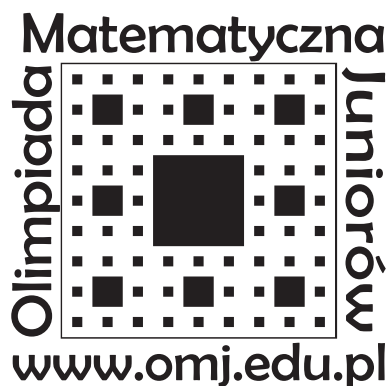


Obóz Naukowy
Olimpiady Matematycznej
Juniorów — poziom OMJ



1–7 czerwca 2025 r.

Skład komputerowy: Jadwiga Czyżewska, Bartosz Głowacki, Kosma Kasprzak,
Arkadiusz Męcel, Witold Sikora

Komitiet Główny Olimpiady Matematycznej Juniorów
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
ul. Śniadeckich 8
00-656 Warszawa
www.omj.edu.pl

Wstęp

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Juniorów (poziom OMJ) przeprowadzono w dniach 1–7 czerwca 2025 r. w Domu Rekolekcyjno-Konferencyjnym „Wieczernik” w Świętej Katarzynie (woj. świętokrzyskie). Do udziału w Obozie zakwalifikowano uczniów z klas 5–7 szkół podstawowych z najlepszymi wynikami w XX OMJ.

Każdego dnia uczestnicy Obozu rozwiązywali zadania w formule konkursowej, pracując zarówno indywidualnie, jak i w grupach. Popołudnia poświęcone były na wykłady tematyczne i zajęcia warsztatowe. W piątek przed południem przeprowadzony został konkurs Náboj. W trakcie obozu chętni uczestnicy wzięli udział w Konkursie St@ś oraz w III Mistrzostwach Polski w Geometrii Elementarnej (kat. Juniorów).

W niniejszym opracowaniu zebrane są zadania konkursowe (wkrótce dodamy rozwiązania). Zachęcamy do wykorzystania tych materiałów w przygotowaniach do startów w kolejnych edycjach Olimpiady Matematycznej Juniorów — zwłaszcza w ramach treningu przed zawodami finałowymi, a także w przygotowaniach do rozpoczęcia przygody z Olimpiadą Matematyczną dla szkół ponadpodstawowych — podejmowanych jeszcze w trakcie lub bezpośrednio po zakończeniu nauki w szkole podstawowej.

Poziom trudności niektórych problemów zawartych w niniejszym opracowaniu przewyższa poziom zawodów finałowych OMJ. Tematyka podejmowana na Obozie odnosi się przy tym do programu merytorycznego Olimpiady, czerpiąc inspiracje z międzynarodowych zawodów matematycznych rozgrywanych na poziomie juniorskim.

Miłej lektury!

Kadra Obozu

Uczestnicy Obozu Naukowego OMJ (poziom OMJ)

Mateusz Bąk, Jacek Furmańczyk, Ignacy Gałek, Franciszek Jastrzębski, Benedykt Kaczmarek, Mateusz Kaźmierczak, Adam Kapka, Michał Kołodziejczyk, Leonard Królczyk, Maksymilian Leśniak, Oleksandra Lysakova, Aleksandra Mazur, Paulo Moreno Joao, Grzegorz Motylewski, Adam Mroczkowski, Szymon Rynkiewicz, Krzysztof Rzońca, Mateusz Sobański, Łukasz Sulowski, Michał Zabrocki

Kadra: Jadwiga Czyżewska, Paweł Dziuba (kierownik), Bartosz Głowacki, Kosma Kasprzak, Arkadiusz Męcel, Urszula Pastwa, Witold Sikora

Rozkład ocen za rozwiązania zadań indywidualnych

Prace uczestników Obozu oceniane były w skali olimpijskiej 0, 2, 5, 6. Rozkład ocen przyznanych za rozwiązania zadań przedstawiony jest w poniższej tabeli.

	6 p.	5 p.	2 p.	0 p.
1.	13	1	4	2
2.	12	3	1	4
3.	12	4	3	1
4.	13	0	0	7
5.	1	5	4	10
6.	10	0	0	10
7.	3	0	4	13
8.	10	1	2	7
9.	9	2	3	6
10.	2	0	2	16
11.	4	3	6	7
12.	4	1	5	10
13.	11	1	3	5
14.	5	0	0	15
15.	2	2	0	16
16.	16	1	0	3
17.	14	1	1	4
18.	9	0	1	10
19.	1	0	1	18
20.	1	1	3	15

Treści zadań

Zadanie 1.

Na tablicy napisano trzy liczby trzycyfrowe o sumie równej 1000. Wszystkie użyte cyfry były różne. Jakiej cyfry nie użyto?

Zadanie 2.

W równoległoboku $ABCD$ prosta przechodząca przez punkt C przecina odcinki BD i AB odpowiednio w punktach E i F tak, że punkt F jest środkiem odcinka AB . Załóżmy, że pole trójkąta BEC jest równe 1. Wyznacz pole czworokąta $AFED$.

Zadanie 3.

Czy można pokolorować wszystkie dodatnie liczby całkowite na czerwono i niebiesko w taki sposób, by dla każdej liczby n liczby n i $2n$ były różnych kolorów?

Zadanie 4.

Dane jest 2025 prostokątów o wymiarach $1 \times 1, 1 \times 2, 1 \times 3, \dots, 1 \times 2024, 1 \times 2025$. Czy można wybrać pewne z nich (co najmniej dwa) i ułożyć z nich kwadrat?

Zadanie 5.

Założmy, że dla pewnych niezerowych liczb rzeczywistych x, y, z zachodzą równości

$$\frac{x+y}{z} = \frac{y+z}{x} = \frac{x+z}{y}.$$

Znajdź wszystkie możliwe wartości liczby

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}.$$

Zadanie 6.

Punkt X leży na okręgu ω o środku w punkcie O , a punkt $P \neq O$ leży wewnątrz tego okręgu. Prosta XP przecina okrąg ω po raz drugi w punkcie Y , a okrąg opisany na trójkącie XPO przecina okrąg ω po raz drugi w punkcie Z . Wykaż, że $PY = PZ$.

Zadanie 7.

Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych x, y o niezerowej sumie spełniających

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} = 10.$$

Zadanie 8.

W każde z dziewięciu pól kwadratu 3×3 wpisana jest liczba 0. Ruch polega na wybraniu dwóch sąsiadujących pól i albo dodaniu do obu liczb w wybranych polach liczby 1, albo odjęciu od obu liczb w wybranych polach liczby 1. Czy po pewnej liczbie ruchów może się okazać, że w każde z dziewięciu pól wpisana jest liczba 2?

Zadanie 9.

Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych a, b większych od 1 spełniających warunki

$$b \mid a - 1 \quad \text{oraz} \quad 2a + 1 \mid 5b - 3.$$

Zadanie 10.

Mówimy, że ciąg liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ zawiera *arytmetyczną trójkę*, jeśli dla pewnych liczb $k < l < m$ spełniony jest warunek $a_k + a_m = 2a_l$. Wykaż, że liczby $1, 2, \dots, n$ można ustawić w taki ciąg, który nie zawiera żadnych arytmetycznych trójek.

Zadanie 11.

Na n kartkach napisano liczby całkowite od 0 do $n - 1$. Następnie jedną z nich wyrzuciono. Średnia arytmetyczna liczb na pozostałych kartkach wyniosła $\frac{555}{11}$. Wyznacz wszystkie możliwe wartości n oraz odpowiadające im numery wyrzuconych kartek.

Zadanie 12.

W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C ma miarę 60° . Przez D oznaczmy spodek dwusiecznej kąta BAC poprowadzonej z punktu A na bok BC , a przez E oznaczmy spodek dwusiecznej kąta ABC poprowadzonej z punktu B na bok AC . Wykaż, że punkt przecięcia prostych AD i BE leży na symetralnej odcinka DE .

Zadanie 13.

W pewnej klasie jest 24 uczniów. Każdy podzbiór uczniów tej klasy złożony z trzech osób spotyka się i daje prezent jednemu z pozostałych 21 uczniów tej klasy. Wykaż, że pewien uczeń z tej klasy dostał prezenty od co najmniej 10 różnych osób.

Zadanie 14.

Trójkąt ABC nazwiemy *podzielnym*, jeśli można rozciąć go na pięć trójkątów podobnych do ABC . Wykaż, że istnieje trójkąt podzielnny, który nie jest prostokątny.

Zadanie 15.

Powiemy, że para liczb całkowitych (a, b) jest *kwadratowa*, jeśli liczba $ab + 1$ jest kwadratem liczby całkowitej. Jaś ma liczby $1, 2, \dots, 2n$, dla pewnej dodatniej liczby całkowitej n . Chce on podzielić je na n kwadratowych par. Wykaż, że może to zrobić dla dowolnej parzystej liczby n , a nie może — dla dowolnej nieparzystej liczby n .

Zadanie 16.

Na tablicy napisano 10 kolejnych dodatnich liczb całkowitych. Czy możliwe jest, że w tym celu każdej cyfry $0, 1, 2, \dots, 9$ użyto tyle samo razy?

Zadanie 17.

Dodatnie liczby całkowite a, b spełniają równość

$$\text{NWD}(a, b) + \text{NWW}(a, b) = a + b.$$

Wykaż, że jedna z liczb a, b dzieli drugą.

Zadanie 18.

Przekątne AC i BD trapezu $ABCD$ przecinają się w punkcie P . Okręgi opisane na trójkątach APD i BPC przecinają podstawę AB po raz drugi odpowiednio w punktach X i Y . Niech M będzie środkiem odcinka XY . Wykaż, że $MC = MD$.

Zadanie 19.

Na okręgu zaznaczono 1000 punktów dzielących go na 1000 łuków, każdy o długości 1. Staś wybiera 501 łuków okręgu o końcach w zaznaczonych punktach, po jednym łuku o każdej z długości $1, 2, \dots, 501$. Wykaż, że któryś spośród wybranych przez niego łuków zawiera się w innym wybranym łuku.

Zadanie 20.

Niech a, b będą takimi dodatnimi liczbami całkowitymi, dla których liczba $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ jest wymierna. Wykaż, że liczby $\sqrt[3]{a}$ i $\sqrt[3]{b}$ również są wymierne.