Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Juniorów — poziom OMJ

2–8 czerwca 2024 r.

Skład komputerowy: Bartosz Głowacki, Kosma Kasprzak, Arkadiusz Męcel, Witold Sikora

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Juniorów
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
ul. Śniadeckich 8
00-656 Warszawa
www.omj.edu.pl

Wstęp

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Juniorów (poziom OMJ) przeprowadzono w dniach 2-8 czerwca 2024 r. w Domu Rekolekcyjno-Konferencyjnym „Wieczernik” w Świętej Katarzynie (woj. świętokrzyskie). Do udziału w Obozie zakwalifikowano uczniów z klas 5-7 szkół podstawowych z najlepszymi wynikami w XIX OMJ.

Każdego dnia uczestnicy Obozu rozwiązywali zadania w formule konkursowej, pracując zarówno indywidualnie, jak i w grupach. Popołudnia poświęcone były na wykłady tematyczne i zajęcia warsztatowe. W czwartek odbył się spacer do Świętokrzyskiego Parku Narodowego, a w piątek przeprowadzony został mecz matematyczny.

W niniejszym opracowaniu zebrane są zadania konkursowe wraz z rozwiązaniami. Zachęcamy do wykorzystania tych materiałów w przygotowaniach do startów w kolejnych edycjach Olimpiady Matematycznej Juniorów — zwłaszcza w ramach treningu przed zawodami finałowymi, a także w przygotowaniach do rozpoczęcia przygody z Olimpiadą Matematyczną dla szkół ponadpodstawowych — podejmowanych jeszcze w trakcie lub bezpośrednio po zakończeniu nauki w szkole podstawowej.

Poziom trudności niektórych problemów zawartych w niniejszym opracowaniu przewyższa poziom zawodów finałowych OMJ. Tematyka podejmowana na Obozie odnosi się przy tym do programu merytorycznego Olimpiady, czerpiąc inspiracje z międzynarodowych zawodów matematycznych rozgrywanych na poziomie juniorskim.

Miłej lektury!

Kadra Obozu

Uczestnicy Obozu Naukowego OMJ (poziom OMJ)

Antoni Czapkowski, Zuzanna Czubińska, Wiktor Gatner, Antoni Glinka, Nina Teresa Głowacka, Marcin Jerzy Jaźwiński, Anna Teresa Jeżo, Karol Kaczmarek, Wojciech Klich, Aleksandra Ławniczak, Tomasz Miłkowski, Patryk Niewczas, Filip Tomasz Osiński, Dominik Puzio, Adam Jakub Rowiński, Piotr Słabicki, Michał Szczurek, Michał Paweł Waleron, Weronika Wilczek, Krzysztof Tomasz Witkowski.

Kadra: Paweł Dziuba (kierownik), Bartosz Głowacki, Kosma Kasprzak, Arkadiusz Męcel, Witold Sikora.

Rozkład ocen za rozwiązania zadań indywidualnych

Prace uczestników Obozu oceniane były w skali olimpijskiej 0, 2, 5, 6. Rozkład ocen przyznanych za rozwiązania zadań przedstawiony jest w poniższej tabeli.

	6 p.	5 p.	2 p.	0 p.
1.	10	3	1	6
2.	13	2	1	4
3.	1	2	4	13
4.	0	0	0	20
5.	0	0	5	15
6.	18	0	0	2
7.	4	1	5	10
8.	0	0	0	20
9.	2	2	2	14
10.	6	0	2	12
11.	19	0	1	0
12.	12	1	0	7
13.	9	2	2	7
14.	2	0	4	14
15.	3	1	0	16
16.	5	5	1	9
17.	5	1	1	13
18.	3	0	3	14
19.	1	5	2	12
20.	2	0	1	17

Zadania 21-32 rozwiązywane były w ramach pracy grupowej.

Treści zadań

Zadanie 1.

Znajdź wszystkie liczby sześciocyfrowe postaci $\overline{aaabbb}$, które są kwadratami liczby całkowitej.

Zadanie 2.

Niech $n \geqslant 3$ będzie liczbą całkowitą. Wykaż, że w zbiorze dowolnych n parami różnych liczb rzeczywistych można wskazać takie trzy liczby, że ich suma jest liczbą dodatnią lub takie dwie liczby, że ich suma jest liczbą ujemną.

Zadanie 3.

Wierzchołki n-kąta foremnego ponumerowano w pewnej kolejności liczbami całkowitymi od 1 do n. Wiadomo przy tym, że istnieje dodatnia liczba całkowita m taka, że pomiędzy każdymi dwoma wierzchołkami ponumerowanymi kolejnymi liczbami znajduje się m innych wierzchołków. Znajdź wartość n wiedząc, że pewne trzy kolejne wierzchołki wielokąta ponumerowano kolejno liczbami $11, 4, 17$.

Zadanie 4.

Dwusieczne trójkąta ABC przecinają się w punkcie I. Proste AC i BC odbito odpowiednio względem dwusiecznych BI i AI, a uzyskane w ten sposób proste przecięły się w punkcie X. Wykaż, że proste AB oraz XI są prostopadłe.

Zadanie 5.

Jacek napisał na tablicy wszystkie dodatnie dzielniki pewnej dodatniej liczby całkowitej n, po czym obliczył ich iloczyn. Placek zrobił to samo z pewną inną liczbą całkowitą dodatnią m. Wykaż, że uzyskali różne wyniki.

Zadanie 6.

Prostokąty $ABCD$ i $BEFG$, oba o polu 10, ułożone są w taki sposób, że punkt C leży na odcinku GB. Znajdź pole czworokąta $AFGD$.

Zadanie 7.

W galerii wisi 100 obrazów — każdy namalowany przy użyciu dokładnie k kolorów, przy czym żaden kolor nie występuje na wszystkich obrazach. Okazuje się, że niezależnie od tego jak wybierzemy trzy obrazy, pewien kolor występuje na wszystkich trzech. Jaka jest najmniejsza dodatnia liczba całkowita k, dla której taka sytuacja jest możliwa?

Zadanie 8.

W trójkącie ABC punkt D leży na boku AB w taki sposób, że okręgi wpisane w trójkąty ADC i DBC mają równe promienie. Niech dwusieczne kątów ACD i DCB przecinają bok AB odpowiednio w punktach X i Y. Wykaż, że $XD = DY$.

Zadanie 9.

Wykaż, że istnieje dziesięć parami różnych dodatnich liczb całkowitych takich, że żadna z nich nie dzieli żadnej innej, ale każda z nich dzieli kwadrat każdej innej.

Zadanie 10.

Na szachownicy o wymiarach 15×15 stoi 15 skoczków (koni) szachowych, po jednym w każdym rzędzie i w każdej kolumnie. W pewnym momencie każdy skoczek wykonuje jeden ruch. Czy jest możliwe, że w rezultacie nadal w każdym rzędzie i w każdej kolumnie stoi dokładnie jeden skoczek?

Zadanie 11.

Wyznacz wszystkie trójki liczb całkowitych (a, b, c) takich, że

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{oraz} \quad (a+1)^2 + (b+1)^2 = (c+1)^2.$$

Zadanie 12.

Punkty M i N są środkami odpowiednio boków AB i BC równoległoboku $ABCD$. Odcinki DM i DN przecinają odcinek AC odpowiednio w punktach X i Y. Wykaż, że $AX = XY = YC$.

Zadanie 13.

Niech $a \neq b$ będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Wykaż, że istnieje nieskończenie wiele dodatnich całkowitych n, dla których $\mathrm{NWD}(a+n, b+n) = 1$.

Zadanie 14.

W pewnej klasie jest n osób i wiadomo, że każda osoba ma w tej klasie co najmniej 2024 znajomych. Udowodnij, że można podzielić całą klasę na dwie drużyny tak, aby każda osoba miała w drużynie przeciwnej co najmniej 1012 znajomych.

Zadanie 15.

Wykaż, że dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 6$ można znaleźć (niekoniecznie różne) dodatnie liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_n$ spełniające

$$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \ldots + \frac{1}{a_n^2} = 1.$$

Zadanie 16.

Znajdź wszystkie trójki (a, b, c) liczb całkowitych spełniające układ równań

$$\begin{cases} a + bc = 6 \\ b + ca = 6 \\ c + ab = 6 \end{cases}$$

Zadanie 17.

Na płaszczyźnie dane jest sześć kół przecinających się w pewnym punkcie P. Wykaż, że środek pewnego z tych kół leży wewnątrz lub na brzegu innego z tych kół.

Zadanie 18.

Punkt M jest środkiem boku AD równoległoboku $ABCD$. Niech punkt F będzie spodkiem wysokości trójkąta BCM poprowadzonej z punktu B na prostą CM. Wykaż, że trójkąt AFB jest równoramienny.

Zadanie 19.

Dana jest dodatnia liczba rzeczywista a. Dla jakich trójek dodatnich liczb całkowitych (r, s, t) o sumie 2024 wartość

$$a^r + a^s + a^t$$

jest możliwie największa?

Zadanie 20.

Dany jest równoległobok $ABCD$, którego środkiem (tzn. punktem przecięcia przekątnych) jest punkt O. Niech P będzie wybranym punktem na płaszczyźnie. Oznaczmy przez M, N środki odcinków AP, BP i przyjmijmy, że odcinki MC i ND przecinają się w pewnym punkcie Q. Wykaż, że punkty O, P i Q są współliniowe.

Zadanie 21.

Rozstrzygnij czy kwadrat liczby całkowitej może być równy sumie kwadratów dwóch liczb pierwszych.

Zadanie 22.

Ustalmy liczbę całkowitą $n > 1$ i rozważmy liczbę, której zapis dziesiętny składa się ze złączonych kolejno zapisów dziesiętnych wszystkich liczb całkowitych od 1 do n. Czy możliwe jest, że ta rozważana liczba jest palindromem?

Zadanie 23.

Liczby naturalne od 1 do $2k$ podzielono na dwa rozłączne podzbiory k-elementowe tak, że dowolne dwie liczby z tego samego podzbioru mają nie więcej niż dwa różne wspólne dzielniki pierwsze. Jaka jest największa możliwa liczba k, dla której taka sytuacja jest możliwa?

Zadanie 24.

Klockiem nazywamy figurę powstałą po usunięciu jednego pola z kwadratu 2×2. Układamy pewną niezerową liczbę klocków w prostokącie o wymiarach 5×7 tak, by każdy zajmował pewne trzy pola prostokąta. Klocki mogą nachodzić na siebie nawzajem. Czy możemy w ten sposób sprawić, aby na każdym z pól prostokąta leżała taka sama liczba klocków?

Zadanie 25.

Operacją na wielokącie na płaszczyźnie nazwiemy wybranie dowolnej prostej przecinającej jego obwód w dokładnie dwóch punktach A i B, a następnie odbicie względem symetralnej odcinka AB jednej z dwóch części, na które wielokąt został przecięty. Udowodnij, że żadnym skończonym ciągiem operacji nie można przekształcić kwadratu w trójkąt.

Zadanie 26.

Dla każdej liczby całkowitej od 100 do 1000 obliczono iloczyn jej cyfr. Następnie dodano wszystkie uzyskane wyniki. Wykaż, że uzyskana suma jest sześcianem liczby całkowitej.

Zadanie 27.

Liczby rzeczywiste a, b, c są nieujemne i każda z nich jest mniejsza lub równa 2. Wykaż, że zachodzi nierówność

$$(a-b)(b-c)(a-c) \leqslant 2.$$

Zadanie 28.

Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych (a, b) dla których

$$2a^4 + 1 = b^2.$$

Zadanie 29.

Na płaszczyźnie narysowano cztery punkty w taki sposób, że po zmazaniu dowolnego z nich figura złożona z pozostałych trzech punktów jest osiowosymetryczna. Czy wynika stąd, że figura złożona ze wszystkich czterech punktów ma oś symetrii?

Zadanie 30.

Punkt D leżący wewnątrz trójkąta ABC spełnia warunek $AD = DB$. Proste CD i AB przecinają się w punkcie E spełniającym

$$\frac{CD}{CE} = \frac{EB}{AE}.$$

Wykaż, że trójkąt AEC jest równoramienny.

Zadanie 31.

Punkt M jest środkiem boku BC w trójkącie ABC. Oznaczmy przez I i J środki okręgów wpisanych w trójkąty AMB i AMC. Okręgi opisane na trójkątach ABI i ACJ przecinają się w punktach A i X. Wykaż, że punkt X leży na prostej AM.

Zadanie 32.

W trójkącie ostrokątnym ABC boki AC i BC są równej długości. Punkt D leżący wewnątrz trójkąta ABC spełnia $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD = 30^\circ$. Wykaż, że dwusieczne kątów ABC i ADC przecinają się na odcinku AC.

Rozwiązania zadań

Zadanie 1.

Znajdź wszystkie liczby sześciocyfrowe postaci $\overline{aaabbb}$, które są kwadratami liczby całkowitej.

Rozwiązanie: Zauważmy, że

$$\overline{aaabbb} = 111 \cdot \overline{a00b} = 111(1000a + b).$$

Zapiszmy 111 jako iloczyn liczb pierwszych $3 \cdot 37$. Obie te liczby dzielą $\overline{aaabbb}$, więc aby była ona kwadratem, zachodzić musi podzielność

$$3^2 \cdot 37^2 \mid \overline{aaabbb}, \qquad \text{czyli} \qquad 111 \mid 1000a + b.$$

Skoro

$$1000a + b = 9 \cdot 111a + a + b,$$

to z powyższej podzielności wynikałoby również, że liczba 111 jest dzielnikiem liczby $a + b$, co nie jest możliwe, gdyż $1 \leqslant a + b \leqslant 18$. Zatem żadna liczba postaci $\overline{aaabbb}$ nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 2.

Niech $n \geqslant 3$ będzie liczbą całkowitą. Wykaż, że w zbiorze dowolnych n parami różnych liczb rzeczywistych można wskazać takie trzy liczby, że ich suma jest liczbą dodatnią lub takie dwie liczby, że ich suma jest liczbą ujemną.

Rozwiązanie: Rozważmy dowolne n parami różnych liczb rzeczywistych. Wybierzmy pewne trzy i oznaczmy je przez $a < b < c$. Rozpatrujemy dwa przypadki.

- Jeśli $a + b < 0$, to liczby a, b tworzą parę spełniającą warunek zadania.
- Jeśli $a + b \geqslant 0$, to jedna z liczb a, b musi być nieujemna, a skoro liczba c jest większa od obu z nich, to musi być ona dodatnia. Zatem

  $$a + b + c > a + b + 0 \geqslant 0,$$

  więc uzyskujemy trójkę liczb o dodatniej sumie.

Zadanie 3.

Wierzchołki n-kąta foremnego ponumerowano w pewnej kolejności liczbami całkowitymi od 1 do n. Wiadomo przy tym, że istnieje dodatnia liczba całkowita m taka, że pomiędzy każdymi dwoma wierzchołkami ponumerowanymi kolejnymi liczbami znajduje się m innych wierzchołków. Znajdź wartość n wiedząc, że pewne trzy kolejne wierzchołki wielokąta ponumerowano kolejno liczbami $11, 4, 17$.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy bez straty ogólności, że wierzchołki n-kąta ponumerowane liczbami $11, 4, 17$ leżą w kolejności zgodnej z ruchem wskazówek zegara. Nazwijmy *skokiem w prawo* przejście w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara z dowolnego wierzchołka A rozważanego n-kąta do takiego wierzchołka B, tak by między nimi znajdowało się dokładnie m wierzchołków, a *skokiem w lewo* — przejście o tyle samo wierzchołków w kierunku przeciwnym.

Wiemy, że z wierzchołka o numerze 1 do wierzchołka o numerze 2 można się dostać skokiem w którąś stronę. Ewentualnie zastępując m przez $n-m-2$ możemy założyć, że był to skok w lewo.

Nietrudno uzasadnić, że z wierzchołka o numerze i do wierzchołka o numerze $i+1$ możemy się dostać skokiem w lewo, dla $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Rzeczywiście, dla $i = 1$ jest to prawda. Załóżmy więc, że jest to prawda dla pewnego $1 \leqslant i < n-1$. Wtedy skacząc z wierzchołka $i+1$ w pewną stronę, musimy napotkać wierzchołek $i+2$. Ale skok w prawo przeprowadziłby nas na wierzchołek i, więc musiał to być skok w lewo.

Skoro wierzchołki o numerach 11 i 4 są sąsiednie, to po wykonaniu siedmiu skoków w lewo (w każdym przesuwając się po brzegu wielokąta o $m+1$ wierzchołków), począwszy od wierzchołka o numerze 4, okrążymy wielokąt pewną liczbę razy i w rezultacie znajdziemy się o jeden wierzchołek na lewo. Otrzymujemy więc podzielność

$$n \mid 7(m+1) - 1.$$

Rozumując podobnie dla wierzchołków o numerach 11 i 17, otrzymujemy podzielność

$$n \mid 6(m+1) + 2.$$

Zatem przez n podzielna jest również liczba:

$$7 \cdot (6(m+1) + 2) - 6 \cdot (7(m+1) - 1) = 20.$$

Jasne jest, że $n \geqslant 17$, więc jedyną możliwością jest $n = 20$. Nietrudno sprawdzić, że dostajemy w tym przypadku $m = 2$, a dla takiej wartości m sytuacja opisana w treści zadania faktycznie zachodzi.

Zadanie 4.

Dwusieczne trójkąta ABC przecinają się w punkcie I. Proste AC i BC odbito odpowiednio względem dwusiecznych BI i AI, a uzyskane w ten sposób proste przecięły się w punkcie X. Wykaż, że proste AB oraz XI są prostopadłe.

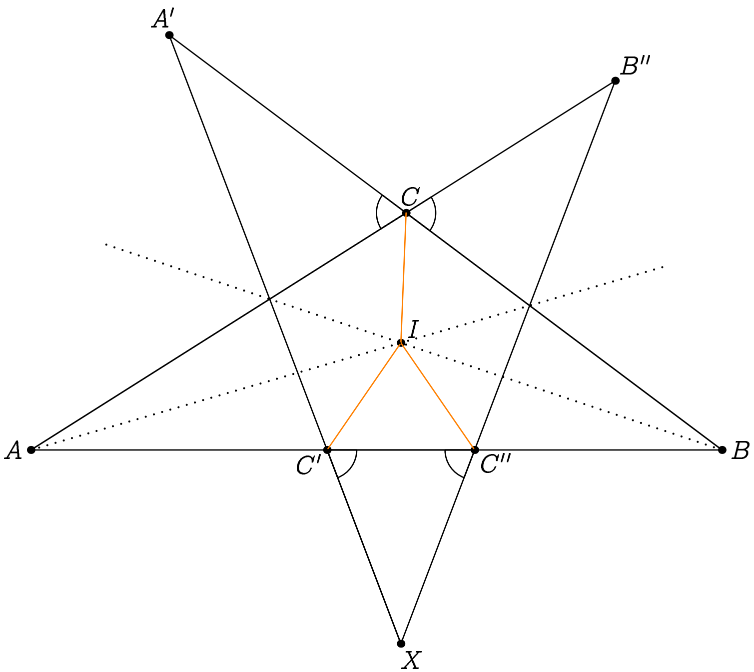
Rozwiązanie: Załóżmy, że punkt X leży po przeciwnej stronie prostej AB niż punkt C; w przeciwnym wypadku rozwiązanie przebiega podobnie. Oznaczmy obrazy punktów A, C w symetrii względem prostej BI odpowiednio przez A' i C'. Symetria zachowuje kąty, więc (korzystając z tego, że punkty A', X są po przeciwnych stronach punktu C')

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle A'C'B = \sphericalangle AC'X$$

Definiując punkty B'' i C'' jako obrazy punktów B, C w symetrii względem dwusiecznej AI, możemy rozumować analogicznie jak wyżej i zauważyć, że

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle AC''B'' = \sphericalangle BC''X$$

Z tych równości wynika, że trójkąt $C'XC''$ jest równoramienny, czyli $C'X = C''X$. Oczywiście zachodzą też równości $CI = C'I = C''I$. Zatem prosta XI jest symetralną odcinka $C'C''$, czyli jest do niego prostopadła.



Zadanie 5.

Jacek napisał na tablicy wszystkie dodatnie dzielniki pewnej dodatniej liczby całkowitej n, po czym obliczył ich iloczyn. Placek zrobił to samo z pewną inną liczbą całkowitą dodatnią m. Wykaż, że uzyskali różne wyniki.

Rozwiązanie:

Niech dzielnikami liczby n będą $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$. Interesuje nas więc iloczyn $d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_k$. Aby uzależnić go od n, będziemy potrzebowali następującego prostego faktu: jeżeli liczba d jest dzielnikiem liczby n, to dzielnikiem n jest również liczba $\frac{n}{d}$. Stąd uzyskujemy:

$$(d_1 \ldots d_k)^2 = \left(d_1 \cdot \frac{n}{d_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(d_k \cdot \frac{n}{d_k}\right) = \underbrace{n \cdot \ldots \cdot n}_{\text{k razy}} = n^k.$$

W rezultacie $d_1 \cdot \ldots \cdot d_k = n^{\frac{k}{2}}$.

Przypuśćmy wbrew tezie zadania, że Jacek i Placek otrzymali ten sam wynik. Wtedy

$$n^{\frac{k}{2}} = m^{\frac{t}{2}},$$

gdzie t to liczba dzielników liczby m. Stąd

$$n^k = m^t$$

Załóżmy bez straty ogólności, że $n > m$. Wtedy $t > k$. Jasne jest też, że jeśli p jest dzielnikiem pierwszym liczby m, to jest również dzielnikiem pierwszym liczby n (i analogicznie w drugą stronę), więc rozkłady m i n na czynniki pierwsze są postaci

$$n = p_1^{a_1} \ldots p_s^{a_s}$$
$$m = p_1^{b_1} \ldots p_s^{b_s}.$$

W równości $n^k = m^t$ liczba p_i występuje w rozkładzie liczby po lewej ka_i razy, a w rozkładzie liczby po prawej — tb_i razy, czyli $ka_i = tb_i$. Stąd dla $i = 1, 2, \ldots, s$ zachodzi

$$a_i = \frac{t}{k} \cdot b_i,$$

czyli w szczególności $a_i > b_i$. Oznacza to, że liczba m jest dzielnikiem n, więc liczba n ma więcej dzielników niż liczba m, a stąd $k > t$. Uzyskaliśmy sprzeczność, która oznacza, że Jacek i Placek musieli uzyskać różne wyniki.

Zadanie 6.

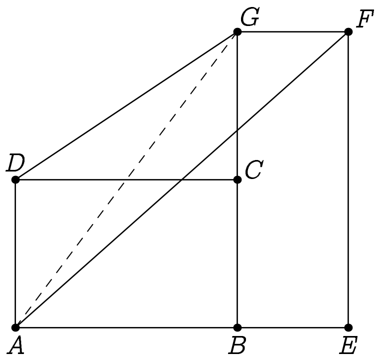
Prostokąty $ABCD$ i $BEFG$, oba o polu 10, ułożone są w taki sposób, że punkt C leży na odcinku GB. Znajdź pole czworokąta $AFGD$.

Rozwiązanie: Trójkąt AGD ma taką samą podstawę i wysokość, co trójkąt ABD, więc

$$[AGD] = [ABD] = \frac{[ABCD]}{2} = 5.$$

Podobnie $[AFG] = [EFG] = 5$, więc rozważany czworokąt ma pole równe

$$[AFGD] = [AGD] + [AFG] = 5 + 5 = 10.$$



Zadanie 7.

W galerii wisi 100 obrazów — każdy namalowany przy użyciu dokładnie k kolorów, przy czym żaden kolor nie występuje na wszystkich obrazach. Okazuje się, że niezależnie od tego jak wybierzemy trzy obrazy, pewien kolor występuje na wszystkich trzech. Jaka jest najmniejsza dodatnia liczba całkowita k, dla której taka sytuacja jest możliwa?

Rozwiązanie: Zacznijmy od wykazania, że dla $k = 3$ taka sytuacja jest możliwa. Podzielmy 100 obrazów na cztery grupy G_1, G_2, G_3, G_4 po 25 obrazów. Ustalmy pewne cztery kolory C_1, C_2, C_3, C_4 i dla każdego $1 \leqslant i \leqslant 4$ pokolorujmy obrazy znajdujące się w grupie G_i na wszystkie kolory poza kolorem C_i. W rezultacie, jeśli wybierzemy dowolne trzy obrazy, to jasne jest, że z pewnej grupy — powiedzmy G_i — nie wybraliśmy żadnego obrazu. Wtedy każdy z tych obrazów jest pokolorowany kolorem C_i, więc przedstawiona konstrukcja spełnia warunki zadania.

Udowodnimy teraz, że $k \geqslant 3$. Jasne jest, że użyto więcej niż jednego koloru, więc wystarczy rozważyć $k = 2$ (gdyby $k = 1$, to aby dowolne trzy obrazy miały wspólny kolor, wszystkie obrazy musiałyby mieć ten sam kolor, co przeczy założeniu). W tym przypadku wybierzmy dowolny obraz X — powiedzmy, że pokolorowany kolorami C_1, C_2. Z założenia pewien obraz Y nie zawiera koloru C_1. Jeśli nie zawiera również C_2, to niech Z będzie dowolnym innym obrazem. Jeśli natomiast Y zawiera C_2, to niech Z będzie obrazem różnym od X i Y niezawierającym C_2. Wtedy trójka obrazów X, Y, Z nie spełnia warunku zadania. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że $k \geqslant 3$, więc najmniejszym możliwym k jest 3.

Zadanie 8.

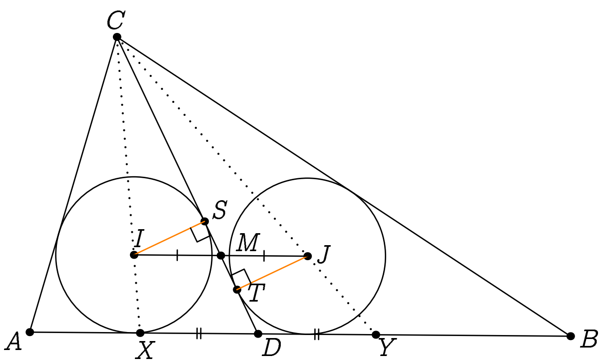
W trójkącie ABC punkt D leży na boku AB w taki sposób, że okręgi wpisane w trójkąty ADC i DBC mają równe promienie. Niech dwusieczne kątów ACD i DCB przecinają bok AB odpowiednio w punktach X i Y. Wykaż, że $XD = DY$.

Rozwiązanie: Oznaczmy środki okręgów wpisanych w trójkąty ADC i DBC odpowiednio przez I, J, a ich punkty styczności do prostej CD odpowiednio przez S, T. Niech M będzie punktem przecięcia odcinków IJ i CD. Zauważmy, że w trójkątach prostokątnych ISM i JTM kąty przy wierzchołku M są równe, a przyprostokątne IS i JT to promienie rozważanych okręgów, więc z założenia są równe. Zatem trójkąty ISM i JTM są przystające. W szczególności $IM = MJ$.

Skoro punkty I i J są równoodległe od AB (ta odległość to wspólny promień rozważanych okręgów), to proste IJ oraz AB są równoległe. Z twierdzenia Talesa otrzymujemy zatem

$$\frac{IM}{XD} = \frac{CM}{CD} = \frac{MJ}{DY},$$

a skoro $IM = MJ$, to $XD = DY$.



Zadanie 9.

Wykaż, że istnieje dziesięć parami różnych dodatnich liczb całkowitych takich, że żadna z nich nie dzieli żadnej innej, ale każda z nich dzieli kwadrat każdej innej.

Rozwiązanie: Niech $p_1, p_2, \ldots, p_{10}$ będą różnymi liczbami pierwszymi, a liczba M iloczynem tych liczb. Rozważmy liczby

$$n_i = M \cdot p_i$$

dla $i = 1, 2, \ldots, 10$. Wystarczy zauważyć, że dla $i \neq j$ liczba n_i nie jest dzielnikiem n_j, ponieważ p_i^2 jest dzielnikiem n_i oraz p_i^2 nie jest dzielnikiem n_j.

Z drugiej strony jest jasne, że każda liczba n_i dzieli M^2, która to liczba dzieli kwadrat dowolnego n_j. Stąd dla dowolnych $1 \leqslant i, j \leqslant 10$ liczba n_i jest dzielnikiem liczby n_j^2.

Zadanie 10.

Na szachownicy o wymiarach 15×15 stoi 15 skoczków (koni) szachowych, po jednym w każdym rzędzie i w każdej kolumnie. W pewnym momencie każdy skoczek wykonuje jeden ruch. Czy jest możliwe, że w rezultacie nadal w każdym rzędzie i w każdej kolumnie stoi dokładnie jeden skoczek?

Rozwiązanie: Przypuśćmy nie wprost, że tak się stało. Ponumerujmy kolumny i wiersze po kolei liczbami od 1 do 15. Dla każdego skoczka możemy rozważyć dwie jego współrzędne — numer wiersza i numer kolumny, w których się znajduje.

Gdy w każdej kolumnie i w każdym wierszu stoi dokładnie jeden skoczek, suma obu współrzędnych wszystkich skoczków równa jest

$$(1 + 2 + \ldots + 15) + (1 + 2 + \ldots + 15) = 16 \cdot 15 = 240.$$

Gdyby w wyniku wykonania ruchu przez każdego skoczka nadal w każdej kolumnie i każdym wierszu szachownicy stał dokładnie jeden skoczek, to suma obu współrzędnych wszystkich skoczków nadal wynosiłaby 240.

Zauważmy jednak, że na skutek ruchu współrzędne skoczka zmieniają się — jedna o 2, a druga o 1. Stąd w wyniku ruchu suma współrzędnych skoczka zmienia się o liczbę nieparzystą. Zatem w wyniku 15 skoków suma obydwu współrzędnych wszystkich skoczków powinna zmienić parzystość, więc w szczególności musi zmienić wartość. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że sytuacja opisana w treści zadania nie może mieć miejsca.

Zadanie 11.

Wyznacz wszystkie trójki liczb całkowitych (a, b, c) takich, że

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{oraz} \quad (a+1)^2 + (b+1)^2 = (c+1)^2.$$

Rozwiązanie: Rozwijając kwadraty w drugim równaniu, otrzymujemy

$$a^2 + 2a + 1 + b^2 + 2b + 1 = c^2 + 2c + 1.$$

Odejmując pierwsze równanie od drugiego równania w postaci wyżej, otrzymujemy

$$2a + 2b + 1 = 2c.$$

Lewa strona uzyskanej równości jest nieparzysta, prawa zaś — parzysta, co nie jest możliwe. W takim razie szukana trójka liczb całkowitych nie istnieje.

Zadanie 12.

Punkty M i N są środkami odpowiednio boków AB i BC równoległoboku $ABCD$. Odcinki DM i DN przecinają odcinek AC odpowiednio w punktach X i Y. Wykaż, że $AX = XY = YC$.

Rozwiązanie: Skoro odcinki AM i CD są równoległe, to możemy skorzystać z twierdzenia Talesa, otrzymując

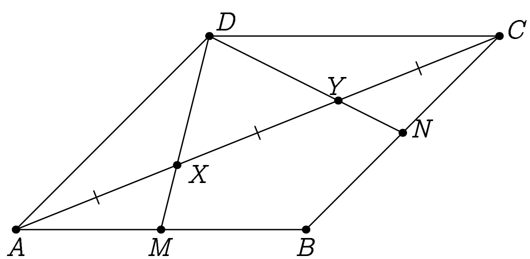
$$\frac{XC}{XA} = \frac{CD}{AM}.$$

Wiadomo przy tym, że punkt M jest środkiem odcinka AB, który ma tę samą długość co odcinek CD. Zatem powyższe ułamki wyrażające proporcje odcinków mają wartość 2, więc

$$AC = AX + XC = 3AX.$$

Podobnie możemy otrzymać równość $AC = 3YC$. W rezultacie

$$XY = AC - AX - YC = \frac{AC}{3} = AX = YC.$$



Zadanie 13.

Niech $a \neq b$ będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Wykaż, że istnieje nieskończenie wiele dodatnich całkowitych n, dla których $\text{NWD}(a+n, b+n) = 1$.

Rozwiązanie: Przypomnijmy, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych $x > y$ zachodzi równość

$$NWD(x, y) = NWD(x - y, y).$$

Załóżmy bez straty ogólności, że $a > b$. Na mocy wspomnianej własności mamy

$$\text{NWD}(a+n, b+n) = \text{NWD}\left(a+n, (a+n) - (b+n)\right) = \text{NWD}(a+n, a-b).$$

Powyższa liczba równa jest 1 choćby wtedy, gdy $a + n$ daje resztę 1 przy dzieleniu przez $a - b$. Stąd dla $k > a$ liczba

$$n = k(a-b) + 1 - a$$

spełnia warunek $\text{NWD}(a+n, b+n) = 1$. Mamy też

$$k(a-b) + 1 - a \geqslant a \cdot 1 + 1 - a = 1,$$

więc jako liczba dodatnia n spełnia warunek zadania. Liczb opisanej postaci jest oczywiście nieskończenie wiele.

Zadanie 14.

W pewnej klasie jest n osób i wiadomo, że każda osoba ma w tej klasie co najmniej 2024 znajomych. Udowodnij, że można podzielić całą klasę na dwie drużyny tak, aby każda osoba miała w drużynie przeciwnej co najmniej 1012 znajomych.

Rozwiązanie: Rozważmy podział klasy, dla którego liczba znajomości pomiędzy drużynami jest możliwie największa. Załóżmy nie wprost, że pewne dziecko ma w drużynie przeciwnej $d < 1012$ znajomych. Wtedy w swojej drużynie osoba ta ma co najmniej $2024 - d$ znajomych, więc przenosząc ją do przeciwnej drużyny zmienilibyśmy liczbę znajomych między drużynami o co najmniej

$$(2024 - d) - d = 2024 - 2d > 0.$$

To przeczy sposobowi, w jaki wybraliśmy rozważany podział, zarazem dowodząc, że spełnia on warunki zadania.

Zadanie 15.

Wykaż, że dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 6$ można znaleźć (niekoniecznie różne) dodatnie liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_n$ spełniające

$$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \ldots + \frac{1}{a_n^2} = 1.$$

Rozwiązanie: Zauważmy, że dla $n = 6, 7, 8$ warunek zadania spełniają odpowiednio ciągi

$$(2,2,2,3,3,6), \quad (2,2,2,4,4,4,4), \quad (2,2,3,3,3,3,6,6).$$

Przypuśćmy, że teza zadania nie jest spełniona. Weźmy taką najmniejszą liczbę $n \geqslant 9$, dla której nie można znaleźć liczb $a_1, \ldots, a_n$ spełniających warunek zadania. W szczególności dla liczby $m = n-3$ można znaleźć już liczby $a_1, \ldots, a_m$ spełniające warunek

$$1 = \frac{1}{a_1^2} + \ldots + \frac{1}{a_m^2} = 4 \cdot \frac{1}{(2a_1)^2} + \frac{1}{a_2^2} + \ldots + \frac{1}{a_m^2}.$$

Zatem zastępując a_1 przez cztery kopie $2a_1$ otrzymujemy $n = m + 3$ liczb, których odwrotności kwadratów mają sumę równą 1. Uzyskana sprzeczność kończy dowód.

Zadanie 16.

Znajdź wszystkie trójki (a, b, c) liczb całkowitych spełniające układ równań

$$\begin{cases} a + bc = 6 \\ b + ca = 6 \\ c + ab = 6 \end{cases}$$

Rozwiązanie: Odejmując drugą równość od pierwszej otrzymujemy

$$0 = a - b + bc - ca = (c-1)(b-a),$$

czyli $c = 1$ lub $a = b$. Analogicznie

$$(a-1)(c-b) = (b-1)(a-c) = 0.$$

Załóżmy najpierw, że pewna z liczb a, b, c jest równa 1 — bez straty ogólności niech będzie to a. Wtedy druga z powyższych równości przybiera postać $(b-1)(c-1) = 0$, więc jedna z liczb b, c jest równa 1. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $b = 1$. Mamy wtedy

$$6 = c + ab = 1 + c,$$

więc $c = 5$.

Jeśli natomiast liczby a, b, c są wszystkie różne od 1, to mamy

$$a - b = b - c = c - a = 0,$$

czyli $a = b = c$. Wracając do wyjściowego układu mamy zatem

$$a^2 + a - 6 = 0, \qquad \text{czyli} \qquad (a-2)(a+3) = 0,$$

stąd $a = 2$ lub $a = -3$.

Łącząc wszystkie przypadki widzimy, że trójka (a, b, c) jest jednej z postaci

$$(1,1,5), \quad (1,5,1), \quad (5,1,1), \quad (2,2,2), \quad (-3,-3,-3).$$

Możemy sprawdzić, że wszystkie te trójki spełniają zadany układ równań.

Zadanie 17.

Na płaszczyźnie dane jest sześć kół przecinających się w pewnym punkcie P. Wykaż, że środek pewnego z tych kół leży wewnątrz lub na brzegu innego z tych kół.

Rozwiązanie: Przypuśćmy, że teza zadania nie zachodzi.

Gdyby dla środków A, B pewnych dwóch z sześciu danych kół zachodził warunek $AB \leqslant AP$, to punkt B byłby wewnątrz lub na brzegu koła o środku w A. Zatem $AB > AP$ i analogicznie $AB > BP$. Skoro zatem bok AB trójkąta ABP jest najdłuższy, to musi leżeć naprzeciwko największego kąta. Zatem $\sphericalangle APB > 60^\circ$.

Jednakże, jeśli $O_1, \ldots, O_6$ są środkami danych kół, to półproste $PA, PB, \ldots, PO_6$ tworzą sześć kątów, których suma równa jest 360° (pewien z nich może być wklęsły). Jeden z tych kątów musi mieć miarę nie większą od

$$\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ.$$

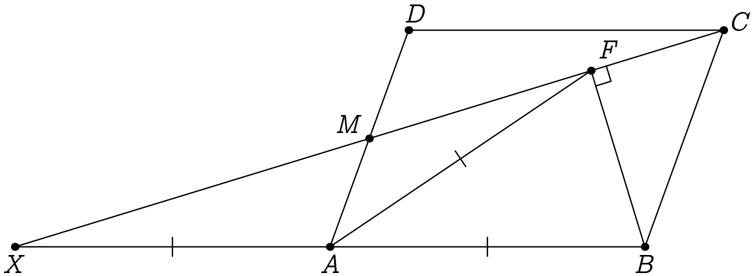
Uzyskana sprzeczność kończy dowód.

Zadanie 18.

Punkt M jest środkiem boku AD równoległoboku $ABCD$. Niech punkt F będzie spodkiem wysokości trójkąta BCM poprowadzonej z punktu B na prostą CM. Wykaż, że trójkąt AFB jest równoramienny.

Rozwiązanie: Oznaczmy przez X punkt symetryczny do punktu B względem punktu A. Wtedy $XA = AB = CD$ i odcinki XA i CD są równoległe, więc czworokąt $XACD$ jest równoległobokiem. W szczególności jego przekątne przecinają się w połowie, więc punkt M leży na prostej CX.

W rezultacie trójkąt BFX jest prostokątny, a punkt A jest środkiem przeciwprostokątnej, więc $AX = AF = AB$, co kończy dowód.



Zadanie 19.

Dana jest dodatnia liczba rzeczywista a. Dla jakich trójek dodatnich liczb całkowitych (r, s, t) o sumie 2024 wartość

$$a^r + a^s + a^t$$

jest możliwie największa?

Rozwiązanie: Dla $a = 1$ rozważana wartość jest równa 3 dla każdej trójki (r, s, t). Przyjmijmy więc, że $a \neq 1$. Wykażemy, że w tym przypadku rozważana suma jest największa dla trójek

$$(1, 1, 2022), \quad (1, 2022, 1), \quad (2022, 1, 1).$$

Niech trójka liczb (r, s, t) spełnia warunek zadania. Załóżmy bez straty ogólności, że $r \leqslant s \leqslant t$. Załóżmy też nie wprost, że $s > 1$. Wtedy

$$(a^{s-1} + a^{t+1}) - (a^s + a^t) = a^t(a-1) - a^{s-1}(a-1) = (a-1)(a^t - a^{s-1})$$

Zauważmy, że liczby $a - 1$ i $a^t - a^{s-1}$ mają ten sam znak, dla dowolnej dodatniej liczby a. Istotnie, jeśli $a > 1$, to $a^t > a^{s-1}$. Jeśli zaś, $a < 1$, to $a^t < a^{s-1}$. Stąd

$$a^r + a^{s-1} + a^{t+1} > a^r + a^s + a^t$$

Ponieważ liczby r, $s-1$ i $t+1$ są dodatnie, więc uzyskujemy sprzeczność z określeniem trójki (r, s, t). Z tej sprzeczności wynika, że $s = 1$, więc również $r = 1$.

Zadanie 20.

Dany jest równoległobok $ABCD$, którego środkiem (tzn. punktem przecięcia przekątnych) jest punkt O. Niech P będzie wybranym punktem na płaszczyźnie. Oznaczmy przez M, N środki odcinków AP, BP i przyjmijmy, że odcinki MC i ND przecinają się w pewnym punkcie Q. Wykaż, że punkty O, P i Q są współliniowe.

Rozwiązanie: Zauważmy, że MN jest linią środkową w trójkącie ABP. Wynika stąd, że proste MN oraz CD są równoległe oraz

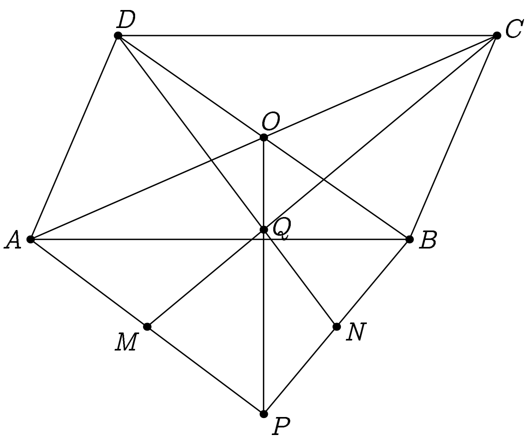
$$MN = \frac{1}{2}CD.$$

Z twierdzenia Talesa zastosowanego do trójkątów MQN i CQD mamy

$$\frac{MQ}{QC} = \frac{MN}{CD} = \frac{1}{2}.$$

Stąd punkt Q leży na środkowej CM w trójkącie PAC i dzieli ją w stosunku $2 : 1$. Zatem punkt Q jest środkiem ciężkości trójkąta PAC.

Co więcej, punkt O — jako punkt przecięcia przekątnych w równoległoboku — jest środkiem boku AC. W takim razie punkt Q leży na środkowej PO, skąd bezpośrednio wynika współliniowość punktów P, O i Q.



Zadanie 21.

Rozstrzygnij czy kwadrat liczby całkowitej może być równy sumie kwadratów dwóch liczb pierwszych.

Rozwiązanie: Przypuśćmy nie wprost, że dla pewnych liczb pierwszych p, q oraz liczby całkowitej n mamy przedstawienie $p^2 + q^2 = n^2$.

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $n > 0$. Gdyby liczby p i q były nieparzyste, to z powyższej równości dostalibyśmy, że liczba n^2 daje resztę 2 z dzielenia przez 4, co nie jest możliwe. W takim razie co najmniej jedna z liczb p, q musi być równa 2.

Bez straty ogólności przyjmijmy, że $p = 2$, co prowadzi do warunku

$$q^2 = n^2 - 4 = (n-2)(n+2).$$

Jasne jest, że $n+2 > n-2$, więc skoro q jest liczbą pierwszą, to $n-2 = 1$ i $n+2 = q^2$. Stąd $n = 3$ i w rezultacie $q^2 = 5$, co nie jest możliwe. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że nie istnieją liczby pierwsze spełniające warunki zadania.

Zadanie 22.

Ustalmy liczbę całkowitą $n > 1$ i rozważmy liczbę, której zapis dziesiętny składa się ze złączonych kolejno zapisów dziesiętnych wszystkich liczb całkowitych od 1 do n. Czy możliwe jest, że ta rozważana liczba jest palindromem?

Rozwiązanie: Przypuśćmy nie wprost, że taka liczba n istnieje. Jasne jest, że cyfrą jedności n jest 1, więc $n > 10$. Zatem cyfrą dziesiątek n jest 2. Nietrudno sprawdzić, że 21 nie spełnia warunku z zadania, więc $n \geqslant 101$. Niech więc $k \geqslant 2$ będzie największą liczbą całkowitą, dla której $10^k < n$. Wtedy w zapisie rozważanej w zadaniu liczby pojawi się ciąg kolejnych cyfr

$$91\underbrace{00\ldots0}_{k\text{ cyfr}}10,$$

złożony z ostatniej cyfry liczby $10^k - 1$, cyfr liczby 10^k i pierwszych dwóch cyfr liczby $10^k + 1$. Gdyby rozważana liczba była palindromem, to musiałby pojawić się w niej również "odwrócony" powyższy ciąg, czyli

$$01\underbrace{00\ldots0}_{k\text{ cyfr}}19.$$

Żadna z liczb od 1 do n nie zaczyna się od cyfry 0, więc w powyższym ciągu cyfry $1\underbrace{00\ldots0}_{k\text{ cyfr}}$ muszą należeć do tej samej liczby, powiedzmy i. Ale

$$i < n \leqslant 10^{k+1},$$

więc i ma co najwyżej $k+1$ cyfr, zatem musi być równe właśnie 10^k. Jednak wtedy po cyfrach i powinny pojawić się w zapisie szukanej liczby cyfry 10, nie zaś 19. Sprzeczność ta dowodzi, że liczba n spełniająca warunki zadania nie istnieje.

Zadanie 23.

Liczby naturalne od 1 do $2k$ podzielono na dwa rozłączne podzbiory k-elementowe tak, że dowolne dwie liczby z tego samego podzbioru mają nie więcej niż dwa różne wspólne dzielniki pierwsze. Jaka jest największa możliwa liczba k, dla której taka sytuacja jest możliwa?

Rozwiązanie: Zacznijmy od wykazania, że warunki zadania nie mogą być spełnione dla $k \geqslant 45$. Liczby $30, 60, 90$ mają bowiem wspólne trzy różne dzielniki pierwsze, więc musielibyśmy wszystkie umieścić w innych grupach, co nie jest możliwe.

Załóżmy więc, że $k = 44$. Wykażemy, że grupy

$$1, 2, \ldots 44, \qquad \text{oraz} \qquad 45, 46, \ldots, 88$$

spełniają warunki zadania. Niech x i y będą różnymi z dostępnych nam liczb, które mają wspólne co najmniej 3 różne dzielniki pierwsze. Oznaczmy je przez p, q, r. Wtedy

$$pqr \geqslant 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30, \qquad \text{czyli} \qquad 3pqr \geqslant 90 > 88.$$

Oznacza to, że wśród x i y jedna jest dwukrotnością drugiej. Niech $y = 2x$. Wtedy

$$x = \frac{1}{2}y \leqslant \frac{1}{2} \cdot 88 = 44,$$

więc x jest w pierwszej grupie. Natomiast

$$y \geqslant 2pqr \geqslant 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60,$$

czyli y jest w drugiej grupie.

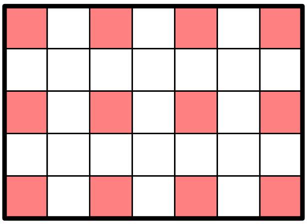
Zatem dowolne dwie liczby o trzech wspólnych dzielnikach pierwszych znajdą się w różnych grupach, co dowodzi poprawności naszej konstrukcji. Największą możliwą liczbą k spełniają warunki zadania jest zatem 44.

Zadanie 24.

Klockiem nazywamy figurę powstałą po usunięciu jednego pola z kwadratu 2×2. Układamy pewną niezerową liczbę klocków w prostokącie o wymiarach 5×7 tak, by każdy zajmował pewne trzy pola prostokąta. Klocki mogą nachodzić na siebie nawzajem. Czy możemy w ten sposób sprawić, aby na każdym z pól prostokąta leżała taka sama liczba klocków?

Rozwiązanie:

Kolorujemy niektóre pola szachownicy kolorem czerwonym w sposób zaprezentowany poniżej.



Kładąc klocki na tablicy kolorujmy ich pola na kolory pól, na które je kładziemy. Każdy klocek będzie miał co najwyżej jedno czerwone pole, więc spośród wszystkich pól wszystkich położonych klocków co najwyżej jedna trzecia jest czerwona.

Z drugiej strony, gdyby każde pole było przykryte taką samą liczbą klocków, to stosunek liczby czerwonych pól klocków do liczby wszystkich pól klocków byłby taki sam, jak stosunek liczby czerwonych pól tablicy do liczby wszystkich pól tablicy. Stosunek ten równy jest natomiast

$$\frac{12}{35} > \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$

Zatem nie możemy sprawić, by na każdym polu tablicy było tyle samo klocków.

Zadanie 25.

Operacją na wielokącie na płaszczyźnie nazwiemy wybranie dowolnej prostej przecinającej jego obwód w dokładnie dwóch punktach A i B, a następnie odbicie względem symetralnej odcinka AB jednej z dwóch części, na które wielokąt został przecięty. Udowodnij, że żadnym skończonym ciągiem operacji nie można przekształcić kwadratu w trójkąt.

Rozwiązanie: Zauważmy najpierw, że obwód i pole wielokąta pozostają niezmienione po wykonaniu opisanej *operacji*. Rozważmy kwadrat o boku długości x.

Przypuśćmy nie wprost, że można ten kwadrat przekształcić w trójkąt za pomocą skończenie wielu operacji. W takim razie pole tego trójkąta musiałoby być równe x^2, a jego obwód wynosiłby $4x$. Udowodnimy, że taki trójkąt nie istnieje.

Załóżmy nie wprost, że taki trójkąt istnieje i oznaczmy przez a, b, c długości jego boków, a przez h — długość wysokości opuszczonej na bok o długości a. Ze wzoru na pole trójkąta mamy

$$x^2 = \frac{ha}{2}.$$

Jasne jest, że $b \geqslant h$ i $c \geqslant h$, przy czym co najmniej jedna z tych nierówności jest ostra. Mamy zatem

$$4x = a + b + c > 2h + a = 2h + 2 \cdot \frac{x^2}{h} \geqslant 4x,$$

gdzie ostatnia nierówność jest równoważna nierówności $(h-x)^2 \geqslant 0$ (lub nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną). Uzyskaliśmy sprzeczność.

Zadanie 26.

Dla każdej liczby całkowitej od 100 do 1000 obliczono iloczyn jej cyfr. Następnie dodano wszystkie uzyskane wyniki. Wykaż, że uzyskana suma jest sześcianem liczby całkowitej.

Rozwiązanie: Iloczyn cyfr liczby 1000 równy jest 0, więc możemy się ograniczyć do rozważania sum iloczynów liczb od 100 do 999. Możemy ją zapisać w postaci

$$(1 + 2 + \ldots + 9)(0 + 1 + \ldots + 9)(0 + 1 + \ldots + 9) = 45^3,$$

gdzie każdy z nawiasów odpowiada wyborowi cyfry setek, dziesiątek i jedności składników sumy.

Zadanie 27.

Liczby rzeczywiste a, b, c są nieujemne i każda z nich jest mniejsza lub równa 2. Wykaż, że zachodzi nierówność

$$(a - b)(b - c)(a - c) \leqslant 2.$$

Rozwiązanie: Wystarczy wykazać, że

$$|(a - b)(b - c)(a - c)| \leqslant 2.$$

Wyrażenie po lewej stronie tej nierówności jest symetryczne w zmiennych a, b, c, więc możemy bez straty ogólności założyć że $a \geqslant b \geqslant c$.

Następnie zauważmy, że przy założeniu $2 \geqslant a \geqslant b \geqslant c \geqslant 0$ mamy

$$(a-b)(b-c)(a-c) \leqslant (2-b)(b-0)(2-0) = 2b(2-b).$$

Pozostaje wykazać, że $b(2-b) \leqslant 1$. Po sprowadzeniu wszystkich wyrazów na jedną stronę nierówność ta równoważna jest z następującą, w sposób oczywisty prawdziwą:

$$0 \leqslant 1 - b(2-b) = 1 - 2b + b^2 = (b-1)^2.$$

Zadanie 28.

Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych (a, b) dla których

$$2a^4 + 1 = b^2.$$

Rozwiązanie: Załóżmy bez straty ogólności, że $b \geqslant 0$. Przepiszmy równanie jako

$$2a^4 = (b-1)(b+1).$$

Jasne jest, że liczba b musi być nieparzysta, więc zapisując $b = 2c + 1$ dostajemy

$$2a^4 = 4c(c+1),$$

Zatem liczba a musi być parzysta. Niech $a = 2a_0$. Wtedy

$$8a_0^4 = c(c+1).$$

Skoro liczby c i $c+1$ są względnie pierwsze, to $x^4 = c$ oraz $8y^4 = c+1$ lub $8x^4 = c$ oraz $y^4 = c+1$, dla pewnych liczb całkowitych x, y.

W pierwszym przypadku mamy $x^4 + 1 = 8y^4$. Lewa strona powyższego równania daje przy dzieleniu przez 5 resztę 1 lub 2, a prawa strona tego równania daje przy dzieleniu przez 5 resztę 0 lub 3, co jest niemożliwe.

Natomiast w drugim przypadku uzyskujemy $8x^4 + 1 = y^4$, co możemy zapisać jako

$$8x^4 = (y-1)(y+1)(y^2+1).$$

Wnioskujemy stąd, że liczba y jest nieparzysta. Niech więc $y = 2z + 1$. Wtedy

$$x^4 = z(z+1)(2z^2 + 2z + 1).$$

Każde dwa z czynników iloczynu po prawej stronie są względnie pierwsze. Oznacza to, że liczby z i $z+1$ są kolejnymi kwadratami, więc $z = 0$. Stąd $b = 1$.

Uwzględniając, że przyjęliśmy wcześniej założenie $b \geqslant 0$, otrzymujemy ostatecznie dwa rozwiązania: $(0, 1)$ oraz $(0, -1)$.

Zadanie 29.

Na płaszczyźnie narysowano cztery punkty w taki sposób, że po zmazaniu dowolnego z nich figura złożona z pozostałych trzech punktów jest osiowosymetryczna. Czy wynika stąd, że figura złożona ze wszystkich czterech punktów ma oś symetrii?

Rozwiązanie: Uzasadnimy, że odpowiedź na pytanie postawione w zadaniu jest negatywna, wskazując odpowiedni kontrprzykład.

Niech ABC będzie trójkątem spełniającym $AB = BC$ i $\sphericalangle ABC = 36^\circ$. Wtedy

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle CAB = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ.$$

Wybieramy punkt D na odcinku AB tak, by

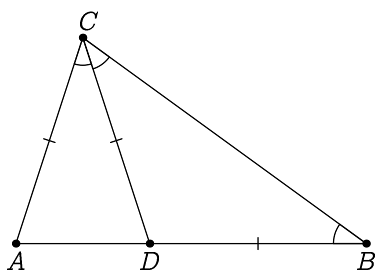
$$\sphericalangle ACD = \sphericalangle DCB = 36^\circ.$$

Wtedy jasne jest, że trójkąt BCD jest równoramienny. Wiemy też, że

$$\sphericalangle ADC = 180^\circ - \sphericalangle CAD - \sphericalangle ACD = 72^\circ = \sphericalangle CAD,$$

więc trójkąt ACD również jest równoramienny. Zatem każde trzy z czwórki punktów A, B, C, D albo tworzą wierzchołki trójkąta równoramiennego, albo leżą na jednej prostej, więc tworzą figurę osiowosymetryczną.

Nietrudno się natomiast przekonać, że figura złożona z punktów A, B, C, D nie ma osi symetrii. Oś taka musiałaby być symetralną odcinka o końcach w pewnych dwóch z tych punktów, a żadna taka symetralna nie jest osią symetrii figury.



Zadanie 30.

Punkt D leżący wewnątrz trójkąta ABC spełnia warunek $AD = DB$. Proste CD i AB przecinają się w punkcie E spełniającym

$$\frac{CD}{CE} = \frac{EB}{AE}.$$

Wykaż, że trójkąt AEC jest równoramienny.

Rozwiązanie: Sposób I. Niech punkt F powstaje przez odbicie punktu E względem środka prostej AB. Z warunków zadania mamy

$$\frac{AF}{AE} = \frac{CD}{CE}.$$

Zatem, z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa, odcinek FD jest równoległy do AC. Skoro punkt D leży na symetralnej prostej AB, uzyskujemy równość kątów

$$\sphericalangle DFE = \sphericalangle DEF.$$

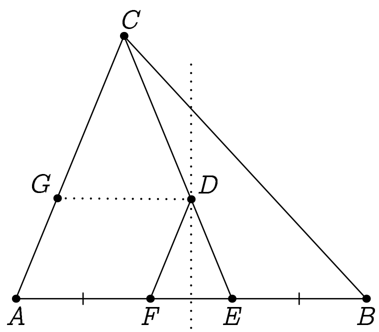
Łącząc powyższe obserwacje otrzymujemy $\sphericalangle CAE = \sphericalangle DFE = \sphericalangle DEF = \sphericalangle CEA$, skąd bezpośrednio wynika teza.

Sposób II

Niech G będzie punktem leżącym na boku AC, takim że odcinek DG jest równoległy do prostej AB. Z twierdzenia Talesa oraz z warunków zadania mamy

$$\frac{GD}{AE} = \frac{CD}{CE} = \frac{EB}{AE}.$$

Uzyskujemy stąd $GD = EB$. Dodatkowo, skoro $\sphericalangle GDE = \sphericalangle BED$, to trójkąty GDE oraz BED są przystające (cecha bok–kąt–bok). Stąd $DB = GE = AD$, zgodnie z warunkami zadania. Trapez $AEDG$ ma zatem równe przekątne, czyli jest równoramienny. Kąty przy podstawie AE są więc równe, co kończy dowód.



Zadanie 31.

Punkt M jest środkiem boku BC w trójkącie ABC. Oznaczmy przez I i J środki okręgów wpisanych w trójkąty AMB i AMC. Okręgi opisane na trójkątach ABI i ACJ przecinają się w punktach A i X. Wykaż, że punkt X leży na prostej AM.

Rozwiązanie: Niech Y będzie takim punktem na środkowej AM, że

$$MY = MB = MC.$$

Rozważmy trójkąty BMI i YMI. Mają one wspólny bok MI oraz spełniają

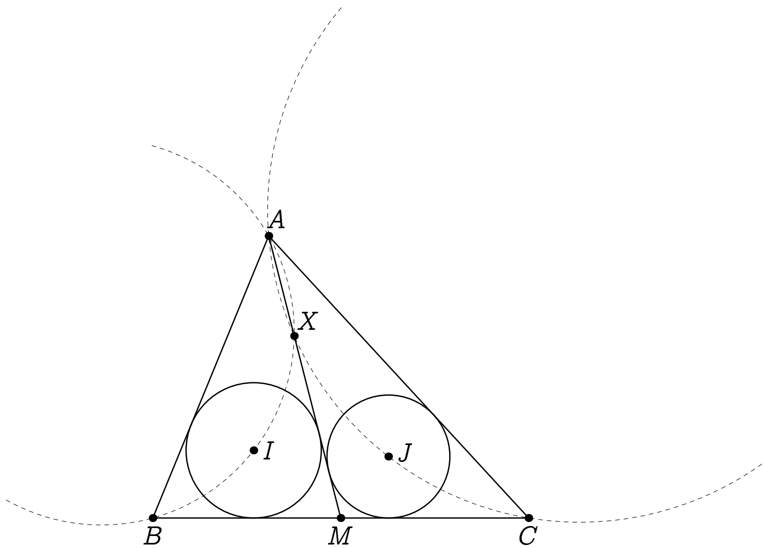
$$\sphericalangle BMI = \sphericalangle YMI \quad \text{oraz} \quad BM = MY.$$

Trójkąty BMI i YMI są zatem przystające. Wynika stąd równość kątów

$$\sphericalangle MYI = \sphericalangle MBI = \sphericalangle ABI.$$

Z powyższych równości wnioskujemy, że punkty A, B, I, Y leżą na jednym okręgu.

Analogicznie wykazujemy, że punkty A, C, J, Y leżą na jednym okręgu. Wynika stąd, że $X = Y$, co kończy dowód.



Zadanie 32.

W trójkącie ostrokątnym ABC boki AC i BC są równej długości. Punkt D leżący wewnątrz trójkąta ABC spełnia $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD = 30^\circ$. Wykaż, że dwusieczne kątów ABC i ADC przecinają się na odcinku AC.

Rozwiązanie: Na początku zauważmy, że trójkąt ADB jest także równoramienny. Istotnie,

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle BAC - 30^\circ = \sphericalangle ABC - 30^\circ = \sphericalangle ABD.$$

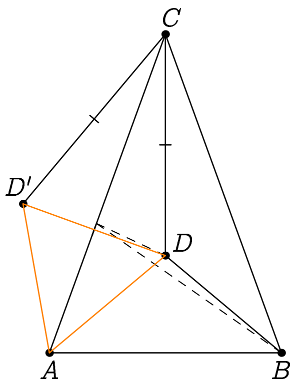
W szczególności $DA = DB$ i prosta CD jest symetralną odcinka AB, a więc też dwusieczną kąta ACB. W szczególności $\sphericalangle DCA = \sphericalangle DCB$.

Niech D' będzie odbiciem punktu D względem prostej AC. Oczywiście trójkąty ADC i $AD'C$ są przystające. Stąd $CD = CD'$ oraz $\sphericalangle ACB = \sphericalangle DCD'$. Wynika stąd, że trójkąty ACB i DCD' są podobne, a zatem

$$\frac{CD}{DD'} = \frac{CB}{AB}. \qquad (*)$$

Mamy $\sphericalangle DAD' = 2\sphericalangle DAC = 60^\circ$ oraz $DA = DA'$, a zatem trójkąt DAD' jest równoboczny. Łącząc równość $DD' = DB = DA$ z (*), otrzymujemy równość

$$\frac{CD}{DA} = \frac{CB}{BA}.$$



Niech K i L to spodki dwusiecznych odpowiednio kątów CDA i CBA na bok AC. Korzystając dwukrotnie z twierdzenia o dwusiecznej oraz powyższej równości stosunków, otrzymujemy

$$\frac{CK}{KA} = \frac{CB}{BA} = \frac{CD}{DA} = \frac{CL}{LA}.$$

Wynika stąd, że $K = L$, co kończy dowód.