójkącie. Niech D będzie środkiem odcinka AC, a E spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A na bok BC. Prosta DE przecina prostą AB w punkcie F. Punkt H, leżący na łuku BC okręgu o niezawierającym punktu A, spełnia warunek $\sphericalangle BHE = \sphericalangle ABC$. Udowodnij, że $\sphericalangle BHF = 90^\circ$.

Rozwiązanie: Skoro $AB < AC$, to punkty A, B, F leżą w tej kolejności na jednej prostej, a punkt E leży między punktami D i F.

Wykażemy najpierw, że punkty A, E, H, F leżą na jednym okręgu.

Mamy

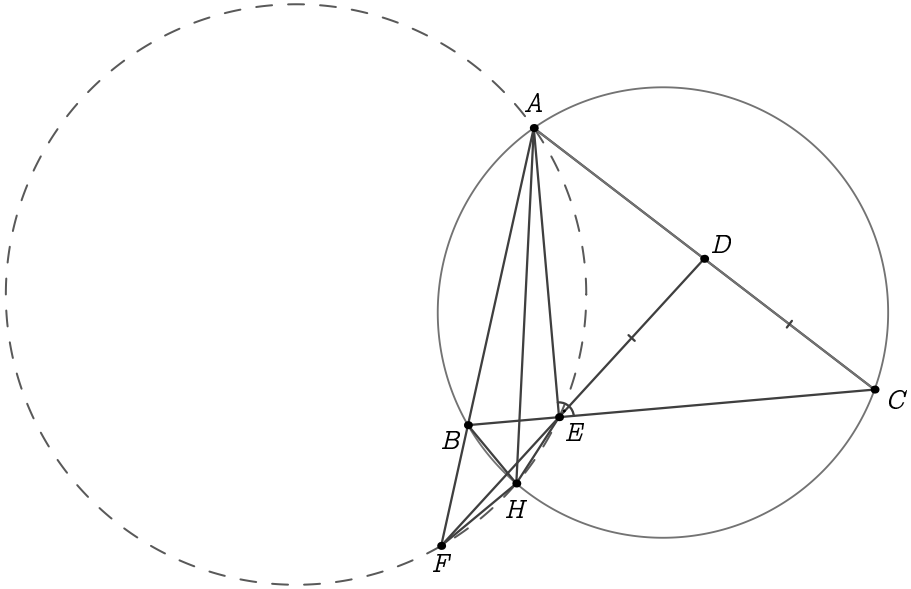
$$\begin{aligned}\sphericalangle FEH = \sphericalangle BEH - \sphericalangle BEF = (180^\circ - \sphericalangle BHE - \sphericalangle EBH) - \sphericalangle CED = \\ = 180^\circ - \sphericalangle ABC - \sphericalangle CAH - \sphericalangle BCA = \sphericalangle BAH = \sphericalangle FAH,\end{aligned}$$

gdzie korzystamy z tego, że $DC = DE$ i że suma kątów w trójkącie ABC to 180°.

Zauważmy teraz, że

$$\sphericalangle AHF = \sphericalangle AEF = 90^\circ + \sphericalangle CED = 90^\circ + \sphericalangle DCE.$$

Ale $\sphericalangle AHB = \sphericalangle ACB$, więc $\sphericalangle BHF = 90^\circ$.



Zadanie 25.

Niech $n > 1$ będzie liczbą całkowitą, a p liczbą pierwszą. Załóżmy, że

$$n \mid p - 1 \quad \text{oraz} \quad p \mid n^4 + n^2 + 1.$$

Udowodnij, że $4p - 3$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie: Zauważmy, że

$$n^4 + n^2 + 1 = (n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1).$$

Skoro p jest liczbą pierwszą, to z założenia wynika, że

$$p \mid n^2 + n + 1 \qquad \text{lub} \qquad p \mid n^2 - n + 1.$$

Zatem dla pewnego wyboru znaku możemy zapisać

$$n^2 \pm n + 1 = pk,$$

gdzie k jest dodatnią liczbą całkowitą.

Wykażemy, że $k = 1$. Z powyższej równości otrzymujemy

$$k - 1 = (n^2 \pm n) - k(p - 1).$$

Oba składniki po prawej stronie są podzielne przez n, więc również

$$n \mid k - 1.$$

Gdyby prawdą było, że $k > 1$, to liczba $k - 1$ byłaby dodatnią wielokrotnością n, a zatem mielibyśmy $k \geqslant n + 1$. Podobnie z założenia $n \mid p - 1$ wynika, że $p \geqslant n + 1$. W rezultacie otrzymalibyśmy

$$n^2 + n + 1 \geqslant n^2 \pm n + 1 = pk \geqslant (n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1,$$

co jest niemożliwe.

Wobec tego $k = 1$, czyli

$$p = n^2 \pm n + 1.$$

Stąd

$$4p - 3 = 4(n^2 \pm n + 1) - 3 = (2n \pm 1)^2.$$

Zatem $4p - 3$ jest kwadratem liczby całkowitej, co kończy dowód.

Zadanie 26.

Dany jest na płaszczyźnie skończony zbiór S złożony z co najmniej trzech punktów i spełniający następujący warunek: dowolne trzy punkty zbioru S można pokryć kołem o promieniu 1. Udowodnij, że cały zbiór S można pokryć kołem o promieniu 1.

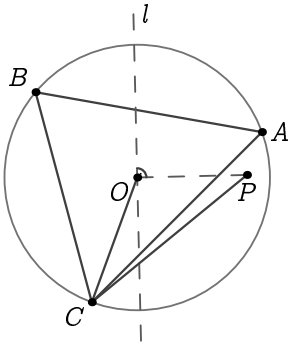
Rozwiązanie: Dla trzech różnych punktów A, B, C oznaczmy przez $d(ABC)$ średnicę najmniejszego koła zawierającego te punkty.

Lemat. Jeśli trójkąt ABC jest ostrokątny, to najmniejszym kołem zawierającym punkty A, B, C jest koło ograniczone okręgiem opisanym na tym trójkącie. Jeśli natomiast trójkąt ABC jest prostokątny lub rozwartokątny, to najmniejszym kołem zawierającym punkty A, B, C jest koło, którego średnicą jest najdłuższy bok tego trójkąta. Dla trzech punktów współliniowych jest to koło o średnicy łączącej dwa punkty o największej odległości. W każdym przypadku najmniejsze koło jest jedyne.

Dowód. Załóżmy najpierw, że trójkąt ABC jest ostrokątny. Niech O i r będą odpowiednio środkiem i promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie. Punkt O leży wtedy wewnątrz trójkąta ABC.

Rozważmy dowolny punkt $P \neq O$. Poprowadźmy przez O prostą l prostopadłą do odcinka OP, jak na rysunku niżej. Skoro punkt O leży wewnątrz trójkąta ABC, to wierzchołki tego trójkąta nie mogą leżeć wszystkie po tej samej stronie prostej l. Zatem co najmniej jeden z nich, powiedzmy C, leży po przeciwnej stronie prostej l niż punkt P. Jeśli punkty P, O, C nie są współliniowe, to kąt POC jest rozwarty i $PC > OC$. W przeciwnym razie punkt O leży między punktami P i C, zatem $PC = PO + OC > OC$. W obu przypadkach $PC > OC = r$.

Oznacza to, że każde koło o środku różnym od O, które zawiera punkty A, B, C, ma promień większy od r. Zatem okrąg opisany na trójkącie ABC wyznacza jedyne najmniejsze koło zawierające te trzy punkty.



Załóżmy teraz, że trójkąt ABC jest prostokątny lub rozwartokątny, i niech AC będzie jego najdłuższym bokiem. Wówczas koło o średnicy AC zawiera wszystkie trzy punkty A, B, C. Z drugiej strony każde koło zawierające punkty A i C musi mieć średnicę co najmniej AC. Stąd koło o średnicy AC jest najmniejszym kołem zawierającym punkty A, B, C i jest ono wyznaczone jednoznacznie. Analogicznie postępujemy w przypadku trzech (różnych) punktów współliniowych, wybierając jako końce średnicy dwa najbardziej oddalone punkty. □

Przechodzimy do uzasadnienia tezy zadania. Spośród wszystkich trójek punktów zbioru S wybierzmy punkty A, B, C tak, aby liczba $d(ABC)$ była największa. Niech K będzie najmniejszym kołem zawierającym te punkty. Wykażemy, że koło K zawiera cały zbiór S. Przypuśćmy przeciwnie, że pewien punkt X ze zbioru S leży poza kołem K.

Przypadek I. Trójkąt ABC jest prostokątny lub rozwartokątny albo punkty A, B, C są współliniowe. Możemy przyjąć, że K jest kołem o średnicy AC. Z wyboru trójki A, B, C mamy $d(AXC) \leqslant d(ABC) = AC$. Jedynym kołem o średnicy niewiększej niż AC, które zawiera punkty A, C, jest jednak K. Zatem najmniejsze koło zawierające A, X, C musi być równe K, co przeczy temu, że $X \notin K$.

Przypadek II. Trójkąt ABC jest ostrokątny. Jeśli jeden z jego wierzchołków, powiedzmy B, należy do trójkąta AXC wraz z jego brzegiem, to najmniejsze koło L zawierające A, X, C zawiera również B. Wobec tego

$$d(ABC) \leqslant d(AXC) \leqslant d(ABC).$$

Z jednoznaczności najmniejszego koła dla trójki A, B, C wynika, że $L = K$. Jest to niemożliwe, ponieważ $X \in L$ i $X \notin K$.

Załóżmy więc, że punkty A, B, C, X wyznaczają czworokąt wypukły. Po ewentualnej zmianie oznaczeń punktów A, B, C możemy przyjąć, że jego wierzchołki występują w kolejności A, C, X, B. Półprosta AX leży wtedy wewnątrz kąta BAC, więc

$$\sphericalangle BAX < 90^\circ, \qquad \sphericalangle CAX < 90^\circ.$$

Niech Y będzie drugim punktem przecięcia prostej AX z okręgiem ograniczającym koło K. Punkt Y leży między A i X. Z twierdzenia o kącie zewnętrznym trójkąta oraz z równości kątów wpisanych otrzymujemy

$$\sphericalangle AXC < \sphericalangle AYC = \sphericalangle ABC < 90^\circ$$

oraz

$$\sphericalangle AXB < \sphericalangle AYB = \sphericalangle ACB < 90^\circ.$$

Przypuśćmy, że któryś z trójkątów ACX, ABX jest ostrokątny. Ze względu na symetrię rozumowania wystarczy rozpatrzyć trójkąt ACX.

Niech O i O' będą środkami okręgów opisanych odpowiednio na trójkątach ABC oraz ACX, a M środkiem odcinka AC. Oba trójkąty są ostrokątne, więc środki okręgów opisanych leżą wewnątrz odpowiednich trójkątów. Skoro punkty B i X leżą po tej samej stronie prostej AC, to punkty O, O' leżą na tej samej półprostej symetralnej odcinka AC, wychodzącej z punktu M.

Z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym oraz z równoramienności trójkątów AOC i $AO'C$ mamy

$$\sphericalangle MCO = 90^\circ - \sphericalangle ABC$$

oraz

$$\sphericalangle MCO' = 90^\circ - \sphericalangle AXC.$$

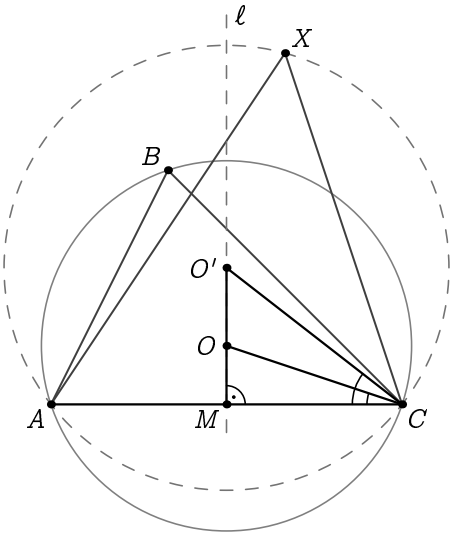
Punkt X leży poza kołem K, więc $\sphericalangle AXC < \sphericalangle ABC$. Stąd $\sphericalangle MCO' > \sphericalangle MCO$, a zatem $MO' > MO$. Z twierdzenia Pitagorasa wynika więc, że

$$CO'^2 = CM^2 + MO'^2 > CM^2 + MO^2 = CO^2.$$

Okrąg opisany na trójkącie ACX ma zatem większy promień niż okrąg opisany na ABC. Na mocy lematu oznacza to, że

$$d(ACX) > d(ABC),$$

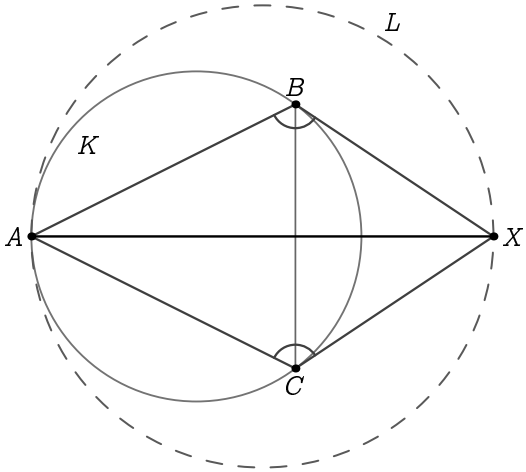
wbrew wyborowi trójki A, B, C.



Pozostaje więc sytuacja, w której oba trójkąty ABX, ACX są nieostrokątne. Skoro ich kąty wewnętrzne przy wierzchołkach A i X są ostre, to $\sphericalangle ABX \geqslant 90^\circ$ oraz $\sphericalangle ACX \geqslant 90^\circ$. Wobec tego koło L o średnicy AX zawiera zarówno B, jak i C, a więc zawiera wszystkie punkty A, B, C. Z lematu oraz wyboru trójki A, B, C otrzymujemy

$$d(ABC) \leqslant AX = d(ABX) \leqslant d(ABC).$$

Ponownie z jednoznaczności najmniejszego koła dla A, B, C wynika, że $L = K$, co przeczy temu, że $X \in L$ i $X \notin K$.



W każdym przypadku otrzymaliśmy sprzeczność. Zatem koło K zawiera cały zbiór S. Z założenia zadania jego promień jest niewiększy niż 1, więc koło o tym samym środku i promieniu 1 również zawiera cały zbiór S. To kończy dowód.

Mecz matematyczny

Zadanie 27.

Anna i Bananna grają w grę, używając $n \geqslant 3$ punktów zaznaczonych na okręgu. W swojej turze gracz musi narysować trójkąt o wierzchołkach w trzech spośród tych punktów, z których żaden nie był dotąd końcem żadnego narysowanego odcinka, przy czym nowo narysowane odcinki nie mogą przecinać żadnych odcinków narysowanych wcześniej. Gracz, który nie może wykonać ruchu, przegrywa. Jeśli Anna wykonuje pierwszy ruch, kto może zagwarantować sobie zwycięstwo?

Rozwiązanie: Anna ma strategię wygrywającą.

To, czy dwie cięciwy o różnych końcach przecinają się, zależy tylko od kolejności ich końców na okręgu, a nie od ich dokładnego położenia. Zatem możemy założyć, że punkty są wierzchołkami n-kąta foremnego.

Przyjmijmy najpierw, że liczba n jest nieparzysta, powiedzmy $n = 2m+1$. Oznaczmy punkty na okręgu kolejno przez

$$A_1, A_2, \ldots, A_m, X, B_m, \ldots, B_1.$$

Niech Anna w pierwszym ruchu wybierze trójkąt A_1XB_1. Pozostałe punkty są symetryczne względem symetralnej l odcinka A_1B_1. Żaden późniejszy ruch nie może zawierać odcinka A_iB_j łączącego dwa niewykorzystane punkty, ponieważ taki odcinek przecina bok A_1X pierwszego trójkąta.

Jeśli zatem sytuacja przed ruchem Bananny jest symetryczna względem prostej l, to w swoim ruchu Bananna musi narysować trójkąt postaci $A_iA_jA_k$ lub $B_iB_jB_k$, a Anna odpowiada, rysując odbicie tego trójkąta względem prostej l.

Z symetrii sytuacji przed ruchem Bananny wynika, że odbity trójkąt ma niewykorzystane wierzchołki i nie przecina wcześniej narysowanych odcinków. Nie przecina też trójkąta właśnie narysowanego przez Banannę, ponieważ oba leżą po przeciwnych stronach osi l.

Anna postępuje zgodnie z tą zasadą, więc po każdym jej ruchu sytuacja znów jest symetryczna względem prostej l. Ma zatem odpowiedź na każdy ruch Bananny. Skoro każdy ruch wykorzystuje trzy nowe punkty, to gra trwa co najwyżej $\lfloor n/3 \rfloor$ ruchów. Musi się więc zakończyć przegraną Bananny.

Jeśli n jest liczbą parzystą, to niech $n = 2m + 2$ i oznaczmy kolejne punkty na okręgu przez

$$A_1, \ldots, A_m, X, B_m, \ldots, B_1, Y.$$

Anna rozpoczyna wtedy od narysowania trójkąta A_1XB_1. Osią symetrii tej konfiguracji jest prosta XY, a odbicie względem niej zamienia A_i z B_i.

Punkt Y nie może zostać wykorzystany w żadnym późniejszym ruchu, ponieważ odcinek łączący go z dowolnym innym niewykorzystanym punktem przecina bok A_1B_1 pierwszego trójkąta. Podobnie jak poprzednio nie można też łączyć niewykorzystanych punktów A_i i B_j.

Anna stosuje więc tę samą strategię, odpowiadając na każdy ruch Bananny jego odbiciem względem prostej XY. Także w tym przypadku zapewnia jej to zwycięstwo.

Zadanie 28.

Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Połowa pól planszy $2n \times 2n$ jest czarna, a połowa biała. Jaś wpisuje w pola planszy liczby $1, 2, \ldots, 4n^2$ w taki sposób, że kolejne liczby znajdują się w polach sąsiadujących krawędzią, a w każdym polu znajduje się dokładnie jedna liczba. Wynikiem Jasia nazwiemy sumę liczb wpisanych w czarne pola. W zależności od n wyznacz największą liczbę W taką, że przy każdym dopuszczalnym pokolorowaniu planszy Jaś może uzyskać wynik co najmniej W.

Rozwiązanie: Wykażemy, że szukana liczba wynosi $2n^2(2n^2+1)$.

Pokolorujmy najpierw planszę we wzór szachownicy. Przy każdym poprawnym ponumerowaniu czarne pola zawierają albo wszystkie liczby parzyste, albo wszystkie liczby nieparzyste. Wynik Jasia nie przekracza więc

$$2 + 4 + \ldots + 4n^2 = 2n^2 \cdot \frac{2 + 4n^2}{2} = 2n^2(2n^2+1).$$

Wykażemy teraz, że przy dowolnym pokolorowaniu planszy Jaś może uzyskać wynik równy co najmniej $2n^2(2n^2+1)$.

Wszystkie pola planszy można ustawić w cykl $P_1, P_2, \ldots, P_{4n^2}$, w którym każde dwa kolejne pola sąsiadują krawędzią – także ostatnie i pierwsze. Taki cykl można otrzymać, przechodząc zygzakiem przez kolejne wiersze z pominięciem pierwszej kolumny. Zaczynamy w drugim polu pierwszego wiersza i idziemy w prawo. Skoro liczba wierszy jest parzysta, to kończymy w drugim polu ostatniego wiersza. Potem przechodzimy do pierwszej kolumny, wracamy nią do góry i zamykamy cykl.

Rozpocznijmy numerowanie cyklu od dowolnego białego pola, tak aby P_1 było białe. Rozważmy dwa ponumerowania planszy. W pierwszym, oznaczonym kolorem niebieskim, w pole P_i wpisujemy liczbę i. W drugim, oznaczonym kolorem czerwonym, w pole P_1 wpisujemy 1, a w pole P_i dla $i > 1$ wpisujemy $4n^2 + 2 - i$.

Oba ponumerowania spełniają warunki zadania. Pierwsze odpowiada przechodzeniu po cyklu w kolejności $P_1, P_2, \ldots, P_{4n^2}$, a drugie w kolejności $P_1, P_{4n^2}, P_{4n^2-1}, \ldots, P_2$.

W każdym polu poza P_1 suma liczby niebieskiej i czerwonej wynosi $4n^2 + 2$. Skoro pole P_1 jest białe, dotyczy to w szczególności wszystkich $2n^2$ czarnych pól. Suma wyników odpowiadających obu ponumerowaniom wynosi zatem $2n^2(4n^2+2)$.

Co najmniej jeden z tych wyników jest więc niemniejszy niż połowa tej sumy, czyli

$$\frac{2n^2(4n^2+2)}{2} = 2n^2(2n^2+1).$$

Uzasadniliśmy zatem, że $W = 2n^2(2n^2+1)$.

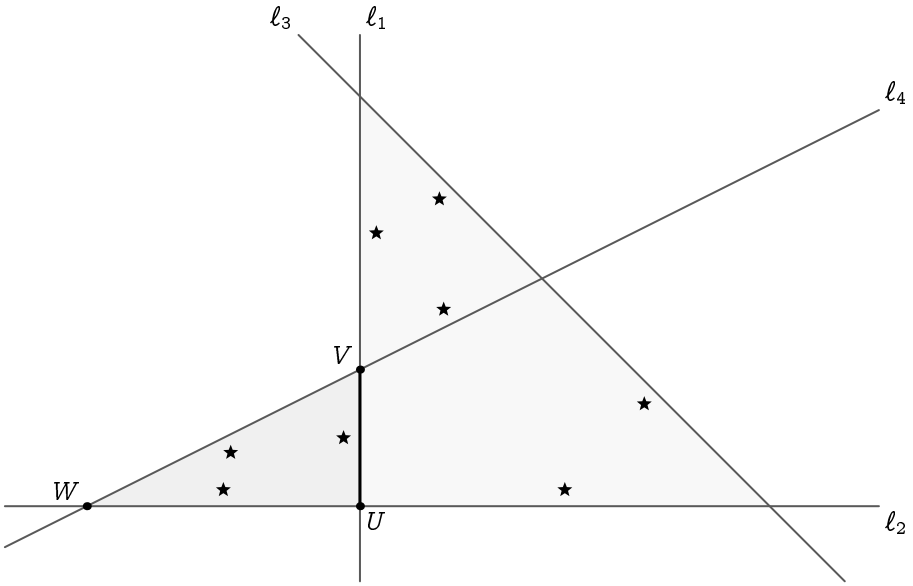
Zadanie 29.

Na płaszczyźnie narysowano $n \geqslant 3$ prostych, z których żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. Proste te dzielą płaszczyznę na pewną liczbę wielokątów oraz pewną liczbę nieograniczonych obszarów. Wykaż, że co najmniej $n-2$ spośród tych wielokątów jest trójkątami.

Rozwiązanie: Każda z danych prostych jest przecinana przez pozostałe w $n-1$ punktach, które dzielą ją na dwie półproste i $n-2$ odcinków. Rozważmy jeden z tych odcinków, o końcach U, V. Niech W będzie punktem przecięcia dwóch pozostałych prostych przechodzących odpowiednio przez U i V. Umieśćmy gwiazdkę dostatecznie blisko środka odcinka UV, po tej samej stronie prostej UV co punkt W, wewnątrz obszaru przylegającego do tego odcinka. Postępujemy tak dla każdego z $n-2$ odcinków na każdej z n prostych. Łącznie rysujemy więc $n(n-2)$ gwiazdek.

Obszar zawierający gwiazdkę umieszczoną przy odcinku UV leży w trójkącie UVW, jest zatem ograniczony. W obszarach nieograniczonych nie ma gwiazdek. Każdy obszar trójkątny zawiera zaś dokładnie trzy gwiazdki, po jednej przy każdym boku.

Na rysunku przedstawiono tę konstrukcję dla czterech prostych. Przy wyróżnionym odcinku UV gwiazdka leży po tej samej stronie prostej UV co punkt W, będący przecięciem dwóch pozostałych prostych przechodzących przez U i V.



Wykażemy, że każdy pozostały obszar ograniczony zawiera co najwyżej dwie gwiazdki. Przypuśćmy, że pewien r-kąt, gdzie $r \geqslant 4$, zawiera co najmniej trzy gwiazdki. Spośród trzech boków, przy których znajdują się te gwiazdki, możemy wybrać dwa niemające wspólnego końca. Oznaczmy je przez AB i CD.

Z konstrukcji gwiazdki przy boku AB wynika, że kąty wielokąta przy A i B są kątami przy podstawie trójkąta wyznaczonego przez prostą AB i proste zawierające dwa sąsiednie boki. Ich suma jest więc mniejsza niż 180°. Analogicznie suma kątów przy C i D jest mniejsza niż 180°. Mamy zatem cztery różne kąty wewnętrzne wielokąta, których suma jest mniejsza niż 360°. Każdy obszar ograniczony jest wielokątem wypukłym, więc każdy z pozostałych kątów jest mniejszy niż 180°. Suma wszystkich kątów rozważanego wielokąta jest zatem mniejsza niż

$$360^\circ + (r-4) \cdot 180^\circ = (r-2) \cdot 180^\circ.$$

Uzyskaliśmy sprzeczność ze wzorem na sumę kątów wewnętrznych r-kąta. Zatem każdy obszar ograniczony, który nie jest trójkątem, zawiera co najwyżej dwie gwiazdki.

Policzmy teraz wszystkie obszary ograniczone, rysując kolejne proste. Po narysowaniu dwóch prostych nie ma jeszcze takich obszarów. Dla $j \geqslant 3$ nowa, j-ta prosta jest podzielona przez poprzednie na dwie półproste i $j-2$ odcinków.

Każdy z tych odcinków rozcina jeden dotychczasowy obszar. Jeśli był on ograniczony, to obie powstałe części są ograniczone. Jeśli był on zaś nieograniczony, to dokładnie jedna część jest ograniczona, zgodnie z wcześniejszą obserwacją o trójkącie UVW. Każdy odcinek zwiększa więc liczbę obszarów ograniczonych o jeden. Dwie półproste dzielą natomiast obszary nieograniczone na obszary nieograniczone, więc nie zmieniają tej liczby. Łączna liczba obszarów ograniczonych wynosi zatem

$$1 + 2 + \ldots + (n-2) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Niech T oznacza liczbę obszarów trójkątnych. Każdy z nich zawiera trzy gwiazdki, a każdy pozostały obszar ograniczony zawiera co najwyżej dwie gwiazdki. W rezultacie liczba wszystkich gwiazdek nie przekracza

$$3T + 2\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2} - T\right) = (n-1)(n-2) + T.$$

Z drugiej strony narysowaliśmy dokładnie $n(n-2)$ gwiazdek. Wobec tego

$$n(n-2) \leqslant (n-1)(n-2) + T,$$

czyli po uproszczeniu: $T \geqslant n-2$. Dowód jest więc zakończony.

Zadanie 30.

Znajdź wszystkie pary liczb pierwszych p, q takie, że liczby $p - q$ oraz $pq - q$ są kwadratami liczb całkowitych.

Rozwiązanie: Para $(p, q) = (3, 2)$ spełnia warunki zadania, ponieważ $3 - 2 = 1$ oraz $3 \cdot 2 - 2 = 4$. Wykażemy, że jest to jedyna taka para.

Załóżmy, że liczby pierwsze p, q spełniają warunki zadania. Skoro liczba $q(p-1)$ jest kwadratem podzielnym przez liczbę pierwszą q, to pierwiastek tej liczby, będący liczbą całkowitą, jest podzielny przez q. Mamy więc

$$q(p-1) = (bq)^2$$

dla pewnej dodatniej liczby całkowitej b. Stąd

$$p = b^2 q + 1 > q,$$

a zatem $p - q = a^2$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej a.

Jeśli $b = 1$, to $p = q + 1$. Jedynymi dwiema kolejnymi liczbami całkowitymi, które są pierwsze, są 2 i 3. Otrzymujemy więc $(p, q) = (3, 2)$.

Przypuśćmy teraz, że $b > 1$. Z równości $a^2 = p - q = q(b^2 - 1) + 1$ wynika, że

$$a^2 - b^2 = (q-1)(b^2-1) > 0,$$

czyli $a > b$. Ponadto

$$a^2 b^2 - 1 = b^2(p-q) - 1 = b^2 p - (p-1) - 1 = p(b^2-1).$$

Zatem

$$p(b^2-1) = (ab-1)(ab+1).$$

Skoro p jest liczbą pierwszą, to dzieli co najmniej jeden z czynników $ab - 1$, $ab + 1$. Jednak $a > b > 1$, więc

$$ab - 1 > b^2 - 1 > 0$$

i w konsekwencji

$$p = \frac{(ab-1)(ab+1)}{b^2-1} > ab + 1 > ab - 1 > 1.$$

Oba czynniki są dodatnie i mniejsze od p, więc żaden nie może być podzielny przez p. Otrzymujemy sprzeczność.

Wobec tego $b = 1$, a jedyną parą spełniającą warunki zadania jest $(p, q) = (3, 2)$.

Zadanie 31.

Wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych $m, n > 1$, dla których każda z liczb

$$1^n - 1,\ 2^n - 1,\ \ldots,\ n^n - 1$$

jest podzielna przez m.

Rozwiązanie:

Odpowiedzią są wszystkie pary postaci

$$(m, n) = (p, p - 1),$$

gdzie p jest nieparzystą liczbą pierwszą. Istotnie, z małego twierdzenia Fermata wynika, że dowolna taka para spełnia warunki zadania. Pozostaje więc pokazać, że innych par nie ma.

Sposób I. Załóżmy, że para (m, n) spełnia warunki zadania. Wówczas dzielnik pierwszy p liczby m jest większy od n. Gdybyśmy bowiem mieli $p \leqslant n$, to z założenia wynikałoby także, że $p \mid p^n - 1$, co jest niemożliwe. W szczególności $\mathrm{NWD}(m, n!) = 1$. Wykażemy teraz, że

$$m \mid \frac{n!(n+1)}{2}.$$

W tym celu policzmy na dwa sposoby liczbę T rozmieszczeń n ponumerowanych kul w n ponumerowanych pudełkach, w których każde z pierwszych $n - 1$ pudełek jest niepuste. Ostatnie pudełko może być puste.

Jeśli wszystkie pudełka są niepuste, to w każdym znajduje się dokładnie jedna kula. Takich rozmieszczeń jest $n!$. Jeśli ostatnie pudełko jest puste, to jedno z pozostałych pudełek zawiera dwie kule, a każde inne pudełko zawiera po jednej kuli.

Parę kul znajdujących się razem w pudełku wybrać możemy na $\binom{n}{2}$ sposobów. Następnie tę parę i pozostałe pojedyncze kule rozłożyć możemy w $n - 1$ pudełkach na $(n - 1)!$ sposobów. Stąd

$$T = n! + \binom{n}{2}(n-1)! = \frac{n!(n+1)}{2}.$$

Obliczmy teraz liczbę T w inny sposób. Przypomnijmy, że zliczamy różne rozmieszczenia n ponumerowanych kul w n ponumerowanych pudełkach, w których każde z pierwszych $n - 1$ pudełek jest niepuste. Ostatnie pudełko może być puste. Bez warunku niepustości mielibyśmy n^n rozmieszczeń: dla każdej kuli niezależnie wybieramy jedno z n pudełek. Musimy jednak wykluczyć rozmieszczenia, w których co najmniej jedno z pierwszych $n - 1$ pudełek jest puste.

Dla każdego z tych pudełek odejmijmy liczbę rozmieszczeń, w których jest ono puste. Każdą kulę możemy wtedy umieścić w jednym z pozostałych $n-1$ pudełek, więc odejmujemy łącznie

$$\binom{n-1}{1}(n-1)^n.$$

Rozmieszczenie, w którym dokładnie dwa spośród pierwszych $n-1$ pudełek są puste, policzyliśmy początkowo raz, a następnie odjęliśmy dwukrotnie. Trzeba więc dodać je z powrotem.

Dodajemy zatem liczbę takich rozmieszczeń, w których puste są dwa wskazane pudełka spośród pierwszych $n-1$. Parę pudełek wybieramy na $\binom{n-1}{2}$ sposobów, a kule rozmieszczamy w pozostałych pudełkach na $(n-2)^n$ sposobów. Liczba rozmieszczeń jest więc równa

$$\binom{n-1}{2}(n-2)^n.$$

Następnie odejmujemy łączną liczbę rozmieszczeń z trzema wskazanymi pustymi pudełkami, dodajemy łączną liczbę rozmieszczeń z czterema wskazanymi pustymi pudełkami i tak dalej, aż do wyboru wszystkich pierwszych $n-1$ pudełek. Innymi słowy, obliczamy liczbę T, stosując tak zwaną *zasadę włączeń i wyłączeń.*

Otrzymujemy

$$T = n^n - \binom{n-1}{1}(n-1)^n + \binom{n-1}{2}(n-2)^n - \ldots + (-1)^{n-1}1^n.$$

Zauważmy też, że dla $n > 1$ ze wzoru dwumianowego Newtona mamy

$$1 - \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} - \ldots + (-1)^{n-1} = (1-1)^{n-1} = 0.$$

Suma współczynników stojących przy potęgach we wzorze na T jest więc równa zeru. Możemy zatem zastąpić każdą potęgę liczbą o jeden mniejszą, nie zmieniając wartości całego wyrażenia:

$$\begin{aligned} T = (n^n - 1) &- \binom{n-1}{1}\big((n-1)^n - 1\big) \\ &+ \binom{n-1}{2}\big((n-2)^n - 1\big) - \ldots + (-1)^{n-1}(1^n - 1). \end{aligned}$$

Każda liczba w nawiasie jest podzielna przez m na mocy założenia z treści zadania. Wobec tego również liczba T jest podzielna przez m. Stąd

$$m \mid \frac{n!(n+1)}{2}.$$

W szczególności uzyskujemy stąd $m \mid n!(n+1)$. Skoro jednak $\mathrm{NWD}(m, n!) = 1$, to $m \mid n+1$. Wybierzmy dowolny dzielnik pierwszy p liczby m. Wiemy już, że $p > n$. Jednocześnie $p \mid m$ oraz $m \mid n+1$, więc

$$n+1 \leqslant p \leqslant m \leqslant n+1.$$

Stąd $m = p = n+1$. Wreszcie, skoro $n > 1$, to liczba pierwsza p jest nieparzysta.

Sposób II. Będziemy potrzebowali następującego faktu.

Lemat. Niech p będzie liczbą pierwszą oraz niech $r \leqslant p$ będzie dodatnią liczbą całkowitą. Załóżmy, że wielomian F o współczynnikach całkowitych spełnia

$$\deg F \leqslant r-1 \quad \text{oraz} \quad F(1) \equiv F(2) \equiv \ldots \equiv F(r) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Wtedy wszystkie współczynniki wielomianu F są podzielne przez p.

Dowód. Przeprowadzimy indukcję względem r. Dla $r = 1$ mamy $F = a_0$, a z warunku $F(1) \equiv 0 \pmod{p}$ wynika od razu, że $p \mid a_0$.

Niech $r \geqslant 2$. Załóżmy, że lemat jest już udowodniony dla $r-1$. Dzieląc z resztą wielomian F przez $x-r$, otrzymujemy

$$F(x) = G(x)(x-r) + F(r), \tag{1}$$

gdzie wielomian G także ma współczynniki całkowite. Skoro $F(r) \equiv 0 \pmod{p}$, to

$$F(x) \equiv (x-r)G(x) \pmod{p}.$$

W szczególności dla $k = 1, 2, \ldots, r-1$ dostajemy

$$0 \equiv F(k) \equiv (k-r)G(k) \pmod{p}, \quad \text{więc} \quad G(k) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Jasne jest również, że wielomian G jest stopnia co najwyżej $r-2$. Stosując założenie indukcyjne do tego wielomianu, otrzymujemy, że wszystkie jego współczynniki są podzielne przez p. W takim razie wszystkie współczynniki wielomianu $(x-r)G(x)$ są podzielne przez p. Ponadto $p \mid F(r)$, więc z równania (1) otrzymujemy, że również $F(x)$ ma wszystkie współczynniki podzielne przez p, co kończy dowód lematu.

□

Przechodzimy teraz do rozwiązania zadania. Niech p będzie dowolnym dzielnikiem pierwszym liczby m. Wtedy dla dowolnego $a = 1, \ldots, n$ mamy

$$a^n \equiv 1 \pmod{p}. \tag{2}$$

Najpierw zauważmy, że $p \geqslant n+1$. Gdyby bowiem $p \leqslant n$, to w (2) moglibyśmy przyjąć $a = p$, otrzymując $p^n \equiv 1 \pmod{p}$, co jest niemożliwe.

Rozpatrzmy teraz wielomian

$$F(x) = x^n - 1 - (x-1)\ldots(x-n).$$

Jego stopień to co najwyżej $n-1$, ponieważ jednomiany najwyższego stopnia w x^n-1 i w $(x-1)\ldots(x-n)$ się redukują. Z drugiej strony dla $a = 1, 2, \ldots, n$ mamy

$$F(a) = a^n - 1 - 0 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Możemy więc zastosować nasz lemat. Otrzymujemy wtedy, że wszystkie współczynniki wielomianu F są podzielne przez p. Zauważmy teraz, że

$$(x-1)(x-2)\ldots(x-n) = x^n - (1+2+\ldots+n)x^{n-1} + \ldots.$$

Oznacza to, że współczynnik przy x^{n-1} w F jest równy

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Z naszej wcześniejszej obserwacji dostajemy więc, że

$$p \mid \frac{n(n+1)}{2}.$$

Z drugiej strony $p > n > 1$, więc $p \nmid n$ oraz $p \neq 2$. W takim razie uzyskujemy $p \mid n+1$, czyli w szczególności $p \leqslant n+1$. Stąd $n+1 \geqslant p \geqslant n+1$, więc $p = n+1$.

W rezultacie para (m, n) jest postaci $(p^k, p-1)$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej k. Pozostaje wykazać, że $k = 1$.

Przypuśćmy przeciwnie, że $k \geqslant 2$. Skoro $p^2 \mid m$, to z warunku z treści zadania dla $a = n = p-1$ otrzymujemy

$$p^2 \mid (p-1)^{p-1} - 1.$$

Korzystając ze wzoru dwumianowego, otrzymujemy

$$(-1+p)^{p-1} \equiv (-1)^{p-1} + (p-1)\cdot p \cdot (-1)^{p-2} = 1 - p(p-1) \equiv 1 + p \pmod{p^2}.$$

Wobec tego

$$(p-1)^{p-1} - 1 \equiv p \not\equiv 0 \pmod{p^2},$$

co przeczy otrzymanej podzielności przez p^2. Zatem $k = 1$, co kończy dowód.

Zadanie 32.

Na tablicy napisana jest liczba 2026. Jeżeli na tablicy znajduje się liczba postaci $a^k + b^k$ dla pewnych dodatnich liczb całkowitych a, b, k, to możemy dopisać do tablicy liczbę $a^l + b^l$ dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej l. Znajdź wszystkie liczby, które mogą pojawić się na tablicy po pewnej liczbie takich ruchów.

Rozwiązanie:

Odpowiedzią są wszystkie parzyste liczby całkowite większe od 2.

Najpierw wykażemy, że nie można uzyskać żadnej innej liczby. Jeśli liczba $a^k + b^k$ jest parzysta, to liczby a i b są tej samej parzystości, więc dla każdej dodatniej liczby całkowitej l liczba $a^l + b^l$ również jest parzysta. W takim razie na tablicy nie otrzymamy nigdy liczby nieparzystej.

Jasne jest, że każda otrzymana na tablicy liczba musi być dodatnia. Ponadto liczba 2 nie może zostać dopisana. Istotnie, jeśli $a^l + b^l = 2$, to $a = b = 1$. Wtedy jednak również $a^k + b^k = 2$, czyli żeby dopisać liczbę 2, liczba 2 już musiałaby się pojawić wcześniej na tablicy. Ponieważ na początku zapisana jest jedynie liczba 2026, więc liczba 2 nigdy się nie pojawi.

Pozostaje wykazać, że każdą parzystą liczbę całkowitą większą niż 2 można rzeczywiście dopisać do tablicy. Zauważmy najpierw, że jeśli z pewnej liczby m można przejść do liczby n, to możemy również przejść z liczby n do liczby m. Dwie liczby nazwiemy *połączonymi*, jeśli można przejść od jednej do drugiej, wykonując skończoną liczbę dozwolonych operacji.

Mamy tożsamość

$$(3n + 4)^2 + (n - 2)^2 = (3n + 2)^2 + (n + 4)^2.$$

Wynika z niej, że dla $n \geqslant 3$ liczby $4n + 2$ oraz $4n + 6$ są ze sobą połączone. Istotnie $(3n + 4) + (n - 2) = 4n + 2$ oraz $(3n + 2) + (n + 4) = 4n + 6$. Oznacza to, że liczby $14, 18, 22, \ldots$ są ze sobą połączone. Niech $m \geqslant 6$ będzie teraz dowolną liczbą parzystą. Wtedy m jest połączone z

$$(m - 1)^2 + 1 \equiv 2 \pmod 4.$$

Zauważmy również, że $(m - 1)^2 + 1 \geqslant 26 > 14$, więc jest połączone z liczbami $14, 18, 22, \ldots$. Wnioskujemy, że wszystkie liczby parzyste niemniejsze niż 6 są ze sobą połączone. Zauważmy wreszcie, że liczba $4 = 2 + 2$ jest połączona z $2^2 + 2^2 = 8$. Łącząc wszystkie te obserwacje, stwierdzamy, że wszystkie parzyste liczby całkowite większe od 2 są ze sobą połączone, co kończy dowód.

Zadanie 33.

Niech n będzie nieujemną liczbą całkowitą, a $a_0, a_1, \ldots, a_n$ liczbami rzeczywistymi. Wykaż, że istnieje taka nieujemna liczba całkowita $k \leqslant n$, że nierówność

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \leqslant a_0 + a_1 + \ldots + a_k$$

jest spełniona dla dowolnej liczby rzeczywistej x z przedziału $[0, 1]$.

Rozwiązanie:

Chcemy więc udowodnić, że dla każdego $x \in [0, 1]$ zachodzi

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \leqslant \max_{0 \leqslant k \leqslant n} (a_0 + a_1 + \ldots + a_k). \tag{1}$$

Będziemy korzystać z następującej prostej obserwacji. Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b oraz dowolnego $x \in [0, 1]$ mamy

$$a + bx \leqslant \max(a, a + b). \tag{2}$$

Istotnie,

$$a + bx = (1 - x)a + x(a + b),$$

czyli liczba $a + bx$ jest średnią ważoną liczb a oraz $a + b$. Nie może więc być większa od obu z nich.

Udowodnimy teraz nierówność (1) przez indukcję względem n. Dla $n = 0$ nierówność jest oczywista, ponieważ obie jej strony są równe a_0. Załóżmy, że $n \geqslant 1$ i nierówność (1) zachodzi dla $n - 1$.

Niech

$$M = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} (a_1 + a_2 + \ldots + a_k).$$

Stosując założenie indukcyjne do współczynników $a_1, \ldots, a_n$, otrzymujemy

$$a_1 + a_2 x + \ldots + a_n x^{n-1} \leqslant M.$$

Skoro $x \geqslant 0$, to po pomnożeniu przez x i dodaniu a_0 dostajemy

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \leqslant a_0 + xM.$$

Następnie z obserwacji (2) wnioskujemy, że

$$a_0 + xM \leqslant \max(a_0, a_0 + M).$$

Pozostaje zauważyć, że

$$a_0 + M = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} (a_0 + a_1 + \ldots + a_k).$$

Zatem

$$\max(a_0, a_0 + M) = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} (a_0 + a_1 + \ldots + a_k).$$

W konsekwencji

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \leqslant \max_{0 \leqslant k \leqslant n} (a_0 + a_1 + \ldots + a_k),$$

co kończy krok indukcyjny. Zatem nierówność (1) zachodzi dla wszystkich $n \geqslant 0$. Wybierzmy indeks k, dla którego suma $a_0 + \ldots + a_k$ jest największa. Nierówność (1) pokazuje, że ten sam indeks k spełnia warunek zadania dla wszystkich $x \in [0, 1]$.

Zadanie 34.

Parami różne liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunki

$$a + b + c = 0 \qquad \text{oraz} \qquad a^2 - b = b^2 - c = c^2 - a.$$

Wykaż, że

$$ab + bc + ca = -3.$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy wspólną wartość wyrażeń $a^2 - b$, $b^2 - c$, $c^2 - a$ przez k. Mamy więc

$$k = a^2 - b = b^2 - c = c^2 - a.$$

Z danych równości otrzymujemy

$$(a - b)(a + b) = b - c, \qquad (b - c)(b + c) = c - a, \qquad (c - a)(c + a) = a - b.$$

Mnożąc je teraz stronami, uzyskujemy

$$(a - b)(b - c)(c - a)(a + b)(b + c)(c + a) = (b - c)(c - a)(a - b).$$

Skoro liczby a, b, c są parami różne, mamy

$$(a - b)(b - c)(c - a) \neq 0,$$

więc możemy podzielić przez ten iloczyn. Otrzymujemy wtedy

$$(a+b)(b+c)(c+a) = 1. \tag{1}$$

Z warunku $a+b+c=0$ mamy

$$a+b=-c, \qquad b+c=-a, \qquad c+a=-b.$$

Stąd równość (1) przyjmuje postać

$$1 = (-c)(-a)(-b) = -abc. \tag{2}$$

Korzystając z definicji k oraz z warunku $a+b+c=0$, mamy

$$\begin{aligned} 0 = k(a+b+c) &= a(a^2-b)+b(b^2-c)+c(c^2-a) \\ &= a^3+b^3+c^3-(ab+bc+ca). \end{aligned}$$

Zatem

$$ab+bc+ca = a^3+b^3+c^3. \tag{3}$$

Korzystając z tożsamości

$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

oraz z warunku $a+b+c=0$, otrzymujemy

$$a^3+b^3+c^3 = 3abc. \tag{4}$$

Łącząc teraz równości (2), (3) i (4), uzyskujemy, że

$$ab+bc+ca = 3abc = -3,$$

co kończy dowód.

Zadanie 35.

Czy możliwe jest pokolorowanie każdej z liczb

$$1+\sqrt{2},\ 1+2\sqrt{2},\ \ldots,\ 1+2026\sqrt{2}$$

na żółto albo zielono tak, aby iloczyn wszystkich liczb żółtych miał taką samą część ułamkową jak iloczyn wszystkich liczb zielonych?

Rozwiązanie: Wykażemy, że takie kolorowanie nie istnieje.

Przypuśćmy nie wprost, że udało się podzielić dane liczby na żółte i zielone, spełniając tym samym warunek z treści zadania. Oznaczmy przez $a_1, \ldots, a_k$ współczynniki przy $\sqrt{2}$ w liczbach żółtych, a przez $b_1, \ldots, b_l$ odpowiednie współczynniki w liczbach zielonych.

Wtedy iloczyn wszystkich liczb żółtych możemy zapisać jako

$$(1 + a_1\sqrt{2}) \ldots (1 + a_k\sqrt{2}) = C + D\sqrt{2},$$

gdzie C, D są liczbami całkowitymi. Zauważmy, że

$$D \equiv a_1 + a_2 + \ldots + a_k \pmod 2. \tag{1}$$

Istotnie, po wymnożeniu nawiasów współczynnik przy $\sqrt{2}$ powstaje z tych składników, w których wybrano nieparzystą liczbę czynników postaci $a_i\sqrt{2}$. Składniki z dokładnie jednym takim czynnikiem dają sumę $a_1 + \ldots + a_k$. Natomiast każdy składnik z co najmniej trzema takimi czynnikami zawiera dodatkowy czynnik $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$, więc nie wpływa na parzystość liczby D. Analogicznie możemy zapisać

$$(1 + b_1\sqrt{2}) \ldots (1 + b_l\sqrt{2}) = E + F\sqrt{2},$$

gdzie E, F są liczbami całkowitymi oraz

$$F \equiv b_1 + b_2 + \ldots + b_l \pmod 2. \tag{2}$$

Z założenia iloczyny liczb w obu grupach mają tę samą część ułamkową. Ich różnica jest więc liczbą całkowitą. Otrzymujemy zatem

$$(C + D\sqrt{2}) - (E + F\sqrt{2}) \in \mathbb{Z}.$$

Skoro liczba $C - E$ jest całkowita, to również $(D - F)\sqrt{2}$ musi być liczbą całkowitą. Z niewymierności $\sqrt{2}$ wynika więc, że $D = F$. W szczególności liczba $D + F = 2D$ jest parzysta.

Z drugiej strony, korzystając z kongruencji (1) i (2), uzyskujemy

$$D + F \equiv a_1 + \ldots + a_k + b_1 + \ldots + b_l = 1 + 2 + \ldots + 2026 \pmod 2.$$

Zauważmy jednak, że

$$1 + 2 + \ldots + 2026 = \frac{2026 \cdot 2027}{2} = 1013 \cdot 2027$$

jest liczbą nieparzystą. Zatem liczba $D + F$ jest nieparzysta, co przeczy wcześniejszemu wnioskowi, że jest to liczba parzysta. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że żądane kolorowanie nie istnieje.

Zadanie 36.

W trójkącie ostrokątnym ABC spełniony jest warunek $AB < AC$. Na krótszym łuku BC okręgu opisanego na trójkącie ABC wybrano punkty X, Y tak, aby punkty B, X, Y, C występowały na tym łuku w podanej kolejności oraz

$$BX = XY = YC.$$

Na odcinku AY wybrano punkt N spełniający warunek

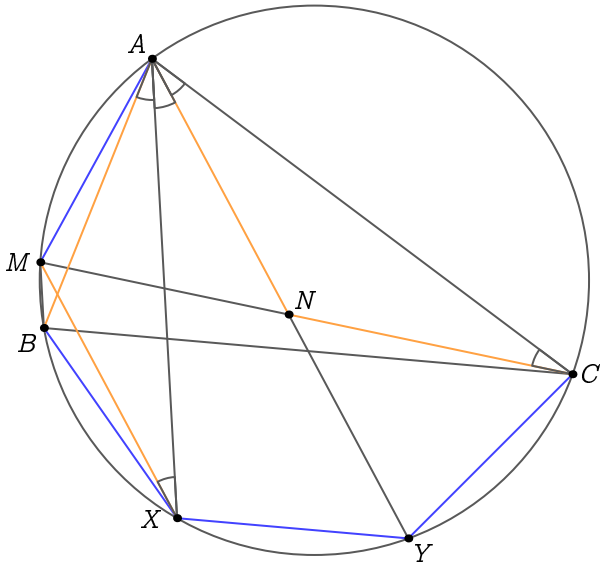
$$AB = AN = CN.$$

Wykaż, że prosta CN przechodzi przez środek odcinka AX.

Rozwiązanie: Niech M będzie drugim punktem przecięcia prostej CN z okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Zauważmy, że z warunków zadania mamy równości

$$\sphericalangle BAX = \sphericalangle YAC = \sphericalangle NAC = \sphericalangle NCA = \sphericalangle MCA = \sphericalangle MBA,$$

czyli proste MB i AX są równoległe, a czworokąt $MBXA$ jest trapezem równoramiennym. Wynika z tego, że $MX = AB = AN$. Z równości $AM = BX = XY$ wnioskujemy zaś, że $\sphericalangle XAY = \sphericalangle MXA$, czyli proste MX i AY są równoległe. Skoro więc odcinki MX i AN są równe i równoległe, to czwórka punktów A, N, X, M tworzy równoległobok, czyli prosta MN połowi odcinek AX.



Zadanie 37.

W trójkącie ABC, w którym $AC = BC$, dwusieczna kąta przy wierzchołku B przecina bok AC w punkcie D. Prosta prostopadła do BD, przechodząca przez środek okręgu opisanego na trójkącie ABC, przecina bok BC w punkcie E. Prosta przechodząca przez E i równoległa do BD przecina bok AC w punkcie F. Wykaż, że

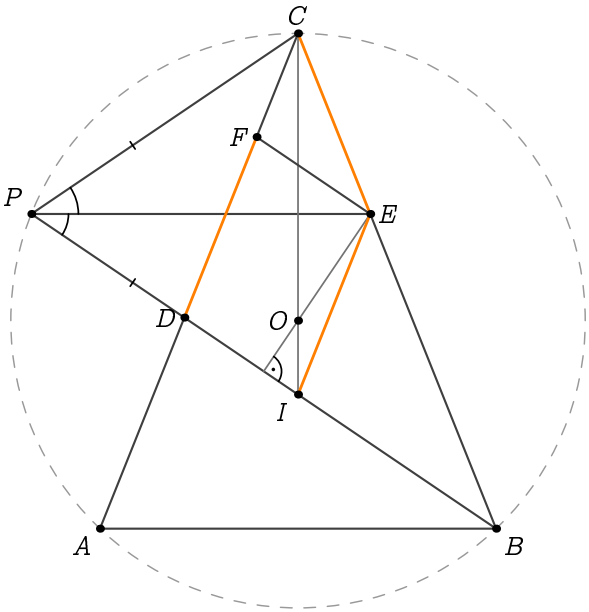
$$CE = FD.$$

Rozwiązanie: Niech O i I będą odpowiednio środkami okręgu opisanego i okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Niech P będzie drugim punktem przecięcia prostej BD z okręgiem opisanym. Przyjmijmy, że $\alpha = \sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC$. Wówczas $\sphericalangle CPI = \alpha$ oraz $\sphericalangle PIC = 180^\circ - \sphericalangle BIC$. Trójkąt PCI jest więc równoramienny i $PC = PI$. Prosta OE jest symetralną cięciwy BP, zatem $EB = EP$. Stąd

$$\sphericalangle IPE = \sphericalangle BPE = \sphericalangle PBE = \frac{\alpha}{2}.$$

Zatem prosta PE jest dwusieczną kąta IPC w trójkącie równoramiennym PCI, czyli także symetralną odcinka CI. W konsekwencji $CE = IE$.

Skoro prosta CI jest dwusieczną kąta ACB, to $\sphericalangle CIE = \sphericalangle ICE = \sphericalangle ACI$, czyli $IE \parallel AC$. Zatem $IE \parallel DF$. Oczywiście także $EF \parallel DI$, więc czworokąt $DIEF$ jest równoległobokiem. Stąd $CE = IE = FD$, co kończy dowód.



Zadanie 38.

Okręgi o_1 i o_2 o środkach odpowiednio w punktach O_1 i O_2 przecinają się w punktach A i B, przy czym $\sphericalangle O_1BO_2 > 90^\circ$. Półproste O_1B i O_2B przecinają okręgi o_2 i o_1 po raz drugi odpowiednio w punktach E i F. Przez punkt B prowadzimy prostą równoległą do prostej EF, która przecina okręgi o_1 i o_2 po raz drugi odpowiednio w punktach M i N. Wykaż, że

$$MN = AE + AF.$$

Rozwiązanie: Z założenia $\sphericalangle O_1BO_2 > 90^\circ$ wynika, że punkt B leży zarówno między punktami O_1 i E, jak i między punktami O_2 i F. W szczególności $\sphericalangle EBF > 90^\circ$. Nietrudno również uzasadnić, że punkt B leży między punktami M i N.

Prosta O_1O_2 jest symetralną odcinka AB, więc

$$\sphericalangle AO_1O_2 = \frac{1}{2}\sphericalangle AO_1B = \sphericalangle AFB = \sphericalangle AFO_2.$$

Stąd punkt F leży na okręgu opisanym na trójkącie AO_1O_2. Analogicznie wykazujemy, że punkt E leży na tym samym okręgu. Skoro $AO_1 = O_1F$ oraz $EF \parallel MN$, to $\sphericalangle AEO_1 = \sphericalangle O_1EF = \sphericalangle EBN$. Skoro zaś punkty A, B, E, N leżą na okręgu o_2, a punkty E, B, O_1 są współliniowe, to

$$\sphericalangle ANB = \sphericalangle AEB = \sphericalangle EBN.$$

Zatem proste AN oraz BE są równoległe. Czworokąt $ABEN$ jest więc trapezem wpisanym w okrąg, a zatem także trapezem równoramiennym. Jego przekątne są równe, czyli $AE = BN$. Analogicznie otrzymujemy $AF = BM$. Skoro punkt B leży między punktami M i N, to $MN = BM + BN = AF + AE$, co kończy dowód.

