STOWARZYSZENIE NA RZECZ EDUKACJI MATEMATYCZNEJ

KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ GIMNAZJALISTÓW

# Obóz Naukowy

## Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

**poziom OMG**

2013 ROK

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Publikacja współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

STOWARZYSZENIE NA RZECZ EDUKACJI MATEMATYCZNEJ
KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ GIMNAZJALISTÓW

# Obóz Naukowy
## Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

## Poziom OMG
## 2013 rok

WARSZAWA 2014

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Publikacja współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

**Autorzy rozwiązań:** Szymon Kanonowicz, Michał Kieza, Jarosław Wróblewski

**Recenzent:** dr Joanna Jaszuńska

**Skład komputerowy:** Łukasz Bożyk, Jarosław Wróblewski

**Rysunki:** Łukasz Bożyk, Jarosław Wróblewski

**Projekt okładki:** Adam Klemens

**ISBN 978-83-63288-05-1**

**Nakład:** 3000 egz.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Instytut Matematyczny PAN
ul. Śniadeckich 8
00-656 Warszawa

`www.omg.edu.pl`

EGZEMPLARZ BEZPŁATNY

# Wstęp

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów odbył się po raz pierwszy w 2011 r. Zakwalifikowano na niego 20 najlepszych laureatów VI edycji OMG (2010/2011) z młodszych klas gimnazjum. Uczestnicy Obozu rywalizowali ze sobą w codziennych zawodach indywidualnych, rozegrali mecz matematyczny (regulamin meczu znajduje się na końcu niniejszej broszury), a także mieli okazję wysłuchać wielu odczytów o tematyce olimpijskiej.

Od 2012 roku Komitet Główny OMG organizuje dwa Obozy Naukowe. Pierwszy z nich (poziom OM) przeznaczony jest dla laureatów OMG z klas trzecich gimnazjum, którzy kończą swoje zmagania z OMG, a rozpoczynają z OM, czyli Olimpiadą Matematyczną na poziomie ponadgimnazjalnym. Drugi Obóz (poziom OMG) przeznaczony jest dla młodszych gimnazjalistów. Każdy z Obozów trwa tydzień, a kwalifikacja przeprowadzana jest na podstawie wyników uzyskanych na finale OMG.

Niniejszy zeszyt zawiera wszystkie zadania (wraz z rozwiązaniami) z Obozu na poziomie OMG, który odbył się w dniach 2–8 czerwca 2013 roku w miejscowości Perzanowo (woj. mazowieckie), w gospodarstwie agroturystycznym *Relax*. Wzięło w nim udział następujących 20 uczniów — młodszych klas gimnazjum, wyłonionych na podstawie wyników uzyskanych na zawodach trzeciego stopnia VIII edycji OMG (2012/2013):

*Jakub Brojacz, Michał Chojnowski, Kacper Czaczyk, Maciej Dziuba, Mikołaj Kamiński, Adrian Koźluk, Jan Lebioda, Mateusz Mikusiński, Wojciech Mitros, Jan Olkowski, Paweł Paradysz, Juliusz Pham, Paweł Poczobut, Jakub Różycki, Filip Smoleński, Szymon Stolarczyk, Franciszek Szarwacki, Mariusz Trela, Mateusz Trubiłowicz oraz Maciej Walkowiak.*

Kadrę obozu stanowili:

*Jerzy Bednarczuk, Sylwester Błaszczuk, Szymon Kanonowicz, Jakub Mrożek, Jarosław Wróblewski oraz Bartłomiej Żak.*

Mamy nadzieję, że publikacja zadań z Obozu wraz z pełnymi rozwiązaniami pozwoli większej liczbie uczniów zapoznać się z nimi i będzie stanowić cenny materiał w przygotowaniach do Olimpiady.

*Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów*

# Treści zadań

## Pierwsze zawody indywidualne

**1.** Rozwiąż w dodatnich liczbach rzeczywistych $x$ równanie
$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x+8}+\sqrt{x+17}+\sqrt{x+28}=18.$$

**2.** Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a$, $b$, $c$ zachodzi nierówność
$$7a(b+c)\leqslant 5(a^2+b^2+c^2)\,.$$

**3.** Udowodnij, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej $n$, liczba
$$\frac{(4n)!\cdot(n!)^2}{((2n)!)^3}$$
zapisana w postaci ułamka nieskracalnego ma nieparzysty licznik i nieparzysty mianownik.

**4.** Liczby całkowite $n_1$, $n_2$, $n_3$, $\ldots$, $n_{15}$, $m$ spełniają równanie
$$n_1^4+n_2^4+n_3^4+\ldots+n_{15}^4=m^4.$$
Udowodnij, że wśród tych liczb co najwyżej dwie są nieparzyste.

**5.** W okrąg o promieniu 1 wpisano 666-kąt foremny. Wyznacz najmniejszą liczbę $k$ o następującej własności: wśród dowolnie wybranych $k$ wierzchołków tego wielokąta istnieją dwa wierzchołki odległe o 1.

**6.** Okręgi $o_1$ i $o_2$ są wpisane w kąty wierzchołkowe o wierzchołku $A$, wyznaczone przez proste $k$ i $l$. Prosta $k$ jest styczna do okręgu $o_1$ w punkcie $K$, a prosta $l$ jest styczna do okręgu $o_2$ w punkcie $L$. Okręgi $o_1$ i $o_2$ leżą po tej samej stronie prostej $m$, która jest do nich styczna i przecina proste $k$ i $l$ odpowiednio w punktach $B$ i $C$. Udowodnij, że $AK+AL=BC$.

**7.** Dany jest ostrokątny trójkąt równoramienny $ABC$ o podstawie $AB$. Prosta prostopadła do boku $AC$ przechodząca przez punkt $A$ przecina prostą $BC$ w punkcie $D$. Punkt $E$ spełnia warunki
$$\sphericalangle ECB=\sphericalangle EBA=90^\circ.$$
Punkt $F$ leży na prostej $AB$, przy czym $BF=AD$, a punkt $B$ leży na odcinku $AF$. Udowodnij, że $ED=EF$.

**8.** Równoległobok $ABCD$ jest podstawą ostrosłupa $ABCDS$. Kąty nachylenia ścian bocznych do podstawy są równe. Udowodnij, że równoległobok $ABCD$ jest rombem.

## Drugie zawody indywidualne

**9.** Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} ab+a+b=1 \\ bc+b+c=5 \\ ca+c+a=5 \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych $a$, $b$, $c$.

**10.** Dana jest szachownica o wymiarach $2014\times 2014$. Czy można tak ją pokryć kostkami domina, aby liczba kostek ułożonych poziomo była równa liczbie kostek ułożonych pionowo?
*Uwaga:* Każda kostka domina pokrywa dwa pola szachownicy.

**11.** Wykaż, że istnieje taka liczba naturalna $k$ większa od 1, że równanie

$$n^{n^k}=m^m$$

ma co najmniej cztery rozwiązania w dodatnich liczbach całkowitych $m$, $n$.
*Uwaga:* Potęgowanie wykonuje się „od góry”, tzn. $a^{b^c}=a^{(b^c)}$.

**12.** Trójkąt $ABC$ jest opisany na okręgu o środku $I$. Punkt $H$ jest ortocentrum tego trójkąta. Okrąg $o$ jest opisany na trójkącie $ABC$, a punkt $M$ jest środkiem tego łuku $AC$ okręgu $o$, do którego nie należy punkt $B$. Ponadto spełniony jest warunek $MI=MH$. Wyznacz miarę kąta $\sphericalangle ABC$.

## Trzecie zawody indywidualne

**13.** Rozstrzygnij, czy istnieją takie dodatnie liczby całkowite $m$, $n$, że sumy cyfr liczb $m^{2013}$ oraz $n^{2013}$ różnią się o 2013.

**14.** Punkt $P$ leży wewnątrz trójkąta $ABC$. Punkty $X$, $Y$, $Z$ leżą odpowiednio na odcinkach $AP$, $BP$, $CP$ i spełniają warunki:

$$\frac{AX}{XP}=\frac{BY}{YP}=\frac{CZ}{ZP}.$$

Punkty $K, L, M$ są środkami odpowiednio odcinków $BC, CA, AB$. Udowodnij, że proste $XK$, $YL$, $ZM$ przecinają się w jednym punkcie.

**15.** Danych jest $2^{2013}+1$ różnych dodatnich liczb całkowitych nie większych od $2^{4023}+1$. Udowodnij, że spośród nich można wybrać takich sześć różnych liczb $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, że

$$a+b=c+d=e+f.$$

**16.** Czy istnieje wielościan o nieparzystej liczbie ścian, którego wszystkie ściany są trójkątami?

## Czwarte zawody indywidualne

**17.** Liczby $a$, $b$, $c$ są długościami boków pewnego trójkąta. Wykaż, że
$$\frac{a}{(b+c-a)^2}+\frac{b}{(c+a-b)^2}+\frac{c}{(a+b-c)^2}\geqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

**18.** Szachownicę o wymiarach $14\times 14$ pokryto 98 kostkami domina. Udowodnij, że istnieje taka prosta równoległa do pewnych dwóch boków szachownicy i przechodząca przez jej wnętrze, która rozcina co najwyżej dwie kostki. *Uwaga:* Każda kostka domina pokrywa dwa pola szachownicy.

**19.** Czworokąt $ABCD$ wpisany jest w okrąg o środku $O$. Przekątne tego czworokąta przecinają się w punkcie $M$, a odcinki łączące środki jego przeciwległych boków przecinają się w punkcie $N$. Udowodnij, że $OM\geqslant ON$.

**20.** Wykaż, że równanie
$$2x^2+5y^2=z^2$$
nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych $x$, $y$, $z$.

**21.** Dany jest czworościan foremny o krawędzi 1. Punkt $P$ należy do wnętrza tego czworościanu. Suma odległości punktu $P$ od krawędzi tego czworościanu jest równa $s$. Wykaż, że
$$s\geqslant\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

## Mecz matematyczny

**22.** Czy liczba $7+5\sqrt{2}$ jest sumą liczb postaci $(x+y\sqrt{2})^2$, gdzie $x$, $y$ są liczbami wymiernymi?

**23.** Okręgi $o$, $p$ mają różne promienie i przecinają się w punktach $A$ i $B$. Prosta $k$ jest styczna do okręgów $o$ i $p$ odpowiednio w punktach $M$ i $N$, a prosta $l$ jest styczna do tych okręgów odpowiednio w punktach $O$ i $P$. Wykaż, że ortocentra trójkątów $MNA$, $MNB$, $OPA$ i $OPB$ są wierzchołkami prostokąta.

**24.** Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych $m$, $n$ zachodzi nierówność
$$\frac{m^m}{m!}\cdot\frac{n^n}{n!}<\frac{(m+n)^{m+n}}{(m+n)!}.$$

**25.** Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Wykaż, że środki okręgów wpisanych w trójkąty $ABC$, $BCD$, $CDA$ i $DAB$ są wierzchołkami prostokąta.

**26.** Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych $a$, $b$, $c$, $d$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a^2+b^2}{c+d}+\frac{a^2+c^2}{d+b}+\frac{a^2+d^2}{b+c} \geqslant 3a.$$

**27.** Udowodnij, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej $n$ zapis dziesiętny liczby $n!$ kończy się mniej niż $n/4$ zerami.

**28.** Na każdym polu szachownicy o wymiarach $2013\times 2013$ znajduje się żarówka. Dla każdego rzędu poziomego, pionowego i ukośnego dysponujemy przełącznikiem, który zmienia stan (zgaszona/zapalona) wszystkich żarówek w tym rzędzie. Rząd ukośny tworzą pola, których środki leżą na prostej przecinającej boki szachownicy pod kątem $45^\circ$. W szczególności rzędem jest pojedyncza żarówka w polu narożnym.

Początkowo zapalona jest żarówka w centralnym polu szachownicy, a pozostałe żarówki są zgaszone. Czy używając dostępnych przełączników można doprowadzić do stanu, w którym wszystkie żarówki są zgaszone?

**29.** Czy istnieje liczba naturalna większa od 1, którą można przedstawić w postaci $n^{n^k}$, gdzie $n$, $k$ są dodatnimi liczbami całkowitymi, na co najmniej 2013 sposobów?

**30.** Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Na bokach tego czworokąta budujemy na zewnątrz takie prostokąty $ABLK$, $BCNM$, $CDPO$ i $DARQ$, aby $BL=CD$, $CN=DA$, $DP=AB$, $AR=BC$. Udowodnij, że środki tych prostokątów są wierzchołkami prostokąta.

**31.** Na stosie leży 2013 kamieni. Ruch polega na wykonaniu jednej z następujących operacji:

• rozdzielenie dowolnego stosu zawierającego co najmniej dwa kamienie na dwa niepuste stosy,

• przełożenie jednego kamienia z większego stosu na mniejszy, pod warunkiem, że przed wykonaniem ruchu liczby kamieni w tych stosach różniły się o więcej niż 1.

Czy zgodnie z powyższymi regułami można wykonać ciąg trzech milionów ruchów?

**32.** W czworościanie $ABCD$ punkty $K$ i $L$ są środkami odpowiednio krawędzi $AB$ i $CD$. Płaszczyzna $p$ przechodzi przez punkty $K$ i $L$ oraz przecina krawędzie $BC$ i $AD$ tego czworościanu odpowiednio w punktach $E$ i $F$. Wykaż, że środek odcinka $EF$ leży na prostej $KL$.

# Rozwiązania zadań

## Pierwsze zawody indywidualne

**Zadanie 1.** Rozwiąż w dodatnich liczbach rzeczywistych $x$ równanie

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x+8}+\sqrt{x+17}+\sqrt{x+28}=18.$$

### Rozwiązanie

Podstawiając $x=8$ stwierdzamy, że lewa strona równania jest równa

$$\sqrt{9}+\sqrt{16}+\sqrt{25}+\sqrt{36}=3+4+5+6=18,$$

skąd wniosek, że $x=8$ jest rozwiązaniem danego równania.

Zauważmy, że dla dodatnich liczb rzeczywistych $x$, $s$, $t$ z nierówności $x<t$ wynika

$$\sqrt{x+s}<\sqrt{t+s},$$

natomiast nierówność $x>t$ pociąga

$$\sqrt{x+s}>\sqrt{t+s}.$$

Stąd wniosek, że dla $x<8$ mamy

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x+8}+\sqrt{x+17}+\sqrt{x+28}<\sqrt{9}+\sqrt{16}+\sqrt{25}+\sqrt{36}=18,$$

zaś dla $x>8$ otrzymujemy

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x+8}+\sqrt{x+17}+\sqrt{x+28}>\sqrt{9}+\sqrt{16}+\sqrt{25}+\sqrt{36}=18.$$

To oznacza, że $x=8$ jest jedynym rozwiązaniem danego równania.

**Zadanie 2.** Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a$, $b$, $c$ zachodzi nierówność

$$7a(b+c)\leqslant 5(a^2+b^2+c^2)\,.$$

### Rozwiązanie

*Sposób* I

Z nierówności $(a-b\sqrt{2})^2\geqslant 0$ otrzymujemy $a^2-2\sqrt{2}ab+2b^2\geqslant 0$, skąd

$$ab\leqslant \frac{a^2}{2\sqrt{2}}+\frac{b^2}{\sqrt{2}}. \tag{1}$$

Analogicznie uzasadniamy, że

$$ac\leqslant \frac{a^2}{2\sqrt{2}}+\frac{c^2}{\sqrt{2}}. \tag{2}$$

Dodanie stronami nierówności (1) i (2) prowadzi do

$$a(b+c)\leqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{2}}.$$

Wykorzystując nierówność

$$\frac{7}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{2}}<\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}=\sqrt{25}=5\,,$$

dostajemy

$$7a(b+c) \leqslant \frac{7}{\sqrt{2}} \cdot (a^2+b^2+c^2) \leqslant 5 \cdot (a^2+b^2+c^2)\,,$$

co należało wykazać.

*Sposób* II

Z nierówności $(5a-7b)^2 \geqslant 0$ otrzymujemy $25a^2-70ab+49b^2 \geqslant 0$, skąd

$$7ab \leqslant \frac{5a^2}{2} + \frac{49b^2}{10}. \tag{3}$$

Analogicznie dowodzimy, że

$$7ac \leqslant \frac{5a^2}{2} + \frac{49c^2}{10}. \tag{4}$$

Dodanie stronami nierówności (3) i (4) prowadzi do

$$7a(b+c) \leqslant 5a^2 + \frac{49b^2}{10} + \frac{49c^2}{10} \leqslant 5a^2+5b^2+5c^2 = 5 \cdot (a^2+b^2+c^2),$$

co należało udowodnić.

*Sposób* III

Z nierówności $(7a-10b)^2 \geqslant 0$ dostajemy $49a^2-140ab+100b^2 \geqslant 0$, skąd

$$7ab \leqslant \frac{49a^2}{20} + 5b^2. \tag{5}$$

Analogicznie uzyskujemy nierówność

$$7ac \leqslant \frac{49a^2}{20} + 5c^2. \tag{6}$$

Po dodaniu stronami nierówności (5) i (6) otrzymujemy

$$7a(b+c) \leqslant \frac{49a^2}{10} + 5b^2 + 5c^2 \leqslant 5a^2+5b^2+5c^2 = 5 \cdot (a^2+b^2+c^2),$$

co należało wykazać.

**Zadanie 3.** Udowodnij, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej $n$, liczba

$$\frac{(4n)! \cdot (n!)^2}{((2n)!)^3}$$

zapisana w postaci ułamka nieskracalnego ma nieparzysty licznik i nieparzysty mianownik.

**Rozwiązanie**

Skorzystamy z następującego lematu, którego dowód znajduje się w rozwiązaniu zadania 31 z *Ligi zadaniowej Obozu Naukowego OMG* (seria VII, styczeń 2013):

*Lemat*

Liczba pierwsza $p$ występuje w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby $N!$ z wykładnikiem

$$\left[\frac{N}{p}\right] + \left[\frac{N}{p^2}\right] + \left[\frac{N}{p^3}\right] + \left[\frac{N}{p^4}\right] + \ldots,$$

gdzie $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od liczby $x$.

*Uwaga*

Powyższa suma jest skończona, gdyż od pewnego miejsca występujące w niej składniki są równe 0.

Przechodzimy do rozwiązania zadania.

Niech $w$ będzie wykładnikiem, z jakim liczba 2 wchodzi do rozkładu na czynniki pierwsze liczby $n!$. Na mocy lematu mamy

$$w=\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]+\left[\frac{n}{8}\right]+\left[\frac{n}{16}\right]+\ldots$$

Ponadto liczba 2 wchodzi do rozkładu na czynniki pierwsze liczby $(2n)!$ z wykładnikiem

$$\begin{aligned}\left[\frac{2n}{2}\right]+\left[\frac{2n}{4}\right]+\left[\frac{2n}{8}\right]+\left[\frac{2n}{16}\right]+\left[\frac{2n}{32}\right]+\ldots=\\=[n]+\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]+\left[\frac{n}{8}\right]+\left[\frac{n}{16}\right]+\ldots=n+w,\end{aligned}$$

a do rozkładu na czynniki pierwsze liczby $(4n)!$ z wykładnikiem

$$\begin{aligned}\left[\frac{4n}{2}\right]+\left[\frac{4n}{4}\right]+\left[\frac{4n}{8}\right]+\left[\frac{4n}{16}\right]+\left[\frac{4n}{32}\right]+\left[\frac{4n}{64}\right]+\ldots=\\=[2n]+[n]+\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]+\left[\frac{n}{8}\right]+\left[\frac{n}{16}\right]+\ldots=3n+w.\end{aligned}$$

Zatem przed uproszczeniem danego w zadaniu ułamka, liczba 2 występuje w liczniku z wykładnikiem

$$3n+w+2w=3n+3w,$$

a w mianowniku z wykładnikiem

$$3(n+w)=3n+3w.$$

Ponieważ oba wykładniki są równe, po uproszczeniu ułamek ma nieparzysty licznik i nieparzysty mianownik.

**Zadanie 4.** Liczby całkowite $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_{15}, m$ spełniają równanie

$$n_1^4+n_2^4+n_3^4+\ldots+n_{15}^4=m^4.$$

Udowodnij, że wśród tych liczb co najwyżej dwie są nieparzyste.

## Rozwiązanie

Jeżeli liczba całkowita $n$ jest parzysta, to liczba $n^4$ jest podzielna przez 16. Jeśli natomiast $n$ jest liczbą nieparzystą, to

$$n^4-1=(n-1)\cdot(n+1)\cdot(n^2+1),$$

gdzie iloczyn po prawej stronie ma trzy czynniki parzyste, a ponadto jeden z pierwszych dwóch czynników jest podzielny przez 4. Zatem w tym przypadku liczba $n^4-1$ jest podzielna przez 16, a w konsekwencji liczba $n^4$ przy dzieleniu przez 16 daje resztę 1.

Tak więc dla dowolnej liczby całkowitej $n$, liczba $n^4$ daje przy dzieleniu przez 16 resztę 0 lub 1, zależnie od parzystości liczby $n$.

Niech teraz liczby całkowite $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_{15}, m$ spełniają równanie dane w treści zadania.

Jeżeli liczba $m$ jest parzysta, to prawa strona równania jest podzielna przez 16, a zatem liczba składników nieparzystych występujących po lewej stronie jest podzielna przez 16, jest więc równa zero jako liczba nie większa od 15. W tym przypadku wszystkie liczby $n_1$, $n_2$, $n_3$, …, $n_{15}$, $m$ są parzyste.

Jeśli zaś liczba $m$ jest nieparzysta, to prawa strona równania przy dzieleniu przez 16 daje resztę 1. Zatem liczba składników nieparzystych występujących po lewej stronie także daje resztę 1 przy dzieleniu przez 16. Jest więc równa jeden jako liczba nie większa od 15. W tym przypadku liczba $m$ oraz dokładnie jedna z liczb $n_1$, $n_2$, $n_3$, …, $n_{15}$ są nieparzyste.

Udowodniliśmy, że wśród liczb $n_1$, $n_2$, $n_3$, …, $n_{15}$, $m$ są dokładnie dwie liczby nieparzyste albo nie ma żadnej liczby nieparzystej.

**Zadanie 5.** W okrąg o promieniu 1 wpisano 666-kąt foremny. Wyznacz najmniejszą liczbę $k$ o następującej własności: wśród dowolnie wybranych $k$ wierzchołków tego wielokąta istnieją dwa wierzchołki odległe o 1.

**Rozwiązanie**

Niech $A_1A_2A_3\ldots A_{666}$ będzie danym 666-kątem foremnym. Wówczas dla $i=1,2,3,\ldots,111$ wierzchołki $A_i$, $A_{i+111}$, $A_{i+222}$, $A_{i+333}$, $A_{i+444}$ i $A_{i+555}$ są wierzchołkami sześciokąta foremnego o boku 1. Dwa wierzchołki 666-kąta są odległe o 1 wtedy i tylko wtedy, gdy są sąsiednimi wierzchołkami jednego ze 111 opisanych wyżej sześciokątów foremnych.

Wykażemy, że najmniejszą liczbą spełniającą warunki zadania jest $k=334$. Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że przy wybraniu dowolnych 334 wierzchołków 666-kąta, co najmniej jeden sześciokąt ma wybrane co najmniej cztery wierzchołki — wśród tych wierzchołków muszą być dwa sąsiednie, a więc odległe o 1. Z kolei liczba 333 nie spełnia warunków zadania, gdyż można wybrać co drugi wierzchołek każdego ze 111 sześciokątów foremnych — wówczas wybrane są 333 wierzchołki, ale żadne dwa z nich nie są odległe o 1.

**Zadanie 6.** Okręgi $o_1$ i $o_2$ są wpisane w kąty wierzchołkowe o wierzchołku $A$, wyznaczone przez proste $k$ i $l$. Prosta $k$ jest styczna do okręgu $o_1$ w punkcie $K$, a prosta $l$ jest styczna do okręgu $o_2$ w punkcie $L$. Okręgi $o_1$ i $o_2$ leżą po tej samej stronie prostej $m$, która jest do nich styczna i przecina proste $k$ i $l$ odpowiednio w punktach $B$ i $C$. Udowodnij, że $AK+AL=BC$.

**Rozwiązanie**

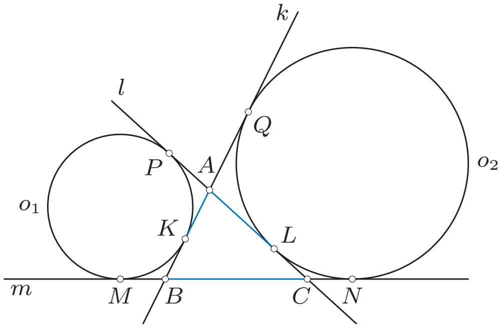
Prostą $m$ można wybrać na dwa sposoby, wybór ten nie zmienia jednak długości odcinka $BC$. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że wybraliśmy prostą $m$ tak, aby punkty $K$ i $L$ leżały odpowiednio na odcinkach $AB$ i $AC$ (rys. 1). Oznaczmy przez $M$ i $N$ punkty styczności prostej $m$ odpowiednio z okręgami $o_1$ i $o_2$. Przez $P$ oznaczmy punkt styczności prostej $l$ z okręgiem $o_1$, a przez $Q$ oznaczmy punkt styczności prostej $k$ z okręgiem $o_2$. Wówczas

$$AK+AL+CL=AP+AC=CP=CM=BC+BK$$

oraz

$$AK+AL+BK=AB+AQ=BQ=BN=BC+CL.$$

Po dodaniu tych równości stronami i redukcji wyrazów podobnych otrzymujemy tezę.




rys. 1

**Zadanie 7.** Dany jest ostrokątny trójkąt równoramienny $ABC$ o podstawie $AB$. Prosta prostopadła do boku $AC$ przechodząca przez punkt $A$ przecina prostą $BC$ w punkcie $D$. Punkt $E$ spełnia warunki

$$\sphericalangle ECB=\sphericalangle EBA=90^\circ.$$

Punkt $F$ leży na prostej $AB$, przy czym $BF=AD$, a punkt $B$ leży na odcinku $AF$. Udowodnij, że $ED=EF$.

## Rozwiązanie

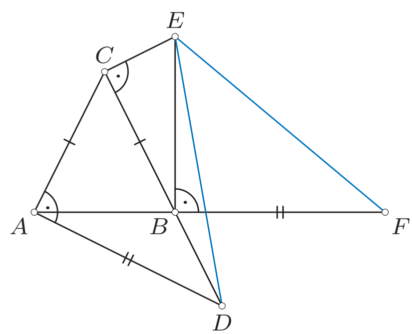
Trójkąty $EBF$ i $ECB$ są prostokątne (rys. 2), więc korzystając z twierdzenia Pitagorasa, otrzymujemy

$$EF^2=EB^2+BF^2=EC^2+BC^2+BF^2.$$

Trójkąty $ECD$ i $CAD$ także są prostokątne, a zatem wykorzystując ponownie twierdzenie Pitagorasa, dostajemy

$$ED^2=EC^2+CD^2=EC^2+AC^2+AD^2.$$

Na mocy równości $BC=AC$ oraz $BF=AD$ uzyskujemy tezę zadania.

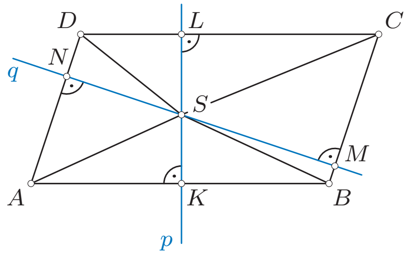



rys. 2

**Zadanie 8.** Równoległobok $ABCD$ jest podstawą ostrosłupa $ABCDS$. Kąty nachylenia ścian bocznych do podstawy są równe. Udowodnij, że równoległobok $ABCD$ jest rombem.

## Rozwiązanie

Oznaczmy przez $p$ i $q$ płaszczyzny przechodzące przez punkt $S$, prostopadłe odpowiednio do prostych $AB$ i $BC$. Wówczas płaszczyzna $p$ jest także prostopadła do prostej $CD$, ponieważ $CD \parallel AB$. Analogicznie płaszczyzna $q$ jest prostopadła do prostej $AD$. Oznaczmy przez $K$ i $L$ punkty przecięcia płaszczyzny $p$ odpowiednio z prostymi $AB$ i $CD$, a przez $M$ i $N$ punkty przecięcia płaszczyzny $q$ z prostymi odpowiednio $BC$ i $AD$. Rysunek 3 przedstawia widok ostrosłupa $ABCDS$ z góry, prostopadle do płaszczyzny podstawy.




rys. 3

Proste $KL$ i $KS$ są prostopadłe do $AB$, ponieważ należą do płaszczyzny prostopadłej do prostej $AB$. Wobec tego, kąt $SKL$ jest kątem dwuściennym między ścianami $ABS$ i $ABCD$. Analogicznie kąty $SLK$, $SMN$, $SNM$ są odpowiednimi kątami dwuściennymi. Kąty te są równe, więc trójkąty $SKL$ i $SMN$ są podobne z cechy podobieństwa trójkątów kąt–kąt. Co więcej, wysokość trójkąta $SKL$, opuszczona z wierzchołka $S$, jest prostopadła do prostej $KL$ oraz do prostej $AB$, bo należy do płaszczyzny $p$, więc jest prostopadła do płaszczyzny $ABCD$. Wobec tego wysokość ta pokrywa się z wysokością ostrosłupa $ABCDS$. Analogicznie wysokość opuszczona z wierzchołka $S$ w trójkącie $SMN$ pokrywa się z tą samą wysokością ostrosłupa.

Odpowiednie wysokości w trójkątach podobnych $SKL$ i $SMN$ się pokrywają, więc trójkąty te są przystające. Stąd $KL = MN$. Pozostaje zauważyć, że odcinki $KL$ i $MN$ są prostopadłe odpowiednio do prostych $AB$ i $BC$, więc są wysokościami w równoległoboku $ABCD$. Jeśli wysokości w równoległoboku są równej długości, to równoległobok ten jest rombem.

## Drugie zawody indywidualne

**Zadanie 9.** Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} ab+a+b=1 \\ bc+b+c=5 \\ ca+c+a=5 \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych $a$, $b$, $c$.

### Rozwiązanie

Dodajmy 1 do obu stron każdego równania i przepiszmy dany układ w równoważnej postaci

$$\begin{cases} (a+1)(b+1)=2 \\ (b+1)(c+1)=6 \\ (c+1)(a+1)=6. \end{cases} \tag{1}$$

Mnożąc stronami pierwsze dwa równania, dostajemy

$$(a+1)(c+1)(b+1)^2=12,$$

skąd na mocy trzeciego równania otrzymujemy $(b+1)^2=2$. Analogicznie stwierdzamy, że $(c+1)^2=18$ oraz $(a+1)^2=2$. W takim razie

$$a=\pm\sqrt{2}-1, \quad b=\pm\sqrt{2}-1 \quad \text{oraz} \quad c=\pm 3\sqrt{2}-1,$$

a ponieważ na mocy (1) trzy liczby $a+1$, $b+1$, $c+1$ są wszystkie tego samego znaku, dostajemy

$$(a,b,c)=(\sqrt{2}-1,\sqrt{2}-1,3\sqrt{2}-1) \quad \text{lub} \quad (a,b,c)=(-\sqrt{2}-1,-\sqrt{2}-1,-3\sqrt{2}-1).$$

Z drugiej strony bezpośrednio sprawdzamy, że tak otrzymane trójki liczb spełniają układ (1), a więc są jedynymi rozwiązaniami układu równań danego w treści zadania.

*Odpowiedź*

Dane równanie ma dwa rozwiązania:

$$(a,b,c)=(\sqrt{2}-1,\sqrt{2}-1,3\sqrt{2}-1) \quad \text{oraz} \quad (a,b,c)=(-\sqrt{2}-1,-\sqrt{2}-1,-3\sqrt{2}-1).$$

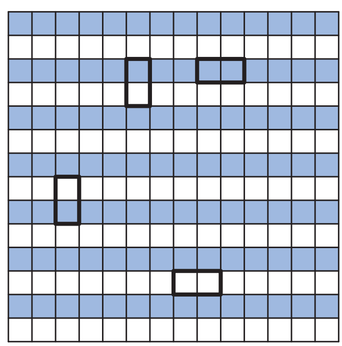
**Zadanie 10.** Dana jest szachownica o wymiarach $2014\times 2014$. Czy można tak ją pokryć kostkami domina, aby liczba kostek ułożonych poziomo była równa liczbie kostek ułożonych pionowo?

*Uwaga:* Każda kostka domina pokrywa dwa pola szachownicy.

## Rozwiązanie

Udowodnimy, że opisane w zadaniu pokrycie nie jest możliwe.

W tym celu pomalujmy szachownicę w poziome pasy o szerokości 1 jak na rysunku 4, gdzie sposób pokolorowania zilustrowano na przykładzie szachownicy o wymiarach $14\times 14$.



rys. 4

Zauważmy, że każda kostka domina ułożona poziomo pokrywa dwa pola tego samego koloru, a kostka ułożona pionowo pokrywa pola różnych kolorów. Ponieważ szachownica zawiera parzyście wiele pól każdego koloru, w każdym jej pokryciu kostkami domina, liczba kostek ułożonych pionowo jest parzysta.

Gdyby liczba kostek ułożonych pionowo była równa liczbie kostek ułożonych poziomo, to byłaby równa połowie liczby wszystkich kostek użytych do pokrycia szachownicy, czyli $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2014^2=1007^2$. Liczba ta jest jednak nieparzysta. Uzyskana sprzeczność kończy rozwiązanie.

**Zadanie 11.** Wykaż, że istnieje taka liczba naturalna $k$ większa od 1, że równanie

$$n^{n^k}=m^m$$

ma co najmniej cztery rozwiązania w dodatnich liczbach całkowitych $m$, $n$.

*Uwaga:* Potęgowanie wykonuje się „od góry”, tzn. $a^{b^c}=a^{(b^c)}$.

## Rozwiązanie

Przyjmijmy $m=n^{n^t}$, gdzie $t$ jest dodatnią liczbą całkowitą. Wówczas

$$m^m=\left(n^{n^t}\right)^{n^{n^t}}=n^{n^t\cdot n^{n^t}}=n^{n^{t+n^t}},$$

skąd wynika, że liczby $m$, $n$ spełniają dane w zadaniu równanie dla $k=t+n^t$.

Dla dowolnego $k>2$ otrzymujemy więc co najmniej dwa rozwiązania danego równania, odpowiednio dla $n=1$, $t=k-1$ oraz $n=k-1$, $t=1$:

$$n=1, \quad m=1$$

oraz

$$n=k-1, \quad m=(k-1)^{k-1}.$$

Więcej rozwiązań otrzymamy dla liczb $k$ postaci $t+n^t$, gdzie $n$, $t$ są większe od 1.

Zauważmy, że liczba $k=11$ daje się zapisać w powyższej postaci na dwa sposoby, mamy bowiem $11=2+3^2=3+2^3$. Dla $k=11$ dane w zadaniu równanie ma więc co najmniej cztery rozwiązania:

$$\begin{array}{ll} n=1, & m=1; \\ n=10, & m=10^{10}; \\ n=2, & m=2^{2^3}=2^8; \\ n=3, & m=3^{3^2}=3^9. \end{array}$$

*Uwaga*

Nie wiadomo, czy $k=11$ jest jedyną liczbą spełniającą warunki zadania.

**Zadanie 12.** Trójkąt $ABC$ jest opisany na okręgu o środku $I$. Punkt $H$ jest ortocentrum tego trójkąta. Okrąg $o$ jest opisany na trójkącie $ABC$, a punkt $M$ jest środkiem tego łuku $AC$ okręgu $o$, do którego nie należy punkt $B$. Ponadto spełniony jest warunek $MI=MH$. Wyznacz miarę kąta $\sphericalangle ABC$.

## Rozwiązanie

Punkty $M$ i $I$ leżą na dwusiecznej kąta $ABC$ (rys. 5). Ponadto zauważmy, że $MA=MC=MI$. Istotnie: pierwsza równość jest spełniona, gdyż $M$ jest środkiem łuku $AC$. Aby uzasadnić drugą, przeprowadźmy następujący rachunek na kątach:

$$\sphericalangle ICM=\sphericalangle ICA+\sphericalangle MCA=\sphericalangle ICB+\sphericalangle MBA=\sphericalangle ICB+\sphericalangle IBC=\sphericalangle CIM.$$

Wobec tego trójkąt $IMC$ ma równe kąty przy podstawie $IC$, czyli $MC=MI$.

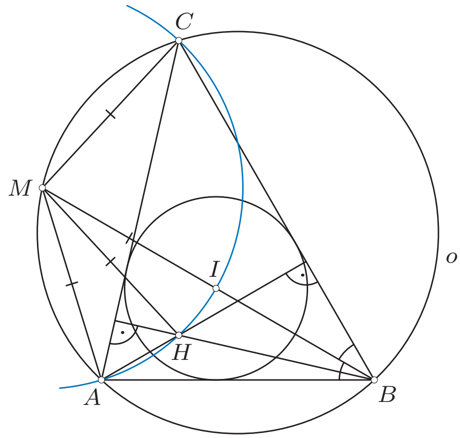
Punkty $A$, $I$, $H$, $C$ leżą zatem na okręgu o środku $M$ i promieniu $MI$. Jeżeli trójkąt $ABC$ jest ostrokątny, to punkty $H$ oraz $I$ leżą po tej samej stronie prostej $AC$, co punkt $B$. Stąd $\sphericalangle CHA=\sphericalangle CIA$. Ponadto

$$\sphericalangle CIA=180^\circ-\sphericalangle ICA-\sphericalangle IAC=180^\circ-\tfrac{1}{2}\sphericalangle BCA-\tfrac{1}{2}\sphericalangle BAC=90^\circ+\tfrac{1}{2}\sphericalangle ABC,$$

oraz

$$\begin{aligned}\sphericalangle CHA&=180^\circ-\sphericalangle HCA-\sphericalangle HAC=(90^\circ-\sphericalangle HCA)+(90^\circ-\sphericalangle HAC)=\\&=\sphericalangle BAC+\sphericalangle BCA=180^\circ-\sphericalangle ABC.\end{aligned}$$

Wobec tego mamy $90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle ABC = 180^\circ - \sphericalangle ABC$, czyli $\sphericalangle ABC = 60^\circ$.




rys. 5

Podobne rachunki w przypadku, gdy trójkąt $ABC$ nie jest ostrokątny, również prowadzą do równości $\sphericalangle ABC = 60^\circ$. Wynika stąd, że jest to jedyna możliwa miara tego kąta.

## Trzecie zawody indywidualne

**Zadanie 13.** Rozstrzygnij, czy istnieją takie dodatnie liczby całkowite $m$, $n$, że sumy cyfr liczb $m^{2013}$ oraz $n^{2013}$ różnią się o 2013.

### Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że sześcian dowolnej liczby całkowitej jest podzielny przez 9 albo sąsiaduje z liczbą podzielną przez 9. Spostrzeżenie to wynika z następujących tożsamości:

$$(3k)^3 = 9 \cdot 3k^3,$$
$$(3k \pm 1)^3 = 9 \cdot (3k^3 \pm 3k^2 + k) \pm 1.$$

Ponieważ wykładnik 2013 jest podzielny przez 3, liczby $m^{2013}$ oraz $n^{2013}$ są sześcianami dodatnich liczb całkowitych, a więc każda z nich jest podzielna przez 9 albo sąsiaduje z wielokrotnością dziewiątki. Na podstawie cechy podzielności[1] przez 9 wnioskujemy, że także sumy cyfr tych liczb są odpowiednio podzielne przez 9 albo sąsiadują z liczbami podzielnymi przez 9. Różnica dwóch takich liczb może dawać przy dzieleniu przez 9 jedną z reszt: 0, 1, 2, 7, 8. Nie może więc być równa 2013, gdyż ta liczba daje przy dzieleniu przez 9 resztę 6.

*Odpowiedź*

Liczby o podanej własności nie istnieją.

---

[1] Korzystamy tu z cechy podzielności przez 9 w wersji uogólnionej: *dowolna liczba naturalna daje przy dzieleniu przez 9 taką samą resztę, jaką przy dzieleniu przez 9 daje jej suma cyfr.*

**Zadanie 14.** Punkt $P$ leży wewnątrz trójkąta $ABC$. Punkty $X$, $Y$, $Z$ leżą odpowiednio na odcinkach $AP$, $BP$, $CP$ i spełniają warunki:

$$\frac{AX}{XP}=\frac{BY}{YP}=\frac{CZ}{ZP}.$$

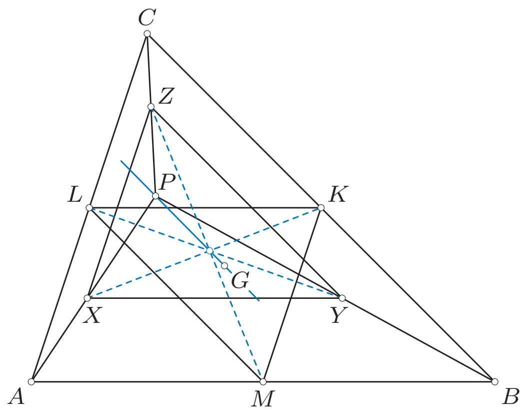
Punkty $K$, $L$, $M$ są środkami odpowiednio odcinków $BC$, $CA$, $AB$. Udowodnij, że proste $XK$, $YL$, $ZM$ przecinają się w jednym punkcie.

**Rozwiązanie**

Dane w treści zadania równości stosunków oznaczają, że istnieje jednokładność o środku $P$ i skali dodatniej, która przeprowadza trójkąt $XYZ$ na trójkąt $ABC$.

Ponadto jednokładność o środku w środku ciężkości $G$ trójkąta $ABC$ i skali ujemnej $-\frac{1}{2}$ przeprowadza trójkąt $ABC$ na trójkąt $KLM$.

Z ostatnich dwóch akapitów oraz własności złożenia jednokładności płynie wniosek, że istnieje jednokładność o skali ujemnej, która przeprowadza trójkąt $XYZ$ na $KLM$ (środek tej jednokładności pokrywa się z punktem $P$, gdy $P=G$, oraz leży na prostej $PG$ w przeciwnym wypadku). Wobec tego proste $XK$, $YL$ oraz $ZM$ przecinają się w punkcie będącym środkiem opisanej jednokładności (rys. 6).




rys. 6

**Zadanie 15.** Danych jest $2^{2013}+1$ różnych dodatnich liczb całkowitych nie większych od $2^{4023}+1$. Udowodnij, że spośród nich można wybrać takich sześć różnych liczb $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, że

$$a+b=c+d=e+f.$$

**Rozwiązanie**

Rozważmy wszystkie nieuporządkowane pary różnych spośród danych liczb. Par tych jest

$$\binom{2^{2013}+1}{2}=\frac{(2^{2013}+1)\cdot 2^{2013}}{2}=2^{4025}+2^{2012}.$$

Suma liczb każdej pary jest nie mniejsza niż 3 i nie większa niż

$$\left(2^{4023}+1\right)+2^{4023}=2^{4024}+1.$$

Sumy te mogą zatem przyjmować
$$2^{4024}+1-3+1=2^{4024}-1$$
dopuszczalnych wartości. Ponieważ liczba par jest ponad dwukrotnie większa od tej liczby, z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że istnieją trzy pary o takiej samej sumie. Dla zakończenia rozwiązania wystarczy zauważyć, że różne pary o takiej samej sumie mają wszystkie elementy różne.

**Zadanie 16.** Czy istnieje wielościan o nieparzystej liczbie ścian, którego wszystkie ściany są trójkątami?

**Rozwiązanie**

Nie istnieje. Oznaczmy przez $K$ liczbę krawędzi wielościanu, a przez $S$ liczbę jego ścian. Jeśli wszystkie ściany są trójkątne, zachodzi zależność $2K=3S$, ponieważ każda krawędź sąsiaduje z dwoma ścianami, a każda ściana sąsiaduje z trzema krawędziami. Wobec tego liczba $3S$ musi być parzysta, więc liczba ścian także musi być parzysta.

## Czwarte zawody indywidualne

**Zadanie 17.** Liczby $a$, $b$, $c$ są długościami boków pewnego trójkąta. Wykaż, że
$$\frac{a}{(b+c-a)^2}+\frac{b}{(c+a-b)^2}+\frac{c}{(a+b-c)^2}\geqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

**Rozwiązanie**

Zauważmy najpierw, że na mocy nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną, dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych $u$ i $v$ zachodzą nierówności
$$\frac{u}{4v^2}+\frac{v}{4u^2}\geqslant\frac{1}{2\sqrt{uv}}$$
oraz
$$u+v\geqslant 2\sqrt{uv},\quad \text{czyli}\quad \frac{1}{2\sqrt{uv}}\geqslant\frac{1}{u+v}.$$

Podstawmy
$$\frac{b+c-a}{2}=x,\qquad \frac{c+a-b}{2}=y,\qquad \frac{a+b-c}{2}=z.$$
Z nierówności trójkąta wynika, że liczby $x$, $y$, $z$ są dodatnie, a dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać
$$\frac{y+z}{4x^2}+\frac{z+x}{4y^2}+\frac{x+y}{4z^2}\geqslant\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}\,.$$
Wykorzystując przytoczone na początku nierówności, dostajemy
$$\frac{y+z}{4x^2}+\frac{z+x}{4y^2}+\frac{x+y}{4z^2}=\left(\frac{y}{4z^2}+\frac{z}{4y^2}\right)+\left(\frac{z}{4x^2}+\frac{x}{4z^2}\right)+\left(\frac{x}{4y^2}+\frac{y}{4x^2}\right)\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{2\sqrt{yz}}+\frac{1}{2\sqrt{zx}}+\frac{1}{2\sqrt{xy}}\geqslant\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}\,.$$
To kończy rozwiązanie zadania.

**Zadanie 18.** Szachownicę o wymiarach $14\times 14$ pokryto 98 kostkami domina. Udowodnij, że istnieje taka prosta równoległa do pewnych dwóch boków szachownicy i przechodząca przez jej wnętrze, która rozcina co najwyżej dwie kostki.
*Uwaga:* Każda kostka domina pokrywa dwa pola szachownicy.

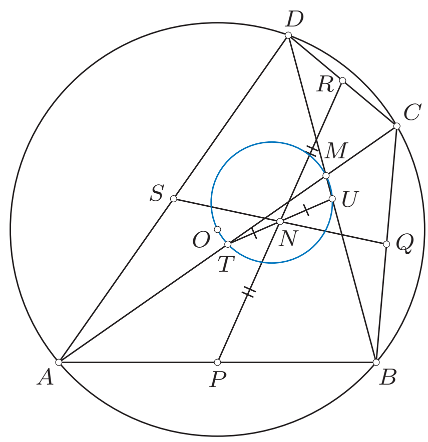
## Rozwiązanie

Każda z 13 prostych poziomych i 13 prostych pionowych przechodzących przez wnętrze szachownicy, biegnących wzdłuż linii podziału pól, przecina parzyście wiele kostek domina, gdyż dzieli szachownicę na dwa prostokąty o parzystych polach. Ponieważ $4\cdot 26 = 104 > 98$, co najmniej jedna z opisanych wyżej 26 prostych przecina mniej niż 4 kostki domina. Skoro jednak liczba rozcinanych przez nią kostek jest parzysta, prosta ta przecina co najwyżej dwie kostki.

**Zadanie 19.** Czworokąt $ABCD$ wpisany jest w okrąg o środku $O$. Przekątne tego czworokąta przecinają się w punkcie $M$, a odcinki łączące środki jego przeciwległych boków przecinają się w punkcie $N$. Udowodnij, że $OM \geqslant ON$.

## Rozwiązanie

Jeśli punkt $M$ pokrywa się z punktem $O$, to czworokąt $ABCD$ jest prostokątem, a wtedy także punkt $N$ pokrywa się z punktem $O$. Teza zadania jest wówczas spełniona. Przyjmijmy zatem w dalszej części, że $M \neq O$.




rys. 7

Oznaczmy przez $P$, $Q$, $R$, $S$, $T$, $U$ odpowiednio środki odcinków $AB$, $BC$, $CD$, $DA$, $AC$, $BD$ (rys. 7). Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa otrzymujemy równoległości:

$$SR \parallel AC \parallel PQ, \quad PS \parallel BD \parallel QR,$$

więc czworokąt $PQRS$ jest równoległobokiem, a punkt przecięcia jego przekątnych $N$ jest środkiem odcinka $PR$. Analogicznie otrzymujemy równoległości odcinków:

$$PT \parallel BC \parallel UR, \quad PU \parallel AD \parallel TR,$$

skąd możemy wywnioskować, że czworokąt $PURT$ jest równoległobokiem (być może zdegenerowanym do odcinka). Zatem środek odcinka $PR$, czyli punkt $N$, jest także środkiem odcinka $TU$.

Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, a odcinki $AC$ i $BD$ są cięciwami tego okręgu, więc $OT \perp AC$ (lub $O=T$) oraz $OU \perp BD$ (lub $O=U$). Stąd wniosek, że punkty $T$ i $U$ leżą na okręgu o średnicy $OM$. Punkt $N$, jako środek odcinka $TU$, leży wewnątrz tego okręgu lub na nim, więc długość odcinka $ON$ nie przekracza długości średnicy $OM$.

**Zadanie 20.** Wykaż, że równanie

$$2x^2+5y^2=z^2$$

nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych $x$, $y$, $z$.

## Rozwiązanie

*Sposób* I

Przypuśćmy, że istnieje co najmniej jedna trójka $(x,y,z)$ dodatnich liczb całkowitych spełniająca powyższe równanie i spośród wszystkich takich trójek wybierzmy taką, dla której wartość liczby $z$ jest minimalna. Wówczas

$$2x^2 \equiv z^2 \pmod{5}.$$

Z tożsamości

$$\begin{aligned}(5k)^2 &= 5\cdot(5k^2)\,,\\ (5k\pm1)^2 &= 5\cdot(5k^2\pm2k)+1\,,\\ (5k\pm2)^2 &= 5\cdot(5k^2\pm4k)+4\end{aligned}$$

wynika, że kwadraty liczb całkowitych dają reszty 0, 1, 4 z dzielenia przez 5. Stąd wniosek, że dana kongruencja może być prawdziwa jedynie wtedy, gdy obie liczby $x^2$ i $z^2$ są podzielne przez 5 — innymi słowy, gdy obie liczby $x$ i $z$ są podzielne przez 5. W takim razie $x=5x_1$ i $z=5z_1$ dla pewnych dodatnich liczb całkowitych $x_1$ i $z_1$. Wówczas dane w zadaniu równanie przyjmuje postać

$$2\cdot(5x_1)^2+5y^2=(5z_1)^2, \quad \text{czyli} \quad 10x_1^2+y^2=5z_1^2.$$

Stąd wynika, że liczba $y$ jest podzielna przez 5, a zatem $y=5y_1$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej $y_1$. Otrzymujemy

$$2x_1^2+5y_1^2=z_1^2.$$

Trójka $(x_1,y_1,z_1)$ spełnia więc dane w treści zadania równanie, a przy tym $z_1<z$. To jest sprzeczne z założeniem o minimalności $z$ w trójce $(x,y,z)$, a zatem uczynione na początku przypuszczenie o istnieniu rozwiązań danego równania było fałszywe. W takim razie dane w zadaniu równanie nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych.

*Sposób* II

Rozumujemy podobnie jak w sposobie I, przy czym opieramy się na kongruencji modulo 8 zamiast modulo 5. Z tożsamości

$$(4k)^2 = 8 \cdot (2k^2)\,,$$
$$(4k+2)^2 = 8 \cdot (2k^2+2k)+4\,,$$
$$(4k \pm 1)^2 = 8 \cdot (2k^2 \pm k)+1$$

wynika, że kwadraty liczb całkowitych dają reszty 0, 1, 4 z dzielenia przez 8. Zatem możliwe reszty z dzielenia przez 8 wyrażeń występujących w danym równaniu są następujące:

- dla liczby $2x^2$ są to 0, 2,
- dla liczby $5y^2$ są to 0, 4, 5,
- dla liczby $z^2$ są to 0, 1, 4.

Stąd wynika, że równanie dane w treści zadania może być spełnione tylko w przypadku, gdy

$$2x^2 \equiv 0 \pmod 8$$

oraz

$$5y^2 \equiv z^2 \equiv 0 \pmod 8 \quad \text{albo} \quad 5y^2 \equiv z^2 \equiv 4 \pmod 8.$$

Zatem każde rozwiązanie $(x,y,z)$ danego równania musi składać się z trzech liczb parzystych.

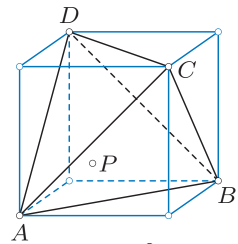
Dalsza część rozumowania przebiega analogicznie jak w sposobie I — jeżeli trójka liczb $(x,y,z)$ jest rozwiązaniem równania, to rozwiązaniem jest także trójka mniejszych liczb $(x/2,\ y/2,\ z/2)$, co prowadzi do sprzeczności.

**Zadanie 21.** Dany jest czworościan foremny o krawędzi 1. Punkt $P$ należy do wnętrza tego czworościanu. Suma odległości punktu $P$ od krawędzi tego czworościanu jest równa $s$. Wykaż, że

$$s \geqslant \frac{3\sqrt{2}}{2}\,.$$

## Rozwiązanie

Przez każde dwie przeciwległe krawędzie czworościanu poprowadźmy parę równoległych płaszczyzn. Otrzymane w ten sposób trzy pary płaszczyzn wyznaczają równoległościan (rys. 8). Ponieważ dany czworościan jest foremny, więc tak zbudowany równoległościan jest sześcianem. Co więcej, krawędź tego sześcianu ma długość $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, jako bok prostokątnego trójkąta równoramiennego o przeciwprostokątnej długości 1.



rys. 8

Oznaczmy wierzchołki danego czworościanu przez $A$, $B$, $C$, $D$. Wykażemy najpierw, że suma odległości punktu $P$ od krawędzi $AB$ i $CD$ jest nie mniejsza od $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Oznaczmy przez $p$ i $q$ płaszczyzny opisanego powyżej sześcianu zawierające odcinki odpowiednio $AB$ i $CD$. Płaszczyzny $p$ i $q$ są równoległe. Odległość punktu $P$ od odcinka $AB$ jest nie mniejsza od odległości punktu $P$ od płaszczyzny $p$. Podobnie, odległość punktu $P$ od odcinka $CD$ jest nie mniejsza od odległości tego punktu od płaszczyzny $q$. Wobec tego suma tych odległości jest nie mniejsza od odległości między płaszczyznami $p$ i $q$, a ta wynosi $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, czyli tyle, ile długość krawędzi sześcianu.

Analogicznie dowodzimy, że suma odległości punktu $P$ od krawędzi $AC$ i $BD$ jest nie mniejsza od $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ oraz suma odległości punktu $P$ od krawędzi $AD$ i $BC$ jest nie mniejsza od $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Wobec tego suma wszystkich odległości jest nie mniejsza od $\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

## Mecz matematyczny

**Zadanie 22.** Czy liczba $7+5\sqrt{2}$ jest sumą liczb postaci $(x+y\sqrt{2})^2$, gdzie $x$, $y$ są liczbami wymiernymi?

### Rozwiązanie

Wykażemy, że liczba $7+5\sqrt{2}$ nie da się przedstawić jako suma liczb postaci $(x+y\sqrt{2})^2$, gdzie $x$, $y$ są liczbami wymiernymi.

Zauważmy, że jeżeli dla pewnych liczb wymiernych $a$, $b$, $c$, $d$ zachodzi równość $a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$, to $a=c$ oraz $b=d$.

Istotnie, gdyby $b\neq d$, to powyższa równość oznaczałaby, że

$$\sqrt{2}=\frac{a-c}{d-b}.$$

Lewa strona tej zależności jest liczbą niewymierną, a prawa wymierną — sprzeczność. W takim razie $b=d$ i w konsekwencji $a=c$.

Wykorzystując powyższą obserwację, dochodzimy do wniosku, że gdyby dla pewnych liczb wymiernych $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ zachodziła równość

$$7+5\sqrt{2}=\left(x_1+y_1\sqrt{2}\right)^2+\left(x_2+y_2\sqrt{2}\right)^2+\ldots+\left(x_n+y_n\sqrt{2}\right)^2,$$

to zachodziłyby również równości

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2+2\cdot\left(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2\right)=7$$

oraz

$$2\cdot(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n)=5.$$

Wówczas także

$$7-5\sqrt{2}=\left(x_1-y_1\sqrt{2}\right)^2+\left(x_2-y_2\sqrt{2}\right)^2+\ldots+\left(x_n-y_n\sqrt{2}\right)^2.$$

Jednak powyższa równość nie może mieć miejsca, gdyż liczba

$$7-5\sqrt{2}=\sqrt{49}-\sqrt{50}$$

jako liczba ujemna nie jest sumą kwadratów liczb rzeczywistych.

**Zadanie 23.** Okręgi $o$, $p$ mają różne promienie i przecinają się w punktach $A$ i $B$. Prosta $k$ jest styczna do okręgów $o$ i $p$ odpowiednio w punktach $M$ i $N$, a prosta $l$ jest styczna do tych okręgów odpowiednio w punktach $O$ i $P$. Wykaż, że ortocentra trójkątów $MNA$, $MNB$, $OPA$ i $OPB$ są wierzchołkami prostokąta.

## Rozwiązanie

Bez straty ogólności możemy założyć, że punkt $A$ jest przecięciem okręgów leżącym bliżej prostej $k$ (rys. 9). Oznaczmy ortocentra trójkątów $MNA$ i $MNB$ odpowiednio przez $G$ i $H$. Wykażemy najpierw, że czworokąt $AGBH$ jest równoległobokiem. Zauważmy, że spełniona jest równość

$$\begin{aligned}\sphericalangle MGN = 180^\circ - \sphericalangle GMN - \sphericalangle GNM = (90^\circ - \sphericalangle GMN) + (90^\circ - \sphericalangle GNM) =\\ = \sphericalangle ANM + \sphericalangle AMN = 180^\circ - \sphericalangle MAN\,.\end{aligned}$$

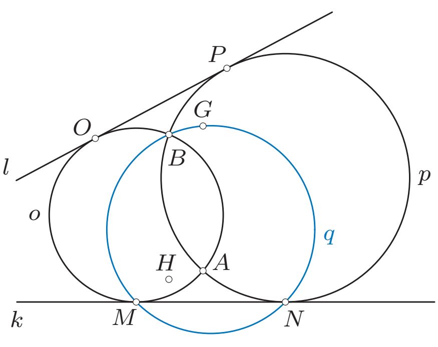
Analogicznie możemy otrzymać równość $\sphericalangle MHN = 180^\circ - \sphericalangle MBN$. Ponadto z twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą uzyskujemy

$$\sphericalangle ANM = \sphericalangle ABN \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle AMN = \sphericalangle ABM.$$

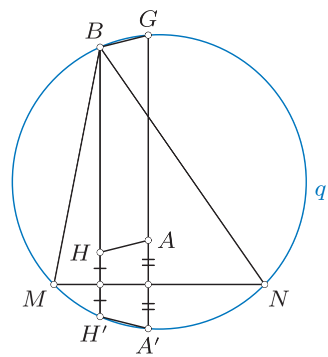
Korzystając z powyższych równości, otrzymujemy

$$\sphericalangle MGN = \sphericalangle ANM + \sphericalangle AMN = \sphericalangle ABN + \sphericalangle ABM = \sphericalangle MBN.$$

Wobec tego, skoro punkty $G$ i $B$ leżą po jednej stronie prostej $k$, to punkty $M$, $N$, $G$, $B$ leżą na jednym okręgu; nazwijmy ten okrąg $q$.




rys. 9




rys. 10

Oznaczmy przez $A'$ i $H'$ odpowiednio odbicia punktów $A$ i $H$ względem prostej $MN$. Wówczas $A'$ i $H'$ leżą odpowiednio na prostych $AG$ i $BH$, ponieważ proste te są prostopadłe do prostej $MN$ (rys. 10). Ponadto

$$\sphericalangle MH'N = \sphericalangle MHN = 180^\circ - \sphericalangle MBN = 180^\circ - \sphericalangle MGN = \sphericalangle MAN = \sphericalangle MA'N,$$

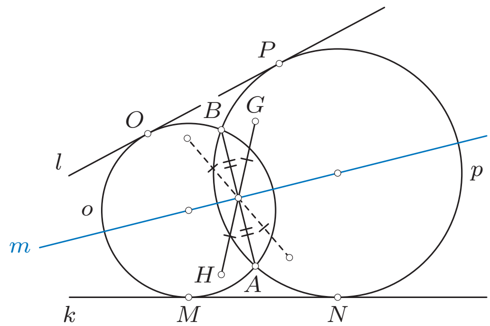
wobec tego punkty $A'$ i $H'$ leżą na okręgu $q$.

Proste $AG$ i $BH$ są równoległe, ponieważ obie są prostopadłe do prostej $MN$. Zatem czworokąt $GA'H'B$ jest trapezem wpisanym w okrąg, czyli trapezem równoramiennym. Warto tutaj zauważyć, że proste $AG$ i $BH$ się nie pokrywają, ponieważ prosta $AB$ nie może być prostopadła do prostej $k$. Zatem zachodzi równość

$$\sphericalangle BGA' = \sphericalangle H'A'G = \sphericalangle H'A'A = \sphericalangle HAA',$$

gdzie ostatnia równość wynika z symetrii względem prostej $MN$. Stąd wniosek, że $BG \parallel HA$, co w połączeniu z $AG \parallel BH$ daje nam, że czworokąt $AGBH$ jest równoległobokiem. Wobec tego środek odcinka $AB$ jest środkiem odcinka $HG$.

Oznaczmy przez $m$ prostą, do której należą środki okręgów $o$ i $p$ (rys. 11). Wówczas środek odcinka $HG$, będący również środkiem odcinka $AB$, leży na prostej $m$. W symetrii względem prostej $m$ każdy z okręgów $o$, $p$ przechodzi na siebie, prosta $k$ przechodzi na prostą $l$, a punkty $A$, $M$, $N$ odpowiednio na punkty $B$, $O$, $P$. Wobec tego trójkąty $OPA$ i $OPB$ są symetryczne względem prostej $m$ odpowiednio do trójkątów $MNB$ i $MNA$. W szczególności odcinek łączący ortocentra trójkątów $OPA$ i $OPB$ jest symetryczny względem prostej $m$ do odcinka $HG$.




rys. 11

Czworokąt zbudowany z ortocentrów trójkątów z zadania ma zatem oś symetrii przechodzącą przez środek jednej z przekątnych. Stąd wniosek, że jest to też środek drugiej przekątnej, co więcej przekątne te są równej długości. Czworokąt, w którym przekątne są równej długości i przecinają się w środkach jest prostokątem.

**Zadanie 24.** Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych $m$, $n$ zachodzi nierówność

$$\frac{m^m}{m!} \cdot \frac{n^n}{n!} < \frac{(m+n)^{m+n}}{(m+n)!}.$$

## Rozwiązanie

Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona, otrzymujemy

$$(m+n)^{m+n} = \sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} m^k n^{m+n-k}.$$

Ponieważ suma po prawej stronie ma co najmniej trzy składniki, a przy tym wszystkie jej składniki są dodatnie, jest ona większa od każdego swojego składnika, w szczególności od składnika odpowiadającego $k=m$. Mamy więc

$$\binom{m+n}{m} \cdot m^m \cdot n^n < (m+n)^{m+n},$$

co można przekształcić kolejno do:

$$\frac{(m+n)!}{m! \cdot n!} \cdot m^m \cdot n^n < (m+n)^{m+n},$$

$$\frac{m^m}{m!} \cdot \frac{n^n}{n!} < \frac{(m+n)^{m+n}}{(m+n)!}.$$

Dowód nierówności danej w treści zadania jest więc zakończony.

**Zadanie 25.** Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Wykaż, że środki okręgów wpisanych w trójkąty $ABC$, $BCD$, $CDA$ i $DAB$ są wierzchołkami prostokąta.

## Rozwiązanie

Oznaczmy przez $M$ i $N$ odpowiednio środki łuków $AB$ i $BC$, niezawierających punktu $D$. Przez $X$, $Y$, $Z$ oznaczmy środki okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty $DAB$, $ABC$ i $BCD$ (rys. 12).

Analogicznie jak w rozwiązaniu zadania 12 uzyskujemy równości

$$MA = MX = MY = MB \quad \text{oraz} \quad NB = NY = NZ = NC.$$

W szczególności na czworokątach $AXYB$ oraz $BYZC$ można opisać okręgi. Zatem

$$180° - \sphericalangle BYX = \sphericalangle BAX\,,$$
$$180° - \sphericalangle BYZ = \sphericalangle BCZ\,.$$

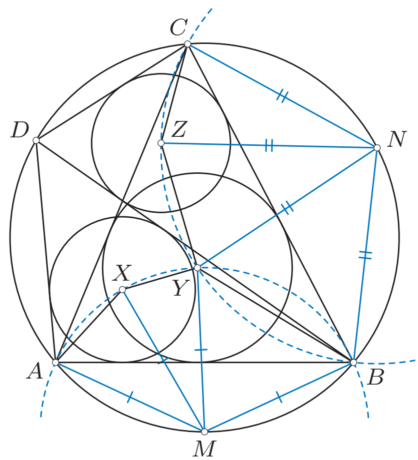
Po dodaniu powyższych równości stronami otrzymujemy

$$360° - \sphericalangle BYX - \sphericalangle BYZ = \sphericalangle BAX + \sphericalangle BCZ\,,$$

skąd

$$\sphericalangle XYZ = \tfrac{1}{2}(\sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD) = 90°.$$

Wobec tego jeden z kątów czworokąta złożonego ze środków okręgów wpisanych jest prosty. Analogicznie dowodzimy, że pozostałe kąty są proste, co daje tezę.




rys. 12

**Zadanie 26.** Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych $a$, $b$, $c$, $d$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a^2+b^2}{c+d} + \frac{a^2+c^2}{d+b} + \frac{a^2+d^2}{b+c} \geqslant 3a.$$

## Rozwiązanie

Wykażemy, że

$$\frac{a^2+b^2}{c+d} \geqslant a+b-\frac{1}{2}(c+d). \tag{1}$$

Przekształcając równoważnie, zapisujemy powyższą nierówność kolejno jako

$$a^2+b^2 \geqslant (a+b)(c+d) - \frac{1}{2}(c+d)^2,$$

$$a^2+b^2+\frac{1}{2}(c+d)^2 \geqslant (a+b)(c+d). \tag{2}$$

Zauważmy, że z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną wynika

$$a^2+b^2 = \frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right) + \frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right) \geqslant \frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right) + \frac{1}{2}\cdot 2ab = \frac{1}{2}(a+b)^2.$$

Stąd i ponownie z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną otrzymujemy

$$a^2+b^2+\frac{1}{2}(c+d)^2 \geqslant \frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{2}(c+d)^2 \geqslant (a+b)(c+d),$$

co daje nierówność (2) i tym samym kończy dowód nierówności (1).

Analogicznie dowodzimy, że

$$\frac{a^2+c^2}{d+b} \geqslant a+c-\frac{1}{2}(d+b) \tag{3}$$

oraz

$$\frac{a^2+d^2}{b+c} \geqslant a+d-\frac{1}{2}(b+c). \tag{4}$$

Dodając stronami (1), (3) i (4), otrzymujemy nierówność daną w tezie zadania.

**Zadanie 27.** Udowodnij, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej $n$ zapis dziesiętny liczby $n!$ kończy się mniej niż $n/4$ zerami.

**Rozwiązanie**

Skorzystamy z następującego lematu, którego dowód znajduje się w rozwiązaniu zadania 31 z *Ligi zadaniowej Obozu Naukowego OMG* (seria VII, styczeń 2013):

*Lemat*

Liczba pierwsza $p$ występuje w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby $N!$ z wykładnikiem

$$\left[\frac{N}{p}\right]+\left[\frac{N}{p^2}\right]+\left[\frac{N}{p^3}\right]+\left[\frac{N}{p^4}\right]+\ldots,$$

gdzie $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od liczby $x$.

*Uwaga*

Powyższa suma jest skończona, gdyż od pewnego miejsca występujące w niej składniki są równe 0.

Z lematu wynika, że liczba 5 wchodzi do rozkładu liczby $n!$ z wykładnikiem

$$w=\left[\frac{n}{5}\right]+\left[\frac{n}{25}\right]+\left[\frac{n}{125}\right]+\left[\frac{n}{625}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{5^k}\right],$$

gdzie $k$ jest największą liczbą całkowitą spełniającą nierówność $5^k \leqslant n$. Korzystając z oszacowania $[x] \leqslant x$ oraz ze wzoru na sumę ciągu geometrycznego, otrzymujemy

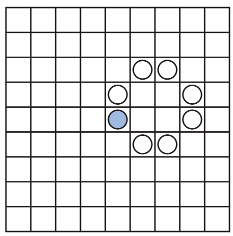
$$w \leqslant \frac{n}{5}+\frac{n}{25}+\frac{n}{125}+\frac{n}{625}+\ldots+\frac{n}{5^k}=\frac{n}{5}\cdot\frac{1-\frac{1}{5^k}}{1-\frac{1}{5}}=n\cdot\frac{1-\frac{1}{5^k}}{5-1}=\frac{n}{4}-\frac{n}{4\cdot 5^k}<\frac{n}{4}.$$

Ponieważ liczba zer końcowych w zapisie dziesiętnym dodatniej liczby całkowitej nie przekracza wykładnika, z jakim liczba 5 wchodzi do rozkładu tej liczby na czynniki pierwsze, liczba $n!$ ma mniej niż $n/4$ zer końcowych.

**Zadanie 28.** Na każdym polu szachownicy o wymiarach $2013\times 2013$ znajduje się żarówka. Dla każdego rzędu poziomego, pionowego i ukośnego dysponujemy przełącznikiem, który zmienia stan (zgaszona/zapalona) wszystkich żarówek w tym rzędzie. Rząd ukośny tworzą pola, których środki leżą na prostej przecinającej boki szachownicy pod kątem $45^\circ$. W szczególności rzędem jest pojedyncza żarówka w polu narożnym. Początkowo zapalona jest żarówka w centralnym polu szachownicy, a pozostałe żarówki są zgaszone. Czy używając dostępnych przełączników można doprowadzić do stanu, w którym wszystkie żarówki są zgaszone?

**Rozwiązanie**

Rozważmy 8 żarówek umieszczonych na polach pokazanych na rysunku 13, który przedstawia kwadratowy fragment szachownicy wokół jej centralnego pola, gdzie znajduje się jedyna zapalona żarówka.



rys. 13

Zauważmy, że każdy przełącznik albo nie zmienia stanu żadnej z tych żarówek, albo zmienia stan dokładnie dwóch. Zatem manipulowanie przełącznikami nie zmienia parzystości liczby zapalonych żarówek spośród tych ośmiu. Skoro więc na początku zapalona była jedna żarówka, to nie można zgasić ośmiu wybranych żarówek, a tym bardziej nie można zgasić wszystkich żarówek na szachownicy.

**Zadanie 29.** Czy istnieje liczba naturalna większa od 1, którą można przedstawić w postaci $n^{n^k}$, gdzie $n$, $k$ są dodatnimi liczbami całkowitymi, na co najmniej 2013 sposobów?

**Rozwiązanie**

Wykażemy, że taka liczba istnieje.

W tym celu przyjmijmy

$$n_1=2 \quad \text{oraz} \quad n_{i+1}=n_i^{n_i} \ \text{ dla } \ i=1,2,3,\ldots,2012,$$

a także

$$k_{2013}=1 \quad \text{oraz} \quad k_i=1+n_i\cdot k_{i+1} \ \text{ dla } \ i=1,2,3,\ldots,2012.$$

Wówczas dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej $i\leqslant 2012$ zachodzą równości

$$n_{i+1}^{n_{i+1}^{k_{i+1}}}=(n_i^{n_i})^{(n_i^{n_i})^{k_{i+1}}}=n_i^{n_i\cdot n_i^{n_i\cdot k_{i+1}}}=n_i^{n_i^{1+n_i\cdot k_{i+1}}}=n_i^{n_i^{k_i}}.$$

Stąd wynika, że liczby $n_i^{n_i^{k_i}}$, gdzie $i=1,2,3,\ldots,2013$, są równe.

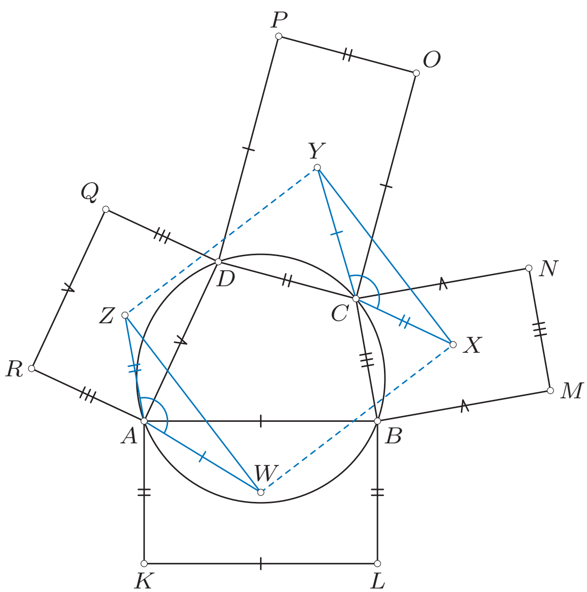
**Zadanie 30.** Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Na bokach tego czworokąta budujemy na zewnątrz takie prostokąty $ABLK$, $BCNM$, $CDPO$ i $DARQ$, aby $BL=CD$, $CN=DA$, $DP=AB$, $AR=BC$. Udowodnij, że środki tych prostokątów są wierzchołkami prostokąta.

## Rozwiązanie

Oznaczmy przez $W$, $X$, $Y$, $Z$ odpowiednio środki prostokątów $ABLK$, $BCNM$, $CDPO$, $DARQ$ (rys. 14). Zauważmy, że prostokąty $ABLK$ i $DPOC$ są przystające, więc $AW=CY$ oraz $\sphericalangle WAB=\sphericalangle YCO$. Podobnie prostokąty $BCNM$ i $ARQD$ są przystające, czyli $AZ=CX$ oraz $\sphericalangle ZAD=\sphericalangle XCN$. Ponadto

$$\sphericalangle NCO=360^\circ-\sphericalangle OCD-\sphericalangle DCB-\sphericalangle BCN=180^\circ-\sphericalangle DCB=\sphericalangle DAB.$$

Wobec tego $\sphericalangle XCY=\sphericalangle ZAW$, przy czym przez $\sphericalangle XCY$ mamy na myśli kąt zawierający punkty $O$ i $N$, a przez $\sphericalangle ZAW$ rozumiemy kąt zawierający punkty $B$ i $D$. Wówczas trójkąty $XCY$ i $ZAW$ są przystające z cechy bok–kąt–bok. Warto zwrócić uwagę, że kąt może być półpełny, ta cecha przystawania pozostaje wtedy w mocy. Wówczas $XY=ZW$ oraz $\sphericalangle CYX=\sphericalangle AWZ$. Analogicznie możemy udowodnić, że trójkąty $WBX$ i $YDZ$ są przystające, więc $WX=YZ$ oraz $\sphericalangle BWX=\sphericalangle DYZ$.




rys. 14

Stąd wniosek, że czworokąt $WXYZ$ jest równoległobokiem, do zakończenia dowodu wystarczy więc wykazać, że suma jego przeciwległych kątów wynosi $180^\circ$. Z przystawania prostokątów $ABLK$ i $DPOC$ mamy

$$\sphericalangle AWB+\sphericalangle CYD=180^\circ.$$

Ponadto wiemy już, że

$$\sphericalangle AWZ = \sphericalangle CYX \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle BWX = \sphericalangle DYZ.$$

Jeżeli kąty $XCY$, $ZAW$ nie są półpełne, to dokładnie jeden z kątow $CYX$, $AWZ$ leży wewnątrz równoległoboku $WXYZ$. Podobna sytuacja ma miejsce z kątami $BWX$, $DYZ$. Wobec tego

$$\begin{aligned}\sphericalangle ZWX + \sphericalangle XYZ = \sphericalangle AWX \pm \sphericalangle AWZ + \sphericalangle CYZ \mp \sphericalangle CYX = \\ = \sphericalangle AWX + \sphericalangle CYZ,\end{aligned}$$

a także

$$\begin{aligned}\sphericalangle AWX + \sphericalangle CYZ = \sphericalangle AWB \pm \sphericalangle BWX + \sphericalangle CYD \mp \sphericalangle DYZ = \\ = \sphericalangle AWB + \sphericalangle CYD = 180^\circ .\end{aligned}$$

Te same równości mają miejsce, gdy co najmniej jeden z kątów $XCY$, $ZAW$, $BWX$, $DYZ$ jest pólpełny. Suma przeciwległych kątów w równoległoboku $WXYZ$ wynosi $180^\circ$, więc jest to prostokąt.

**Zadanie 31.** Na stosie leży 2013 kamieni. Ruch polega na wykonaniu jednej z następujących operacji:
- rozdzielenie dowolnego stosu zawierającego co najmniej dwa kamienie na dwa niepuste stosy,
- przełożenie jednego kamienia z większego stosu na mniejszy, pod warunkiem, że przed wykonaniem ruchu liczby kamieni w tych stosach różniły się o więcej niż 1.

Czy zgodnie z powyższymi regułami można wykonać ciąg trzech milionów ruchów?

## Rozwiązanie

Rozważmy sumę kwadratów liczb kamieni w poszczególnych stosach. Wykażemy, że w każdym ruchu ta liczba zmniejsza się o co najmniej dwa.

I tak, przy dokonaniu rozdziału stosu złożonego z $n$ kamieni na dwa stosy zawierające $k$ oraz $n-k$ kamieni, suma kwadratów liczb kamieni zmniejsza się o

$$n^2-(k^2+(n-k)^2) = n^2-k^2-n^2+2kn-k^2 = 2kn-2k^2 = 2(n-k)k \geqslant 2,$$

ponieważ zgodnie z warunkami zadania $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

Natomiast przełożenie kamienia ze stosu liczącego $m$ kamieni na stos złożony z $n$ kamieni zmniejsza sumę kwadratów liczb kamieni o

$$\begin{aligned}m^2+n^2-((m-1)^2+(n+1)^2) = m^2+n^2-m^2+2m-1-n^2-2n-1 = \\ = 2(m-n)-2 \geqslant 2\cdot 2-2 = 2,\end{aligned}$$

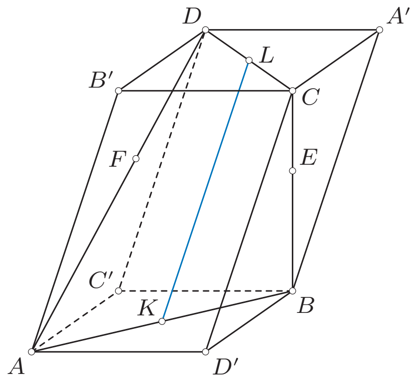
gdyż reguły wykonywania ruchów wymagają, aby $m \geqslant n+2$.

Ponieważ na początku suma kwadratów liczb kamieni jest równa $2013^2$, a więc jest mniejsza od 6 000 000, nie jest możliwe wykonanie trzech milionów ruchów.

**Zadanie 32.** W czworościanie $ABCD$ punkty $K$ i $L$ są środkami odpowiednio krawędzi $AB$ i $CD$. Płaszczyzna $p$ przechodzi przez punkty $K$ i $L$ oraz przecina krawędzie $BC$ i $AD$ tego czworościanu odpowiednio w punktach $E$ i $F$. Wykaż, że środek odcinka $EF$ leży na prostej $KL$.

**Rozwiązanie**

Przez każde dwie przeciwległe krawędzie czworościanu $ABCD$ poprowadźmy równoległe płaszczyzny. Uzyskane w ten sposób trzy pary płaszczyzn równoległych wyznaczają równoległościan (rys. 15). Oznaczmy pozostałe wierzchołki tego równoległościanu przez $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ w taki sposób, żeby odcinki $AA'$, $BB'$, $CC'$, $DD'$ nie były krawędziami równoległościanu.




rys. 15

Czworokąt $CA'DB'$ jest równoległobokiem, a punkt $L$ jest środkiem odcinka $CD$, więc jest także środkiem odcinka $A'B'$. Krawędzie $AB'$ oraz $BA'$ są równoległe i równej długości, więc czworokąt $ABA'B'$ jest równoległobokiem. Punkty $K$ i $L$ są środkami odcinków odpowiednio $AB$ i $A'B'$, więc $KL \parallel AB' \parallel BA'$, a co za tym idzie, prosta $KL$ jest równoległa do płaszczyzn $AC'DB'$ i $BA'CD'$.

Niech $q$ oznacza płaszczyznę równoległą do płaszczyzny $AC'DB'$, przechodzącą przez prostą $KL$. Ponieważ $AK = KB$, więc płaszczyzna $q$ jest równoodległa od płaszczyzn $AC'DB'$ i $BA'CD'$. Stąd wniosek, że dla dowolnej pary punktów $X, Y$ należących odpowiednio do płaszczyzn $AC'DB'$ i $BA'CD'$ środek odcinka $XY$ znajduje się na płaszczyźnie $q$. Punkt $E$ leży na prostej $BC$, więc leży też na płaszczyźnie $BA'CD'$. Z kolei punkt $F$ leży na prostej $AD$, więc na płaszczyźnie $AC'DB'$. Wobec tego środek odcinka $EF$ leży na płaszczyźnie $q$. Ponadto prosta $EF$ jest zawarta w płaszczyźnie $p$, więc środek odcinka $EF$ leży jednocześnie na płaszczyznach $p$ i $q$. Częścią wspólną tych płaszczyzn jest prosta $KL$, więc środek odcinka $EF$ musi na niej leżeć.

# Regulamin meczu matematycznego

## Ustalenia wstępne

**1.** W meczu biorą udział dwie drużyny. Każda z drużyn wybiera ze swojego grona Kapitana.

**2.** W pierwszej fazie meczu obie drużyny rozwiązują 11 zadań dostarczonych przez Jury i przygotowują się do zreferowania rozwiązań przy tablicy. Drugą fazą meczu jest rozgrywka.

## Rozgrywka

**3.** Ekipy na przemian wywołują drużynę przeciwną do zreferowania przy tablicy rozwiązania jednego z niewybranych dotąd zadań. Numer zadania jest wybierany przez drużynę wywołującą. Wywoływanie rozpoczyna drużyna wylosowana tuż przed rozgrywką.

**4.** Drużyna wywołana do rozwiązania zadania deklaruje, czy przyjmuje zadanie. Dalszy przebieg rozgrywki zależy od decyzji drużyny wywołanej.

*Jeśli drużyna wywołana przyjmuje zadanie...*

**5.** Drużyna wywołana staje się drużyną referującą.

**6.** Zawodnika drużyny referującej, który przedstawia rozwiązanie przy tablicy, wyznacza Kapitan drużyny przeciwnej.

**7.** Zawodnik może być wyznaczony jedynie wtedy, gdy każdy zawodnik z jego drużyny zakończył referowanie zadania nie mniej razy niż on. Nie można wyznaczyć zawodnika po raz drugi do tego samego zadania. Jeżeli do referowania wyznaczono Kapitana, wskazuje on na czas pobytu pod tablicą swego zastępcę.

**8.** Osoba referująca nie może korzystać z notatek, ani konsultować się ze swoją drużyną. Drużyna przeciwna nie może przeszkadzać lub przerywać referującemu.

**9.** Kapitan drużyny referującej może odwoływać osoby referujące dowolną liczbę razy. Także osoba referująca może zrezygnować z referowania. Wówczas Kapitan drużyny przeciwnej wskazuje kolejną osobę drużyny referującej do kontynuowania rozwiązania przy tablicy na zasadach opisanych w punktach **7** i **8**. Drużyna zmieniająca referującego traci $n$ punktów przy swojej $n$-tej zmianie w czasie meczu.

**10.** Łączny czas na zreferowanie rozwiązania przez drużynę referującą wynosi 10 minut. Po upływie tego czasu Jury może przerwać referowanie, poprosić o streszczenie dalszej części rozwiązania lub pozwolić na dalsze referowanie, w zależności od tego, czy rozwiązanie zdaniem Jury rokuje nadzieję na poprawność i zbliża się do końca.

**11.** Po oznajmieniu przez referującego, że referowanie rozwiązania zostało zakończone, drużyna przeciwna może zgłosić zastrzeżenia co do poprawności rozwiązania, a następnie referujący odpowiada na te zastrzeżenia.

**12.** Jeżeli podczas dyskusji drużyna wywołująca zwróciła uwagę na błędy lub luki dyskwalifikujące rozwiązanie, ma ona prawo do zreferowania brakujących części rozwiązania na zasadach określonych w punktach **6** – **11**.

**13.** Ostatecznie Jury ocenia zaprezentowane referaty oraz dyskusję i przyznaje obu drużynom nieujemne liczby punktów o sumie nie przekraczającej 10 punktów. Drużyna, która przedstawiła poprawne rozwiązanie, otrzymuje co najmniej 7 punktów.

*Jeśli drużyna wywołana nie przyjmuje zadania...*

**14.** Drużyna wywołująca staje się drużyną referującą i prezentuje rozwiązanie zgodnie z zasadami określonymi w punktach **6** – **11**.

**15.** Ostatecznie Jury przyznaje drużynie referującej od 7 do 10 punktów, jeżeli zaprezentowane rozwiązanie jest poprawne, albo $-10$ (minus dziesięć) punktów w przeciwnym przypadku. Jury może również przydzielić drużynie przeciwnej punkty za wskazanie luk lub błędów w przedstawionym rozwiązaniu.

### Ustalenia końcowe

**16.** Rozgrywka kończy się po wywołaniu 8 zadań. W przypadku remisu wywołuje się dodatkowo 2 zadania.

**17.** Przewodniczący Jury może nałożyć karę punktową na drużynę za niezgodne z niniejszym regulaminem zachowania jej zawodników.

**18.** Interpretacja regulaminu należy do przewodniczącego Jury.

---

## Spis treści