Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Juniorów — poziom OMJ



7–13 czerwca 2026 r.

Skład komputerowy: Dominik Bysiewicz, Piotr Miernik, Szymon Tobiasz

Rysunki: Dominik Bysiewicz

Recenzent: dr Arkadiusz Męcel

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Juniorów
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
ul. Śniadeckich 8
00-656 Warszawa
www.omj.edu.pl

Wstęp

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Juniorów (poziom OMJ) przeprowadzono w dniach 7–13 czerwca 2026 r. w Domu Rekolekcyjno-Konferencyjnym „Wieczernik" w Świętej Katarzynie (woj. świętokrzyskie). Do udziału w Obozie zakwalifikowano uczniów z klas 5–7 szkół podstawowych z najlepszymi wynikami w XXI OMJ.

Każdego dnia uczestnicy Obozu rozwiązywali zadania w formule konkursowej, pracując zarówno indywidualnie, jak i w grupach. Popołudnia poświęcone były na wykłady tematyczne i zajęcia warsztatowe. W piątek przed południem przeprowadzone zostały zawody drużynowe w formule konkursu Náboj Matematyczny.

W niniejszym opracowaniu zebrane są zadania konkursowe wraz z rozwiązaniami. Zachęcamy do wykorzystania tych materiałów w przygotowaniach do startów w kolejnych edycjach Olimpiady Matematycznej Juniorów — zwłaszcza w ramach treningu przed zawodami finałowymi, a także w przygotowaniach do rozpoczęcia przygody z Olimpiadą Matematyczną dla szkół ponadpodstawowych — podejmowanych jeszcze w trakcie lub bezpośrednio po zakończeniu nauki w szkole podstawowej.

Poziom trudności niektórych problemów zawartych w niniejszym opracowaniu przewyższa poziom zawodów finałowych OMJ. Tematyka podejmowana na Obozie odnosi się przy tym do programu merytorycznego Olimpiady, czerpiąc inspiracje z międzynarodowych zawodów matematycznych rozgrywanych na poziomie juniorskim.

Miłej lektury!

Uczestnicy Obozu Naukowego OMJ (poziom OMJ)

Jan Andrzejewski, Adam Bis, Jerzy Dymara, Mikołaj Elert, Emil Helbing, Wojciech Jedliński, Sergiusz Kęsik, Krzysztof Kocyk, Stefan Kosior, Julian Kozioł, Karol Kulczycki, Łukasz Kuźma, Ewa Kwaśnicka, Hanna Lipiec, Bartosz Mazurowski, Jay Mitros, Arkadiusz Piechota, Adrian Szydłowski, Adam Szmytka, Mikołaj Tkaliński, Kateryna Varusha, Anna Zaleska.

Kadra: Dominik Bysiewicz, Paweł Dziuba (kierownik), Lech Kaźmierczak, Piotr Miernik, Arkadiusz Męcel, Szymon Tobiasz.

Rozkład ocen za rozwiązania zadań indywidualnych

Prace uczestników Obozu oceniane były w skali olimpijskiej 0, 2, 5, 6. Rozkład ocen przyznanych za rozwiązania zadań przedstawiony jest w poniższej tabeli.

	6 p.	5 p.	2 p.	0 p.
1.	18	1	0	3
2.	16	1	0	5
3.	16	1	2	3
4.	17	3	1	1
5.	4	5	2	11
6.	2	1	0	19
7.	18	1	2	1
8.	7	3	4	8
9.	4	1	1	16
10.	2	0	2	18
11.	0	2	3	17
12.	17	5	0	0
13.	19	1	0	2
14.	6	1	2	13
15.	2	4	0	16
16.	4	0	0	18
17.	11	3	2	6
18.	5	0	1	16
19.	4	0	1	17
20.	4	0	0	18
21.	0	1	1	20

Treści zadań

Zadanie 1.

Dodając do siebie czterocyfrowe liczby naturalne m oraz n, zamiast liczby m użyto liczby otrzymanej z m przez zamianę jednej cyfry na inną. W ten sposób otrzymano wynik równy $4(m+n)$. Znajdź wszystkie możliwe pary liczb (m, n).

Zadanie 2.

Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Punkty D i E leżą na boku AB w taki sposób, że proste DI i AC są równoległe oraz proste EI i BC są równoległe. Udowodnij, że obwód trójkąta DEI jest równy długości boku AB.

Zadanie 3.

Udowodnij, że dla dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$\sqrt{3(a+b+c)} \geqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Zadanie 4.

W turnieju szachowym rozegranym systemem „każdy z każdym” uczestniczyło 9 chłopców i 9 dziewcząt. Każda para uczestników rozegrała dokładnie jedną partię. Za wygraną przyznawano 1 punkt, za remis $\frac{1}{2}$ punktu, a za przegraną 0 punktów. Po zakończeniu turnieju okazało się, że wszyscy uczestnicy uzyskali tę samą liczbę punktów. Udowodnij, że co najmniej jedna partia między chłopcem a dziewczyną zakończyła się remisem.

Zadanie 5.

Na tablicy wypisano liczby naturalne od 1 do n, tworząc liczbę:

$$12345678910111213141 5\ldots$$

Wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą $n \geqslant 1$, dla której łączna liczba napisanych cyfr jest podzielna przez 1000.

Zadanie 6.

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $\sphericalangle BAD = 80^\circ = \sphericalangle ABC$ oraz $BA = AD = DC$. Oblicz miarę kąta ADC, jeśli wiadomo, że jest on ostry.

Zadanie 7.

Liczbę naturalną nazwiemy *niedojrzałą*, jeśli suma jej cyfr w zapisie dziesiętnym jest podzielna przez 17. Znajdź najmniejszą liczbę naturalną n, dla której liczby n i $n+1$ są *niedojrzałe*.

Zadanie 8.

Rozwiąż w liczbach rzeczywistych układ równań

$$\begin{cases} x_1^{2026} + x_2^{2026} + \ldots + x_{67}^{2026} = 1 \\ x_1^{2027} + x_2^{2027} + \ldots + x_{67}^{2027} = -1. \end{cases}$$

Zadanie 9.

Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym ABC. Wysokości BE i CF przecinają się w punkcie H. Znajdź miarę kąta BAC, jeśli wiadomo, że czworokąt $OEHF$ jest równoległobokiem.

Zadanie 10.

Wyznacz wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (a, b) spełniające równanie

$$4^a + 4a^2 + 4 = b^2.$$

Zadanie 11.

Makka Pakka kolekcjonuje kolorowe kamienie, ale jedynie te o dodatniej wadze wyrażonej całkowitą liczbą kilogramów. Wie, że ich łączna waga wynosi 2026 kg, jednak nie jest w stanie rozdzielić wszystkich kamieni między dwa worki w taki sposób, aby w obu workach łączna waga kamieni była taka sama. Ile maksymalnie kamieni może liczyć kolekcja Makki Pakki? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 12.

Niezerowe liczby rzeczywiste a, b spełniają równość

$$a + \frac{b^2}{a} = b + \frac{a^2}{b}.$$

Udowodnij, że $a = b$.

Zadanie 13.

Gargamel przeprowadził następujący eksperyment na siedmiu złapanych Smerfach $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7$. Ustawił Smerfy jeden za drugim w taki sposób, że każdy z nich widzi wszystkie Smerfy o numerach większych od swojego, ale nie widzi żadnego Smerfa o numerze mniejszym (na przykład Smerf S_4 widzi S_5, S_6, S_7, a nie widzi S_1, S_2, S_3). Następnie na głowę każdego z siedmiu Smerfów nałożył czapeczkę w kolorze czerwonym albo niebieskim. Poinformował też Smerfy, że miał do dyspozycji łącznie 6 czerwonych i 7 niebieskich czapeczek.

Na koniec zadał każdemu z nich kolejno pytanie: „Jakiego koloru jest twoja czapeczka?", rozpoczynając od S_1, a kończąc na S_7. Każdy Smerf słyszał odpowiedzi udzielone przez poprzedników.

Odpowiedzi Smerfów były następujące: każdy z sześciu Smerfów $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ na zadane pytanie odpowiedział: „Nie wiem", natomiast ostatni zapytany Smerf S_7 odpowiedział: „Wiem, mam czapeczkę w kolorze . . .".

Wyjaśnij, skąd wynika pewność ostatniego Smerfa co do tego, jaki kolor czapeczki ma na głowie, mimo że znał jedynie odpowiedzi swoich poprzedników.

Uwaga: Smerfy są nieskończenie mądre i znają zasady eksperymentu, ale zaskoczone przez Gargamela nie mogły wcześniej ustalić wspólnej strategii.

Zadanie 14.

Niech M będzie środkiem boku AB trójkąta ostrokątnego ABC. Punkty D i E są spodkami wysokości opuszczonych odpowiednio z wierzchołków A i B. Udowodnij, że proste MD i ME są styczne do okręgu opisanego na trójkącie CDE.

Zadanie 15.

Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych (k, l) spełniające równanie $k^5 - l^5 = 16kl$.

Zadanie 16.

Pan Ambroży Kleks zadał Adasiowi następującą zagadkę. Narysował na aksamitnej kartce prostokątną tablicę o dodatniej liczbie wierszy i kolumn, a następnie w każde jej pole wpisał liczbę całkowitą. Wpisane liczby nie musiały być różne. W jednym ruchu Adaś wybiera wiersz lub kolumnę i zmienia znak każdej liczby w wybranym wierszu lub kolumnie. Czy Adaś może, niezależnie od liczb wpisanych przez Ambrożego, wykonać ruchy w taki sposób, aby na koniec suma liczb w każdej kolumnie oraz suma liczb w każdym wierszu była nieujemna? Odpowiedź uzasadnij.

Bonus: Adaś, po rozwiązaniu zagadki, zrewanżował się profesorowi, zadając mu tę samą zagadkę, lecz dla liczb rzeczywistych. Jaka jest odpowiedź na pytanie Adasia?

Zadanie 17.

Wyznacz wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (a, b) takie, że $a^2 + b^2$ jest liczbą pierwszą, a $2ab$ jest kwadratem liczby naturalnej.

Zadanie 18.

Udowodnij, że dla trójkąta ostrokątnego o bokach długości a, b, c oraz wysokościach długości h_a, h_b, h_c można tak podzielić te sześć odcinków na dwie grupy po trzy odcinki, że z każdej z tych dwóch trójek odcinków można zbudować trójkąt.

Zadanie 19.

Udowodnij nierówność

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{2026\sqrt{2025}+2025\sqrt{2026}}<1.$$

Zadanie 20.

Pancernik Paweł planuje podróż po Parabolistanie. Przebywa w Pochodniowie, stolicy tego państwa. W Parabolistanie znajduje się $n > 0$ punktów turystycznych. Dla każdej pary różnych miejsc spośród Pochodniowa i punktów turystycznych istnieje dokładnie jedno bezpośrednie połączenie prowadzące w jednym z dwóch kierunków.

Paweł zauważył, że startując z Pochodniowa, może dostać się do każdego punktu turystycznego. Wykaż, że istnieje taka podróż rozpoczynająca się w Pochodniowie, podczas której Paweł odwiedzi każdy punkt turystyczny dokładnie raz i nie odwiedzi ponownie Pochodniowa.

Zadanie 21.

Niech $ABCDA'B'C'D'$ będzie sześcianem. Punkty M i N leżą odpowiednio na krawędziach BC i DD' w taki sposób, że $BM = DN$. Wykaż, że prosta $A'M$ jest prostopadła do płaszczyzny trójkąta $AB'N$.

Rozwiązania zadań

Zadanie 1.

Dodając do siebie czterocyfrowe liczby naturalne m oraz n, zamiast liczby m użyto liczby otrzymanej z m przez zamianę jednej cyfry na inną. W ten sposób otrzymano wynik równy $4(m+n)$. Znajdź wszystkie możliwe pary liczb (m, n).

Rozwiązanie: Zauważmy, że zmieniając cyfrę jedności, dziesiątek lub setek liczby m, możemy zwiększyć sumę $m+n$ o nie więcej niż

$$9 \cdot 100 = 900$$

(w przypadku, gdy zwiększymy cyfrę setek liczby m z 0 na 9). Tymczasem otrzymany wynik jest równy $4(m+n)$, czyli przewyższa sumę $m+n$ o liczbę

$$4(m+n) - (m+n) = 3(m+n) \geqslant 3 \cdot (1000 + 1000) = 6000.$$

Stąd żadna zmiana cyfry na pozycji jedności, dziesiątek ani setek liczby m nie byłaby wystarczająca. Oznacza to, że zmiana musiała dotyczyć cyfry tysięcy liczby m.

Niech d będzie dodatnią różnicą między nową a pierwotną cyfrą tysięcy. Wówczas

$$3(m+n) = 4(m+n) - (m+n) = d \cdot 1000.$$

Skoro liczby 3 oraz 1000 nie mają wspólnych dzielników większych od 1, to liczba $m+n$ jest podzielna przez 1000 oraz liczba d jest podzielna przez 3. Ponadto

$$3(m+n) \geqslant 3 \cdot 2000 = 6000,$$

zatem $d \geqslant 6$.

Z drugiej strony cyfra tysięcy liczby czterocyfrowej jest równa co najmniej 1, a po zmianie może być równa co najwyżej 9. Stąd $d \leqslant 8$.

Skoro liczba d jest podzielna przez 3, to otrzymujemy $d = 6$, a stąd

$$m + n = 2000.$$

Aby suma dwóch liczb czterocyfrowych była równa 2000, oba składniki muszą być równe 1000. Stąd jedyną parą (m, n) spełniającą warunki zadania jest $(1000, 1000)$. Po zmianie cyfry tysięcy w liczbie $m = 1000$ z 1 na 7 otrzymujemy

$$7000 + 1000 = 8000 = 4(1000 + 1000).$$

Zadanie 2.

Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Punkty D i E leżą na boku AB w taki sposób, że proste DI i AC są równoległe oraz proste EI i BC są równoległe. Udowodnij, że obwód trójkąta DEI jest równy długości boku AB.

Rozwiązanie: Środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC leży na przecięciu dwusiecznych kątów wewnętrznych tego trójkąta. Otrzymujemy stąd równości

$$\sphericalangle CAI = \sphericalangle IAD \qquad \text{oraz} \qquad \sphericalangle EBI = \sphericalangle IBC.$$

Jednocześnie z zakładanych w treści zadania równoległości $AC \parallel DI$ oraz $BC \parallel EI$ uzyskujemy odpowiednio równości kątów:

$$\sphericalangle DIA = \sphericalangle CAI \qquad \text{oraz} \qquad \sphericalangle EIB = \sphericalangle IBC.$$

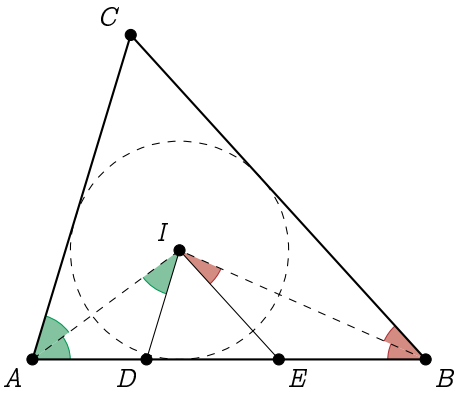
Oznacza to, że trójkąty ADI i IEB są równoramienne, przy czym

$$AD = DI \qquad \text{oraz} \qquad IE = EB.$$

Wynika stąd, że obwód trójkąta DEI równy jest

$$ID + DE + EI = AD + DE + EB = AB,$$

co kończy dowód.



Zadanie 3.

Udowodnij, że dla dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$\sqrt{3(a+b+c)} \geqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Rozwiązanie:

Sposób I

Skoro obie strony nierówności $\sqrt{3(a+b+c)} \geqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ są nieujemne, to możemy podnieść je do kwadratu, uzyskując równoważną nierówność

$$3(a+b+c) \geqslant \left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right)^2 = a + b + c + 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{bc} + 2\sqrt{ca}.$$

Po odjęciu $a + b + c$ od obu stron nierówności otrzymujemy

$$2(a+b+c) \geqslant 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{bc} + 2\sqrt{ca}.$$

Zauważmy, że po przeniesieniu $2\sqrt{ab} + 2\sqrt{bc} + 2\sqrt{ca}$ na lewą stronę możemy zapisać uzyskane wyrażenie w postaci sumy trzech kwadratów, wykorzystując wzory skróconego mnożenia. Istotnie, możemy zapisać uzyskaną wyżej nierówność w postaci

$$\left(a - 2\sqrt{ab} + b\right) + \left(b - 2\sqrt{bc} + c\right) + \left(c - 2\sqrt{ca} + a\right) \geqslant 0,$$

skąd uzyskujemy nierówność prawdziwą dla wszystkich nieujemnych liczb a, b, c:

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 + \left(\sqrt{b} - \sqrt{c}\right)^2 + \left(\sqrt{c} - \sqrt{a}\right)^2 \geqslant 0.$$

Wszystkie wykonane przekształcenia były równoważne, a otrzymana nierówność jest prawdziwa. Zatem prawdziwa jest również nierówność wyjściowa.

Sposób II

Po podzieleniu obu stron wyjściowej nierówności przez 3 otrzymujemy

$$\frac{\sqrt{3(a+b+c)}}{3} = \sqrt{\frac{3(a+b+c)}{9}} = \sqrt{\frac{a+b+c}{3}} \geqslant \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{3}.$$

Lewa strona jest średnią kwadratową, a prawa strona średnią arytmetyczną liczb $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$. Teza wynika więc z nierówności między średnią kwadratową a arytmetyczną.

Zadanie 4.

W turnieju szachowym rozegranym systemem „każdy z każdym” uczestniczyło 9 chłopców i 9 dziewcząt. Każda para uczestników rozegrała dokładnie jedną partię. Za wygraną przyznawano 1 punkt, za remis $\frac{1}{2}$ punktu, a za przegraną 0 punktów. Po zakończeniu turnieju okazało się, że wszyscy uczestnicy uzyskali tę samą liczbę punktów. Udowodnij, że co najmniej jedna partia między chłopcem a dziewczyną zakończyła się remisem.

Rozwiązanie: Przeprowadźmy dowód nie wprost. Przypuśćmy, że żadna partia między chłopcem a dziewczyną nie zakończyła się remisem. Obliczmy łączną liczbę punktów zdobytych przez chłopców.

W całym turnieju rozegrano

$$\binom{18}{2} = \frac{18 \cdot 17}{2} = 153$$

partie. W każdej partii przyznawano łącznie dokładnie 1 punkt, zatem suma punktów wszystkich uczestników wynosiła 153. Skoro wszyscy uczestnicy zdobyli tyle samo punktów, to każdy z nich uzyskał $\frac{153}{18} = \frac{17}{2}$ punktu. Łączny dorobek dziewięciu chłopców był zatem równy

$$9 \cdot \frac{17}{2} = \frac{153}{2}.$$

Zgodnie z naszym przypuszczeniem każda partia między chłopcem a dziewczyną zakończyła się zwycięstwem jednego z graczy. Taka partia przynosiła więc chłopcom łącznie albo 0, albo 1 punkt. Z kolei każda partia między dwoma chłopcami przynosiła chłopcom łącznie dokładnie 1 punkt, niezależnie od tego, czy zakończyła się zwycięstwem jednego z nich, czy remisem. Wobec tego łączny dorobek chłopców musiał być liczbą całkowitą. Otrzymaliśmy sprzeczność. Zatem co najmniej jedna partia między chłopcem a dziewczyną zakończyła się remisem.

Zadanie 5.

Na tablicy wypisano liczby naturalne od 1 do n, tworząc liczbę:

$$12345678910111213141 5\ldots$$

Wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą $n \geqslant 1$, dla której łączna liczba napisanych cyfr jest podzielna przez 1000.

Rozwiązanie: Najpierw obliczmy, ile cyfr zapisano po wypisaniu po kolei wszystkich liczb mających co najwyżej określoną liczbę cyfr:

$$\begin{aligned}
\text{po zapisaniu liczb od 1 do 9:} &\quad 9 \text{ cyfr},\\
\text{po zapisaniu liczb od 1 do 99:} &\quad 9 + 90 \cdot 2 = 189 \text{ cyfr},\\
\text{po zapisaniu liczb od 1 do 999:} &\quad 189 + 900 \cdot 3 = 2\,889 \text{ cyfr},\\
\text{po zapisaniu liczb od 1 do 9\,999:} &\quad 2\,889 + 9\,000 \cdot 4 = 38\,889 \text{ cyfr},\\
\text{po zapisaniu liczb od 1 do 99\,999:} &\quad 38\,889 + 90\,000 \cdot 5 = 488\,889 \text{ cyfr},\\
\text{po zapisaniu liczb od 1 do 999\,999:} &\quad 488\,889 + 900\,000 \cdot 6 = 5\,888\,889 \text{ cyfr}.
\end{aligned}$$

Szukana liczba n nie może być jednocyfrowa lub dwucyfrowa, gdyż dla każdego $n \leqslant 99$ zapisane jest nie więcej niż 189 cyfr.

Szukana liczba n nie jest też trzycyfrowa. Istotnie, po zapisaniu liczb od 1 do 99 mamy 189 cyfr, a zapisanie każdej kolejnej liczby zwiększa liczbę zapisanych cyfr o 3. Łączna liczba cyfr jest więc podzielna przez 3 i znajduje się między 192 a 2 889. Jedynymi wielokrotnościami liczby 1000 w tym przedziale są natomiast 1000 i 2000.

Podobnie stwierdzamy, że liczba n nie jest czterocyfrowa. Po zapisaniu wszystkich liczb co najwyżej trzycyfrowych mamy 2 889 cyfr, czyli liczbę nieparzystą. Każda kolejna liczba czterocyfrowa dopisana na końcu zwiększa liczbę cyfr o 4, więc łączna liczba cyfr nadal jest nieparzysta. Nie może zatem być podzielna przez 1000.

Liczba n nie jest również pięciocyfrowa, co uzasadnimy, analizując cyfry jedności liczby cyfr. Po zapisaniu wszystkich liczb co najwyżej czterocyfrowych mamy 38 889 cyfr. Dopisywanie kolejnych liczb pięciocyfrowych zwiększa liczbę cyfr za każdym razem o 5. Cyfra jedności liczby cyfr jest więc w tym przypadku na przemian równa 4 i 9. Zatem liczba cyfr nie może być podzielna przez 1000.

Wreszcie, liczba n nie jest sześciocyfrowa, co uzasadniamy analogicznie jak wcześniej. Po zapisaniu wszystkich liczb co najwyżej pięciocyfrowych mamy 488 889 cyfr, czyli liczbę nieparzystą. Każda kolejna dopisana na końcu liczba sześciocyfrowa zwiększa liczbę cyfr o 6, więc ich łączna liczba pozostaje nieparzysta.

Rozważymy teraz przypadek, gdy ostatnia dopisana liczba jest siedmiocyfrowa. Jak się okaże, w tym przypadku możliwe jest uzyskanie liczby cyfr podzielnej przez 1000. Po zapisaniu liczb od 1 do 999 999 mamy 5 888 889 cyfr. Niech k oznacza liczbę dopisanych liczb siedmiocyfrowych. Łączna liczba cyfr jest wtedy równa

$$5\,888\,889 + 7k.$$

Aby liczba ta była podzielna przez 1000, jej trzy ostatnie cyfry muszą być zerami. Liczba 5 888 889 kończy się cyframi 889. Stąd liczba $7k$ musi kończyć się cyframi 111.

Skoro $111 = 7 \cdot 15 + 6$ oraz $1000 = 7 \cdot 142 + 6$, to dla dowolnej liczby całkowitej m reszta z dzielenia liczby $111 + 1000m$ przez 7 równa jest reszcie z dzielenia liczby $6(m+1)$ przez 7. Najmniejsza dodatnia liczba całkowita m, dla której liczba $111 + 1000m$ jest podzielna przez 7, jest zatem równa 6. Wtedy $6\,111 = 7 \cdot 873$. Stąd $7k = 6\,111$, czyli $k = 873$.

Po liczbie 999 999 trzeba zatem zapisać jeszcze 873 liczby. Ostatnią z nich jest

$$n = 999\,999 + 873 = 1\,000\,872.$$

Liczba cyfr jest wówczas równa $5\,888\,889 + 7 \cdot 873 = 5\,895\,000$.

Zadanie 6.

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $\sphericalangle BAD = 80^\circ = \sphericalangle ABC$ oraz $BA = AD = DC$. Oblicz miarę kąta ADC, jeśli wiadomo, że jest on ostry.

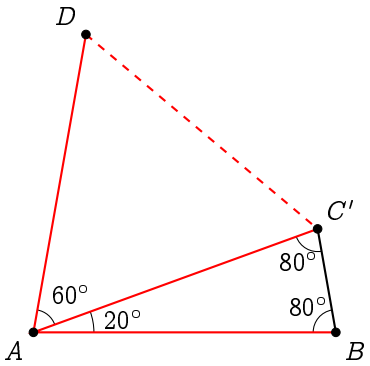
Rozwiązanie: Niech C' będzie takim punktem leżącym po tej samej stronie prostej AB co punkt C, że $\sphericalangle ABC' = 80^\circ = \sphericalangle BC'A$. Wykażemy, że $C' = C$.

Zachodzą równości:

$$\sphericalangle BAC' = 180^\circ - \sphericalangle ABC' - \sphericalangle BC'A = 20^\circ,$$
$$\sphericalangle C'AD = \sphericalangle BAD - \sphericalangle BAC' = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ.$$

Z równoramienności trójkąta ABC' wnioskujemy, że $AC' = AB = AD$. Ponadto $\sphericalangle C'AD = 60^\circ$. Stąd trójkąt ADC' jest równoboczny.

Skoro $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABC' = 80^\circ$ i punkty C, C' leżą po tej samej stronie prostej AB, to punkty B, C, C' są współliniowe. Skoro $CD = C'D$, to albo punkty C oraz C' pokrywają się, albo kąt $\sphericalangle ADC$ jest rozwarty (i ma miarę $60^\circ + 100^\circ = 160^\circ$). Drugi przypadek jest wykluczony przez założenia zadania. Stąd $C = C'$ i $\sphericalangle ADC = 60^\circ$.



Zadanie 7.

Liczbę naturalną nazwiemy *niedojrzałą*, jeśli suma jej cyfr w zapisie dziesiętnym jest podzielna przez 17. Znajdź najmniejszą liczbę naturalną n, dla której liczby n i $n+1$ są *niedojrzałe*.

Rozwiązanie: Zauważmy, że jeśli cyfra jedności liczby n jest różna od 9, to suma cyfr liczby $n+1$ jest o 1 większa od sumy cyfr liczby n. W takim przypadku sumy te nie mogą być jednocześnie podzielne przez 17.

Cyfra jedności szukanej liczby n jest zatem równa 9. Wynika stąd, że również cyfra dziesiątek liczby n jest równa 9. W przeciwnym razie cyfra jedności liczby $n+1$ byłaby równa 0, a cyfra dziesiątek liczby $n+1$ byłaby o 1 większa od cyfry dziesiątek liczby n. Wtedy jednak suma cyfr liczby $n+1$ byłaby mniejsza o 8 od sumy cyfr liczby n. Obie te sumy nie mogłyby być podzielne przez 17.

Suma cyfr dowolnej dwucyfrowej lub trzycyfrowej liczby kończącej się cyframi 99 jest nie mniejsza niż 18 i nie większa niż 27, więc nie jest podzielna przez 17.

Rozważmy zatem liczbę czterocyfrową o cyfrze dziesiątek i cyfrze jedności równej 9. Niech a będzie jej cyfrą tysięcy, a b cyfrą setek. Suma cyfr tej liczby to $a+b+18$. Liczba ta jest nie mniejsza niż 19 i nie większa niż 36. Jedyną zaś wielokrotnością liczby 17 w tym przedziale jest 34. Stąd $a+b+18=34$, czyli $a+b=16$. Zatem jedyne liczby czterocyfrowe, które mogą spełniać te warunki, to 7999, 8899 i 9799.

Liczba 7999 ma sumę cyfr równą 34, ale liczba 8000 ma sumę cyfr równą 8 będącą liczbą niepodzielną przez 17. Zatem liczba 7999 nie spełnia warunków zadania. Sumy cyfr liczb 8899 i 8900 są natomiast równe odpowiednio 34 oraz 17. Zatem zarówno 8899, jak i 8900 są niedojrzałe. Najmniejszą szukaną liczbą jest więc 8899.

Zadanie 8.

Rozwiąż w liczbach rzeczywistych układ równań

$$\begin{cases} x_1^{2026} + x_2^{2026} + \ldots + x_{67}^{2026} = \quad 1 \\ x_1^{2027} + x_2^{2027} + \ldots + x_{67}^{2027} = -1. \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Sposób I

Dodając równania układu stronami, otrzymujemy

$$(x_1^{2026} + x_1^{2027}) + \ldots + (x_{67}^{2026} + x_{67}^{2027}) = x_1^{2026}(1+x_1) + \ldots + x_{67}^{2026}(1+x_{67}) = 0.$$

Zauważmy, że 2026-ta potęga liczby rzeczywistej jest nieujemna. Zatem z warunku $x_1^{2026} + x_2^{2026} + \ldots + x_{67}^{2026} = 1$ wnioskujemy, że dla każdego i zachodzi $x_i^{2026} \leqslant 1$. Wynika stąd, że dla każdego i mamy $-1 \leqslant x_i \leqslant 1$, a stąd $x_i + 1 \geqslant 0$.

W konsekwencji

$$0 = x_1^{2026}(1 + x_1) + \ldots + x_{67}^{2026}(1 + x_{67}) \geqslant 0,$$

czyli $x_i^{2026}(1 + x_i) = 0$ dla każdego i. Zatem każda liczba x_i jest równa 0 lub -1.

Aby pierwsze równanie wyjściowego układu było spełnione, dokładnie jedna z liczb x_i musi być równa -1, a pozostałe muszą być zerami. Dla każdego $i = 1, \ldots, 67$ ciąg $(x_1, \ldots, x_{67})$ spełniający:

$$x_i = -1 \quad \text{oraz} \quad x_j = 0 \text{ dla } j \neq i$$

jest rozwiązaniem wyjściowego układu. Stąd mamy 67 rozwiązań.

Sposób II

Analogicznie jak w sposobie I uzasadniamy, że $-1 \leqslant x_i \leqslant 1$ dla każdego i.

Jeżeli dla pewnego i zachodzi $x_i = 1$, to z pierwszego równania wynika, że wszystkie pozostałe zmienne są równe 0. Wówczas lewa strona drugiego równania jest równa 1, a nie -1, więc taki przypadek jest niemożliwy.

Jeżeli dla pewnego i zachodzi $x_i = -1$, to ponownie z pierwszego równania wynika, że wszystkie pozostałe zmienne są równe 0. Otrzymujemy wówczas jedno z rozwiązań opisanych w sposobie I.

Pozostaje rozważyć przypadek, w którym dla każdego i zachodzi $-1 < x_i < 1$. Wówczas dla każdego i mamy

$$|x_i^{2027}| = |x_i| \cdot x_i^{2026} \leqslant x_i^{2026}.$$

Nierówność jest ostra, gdy $x_i \neq 0$. Skoro jednak $x_1^{2026} + \ldots + x_{67}^{2026} = 1$, to co najmniej jedna z liczb x_i jest różna od zera. Po zsumowaniu otrzymujemy więc

$$|x_1^{2027}| + \ldots + |x_{67}^{2027}| < x_1^{2026} + \ldots + x_{67}^{2026} = 1.$$

Korzystając z nierówności trójkąta, otrzymujemy

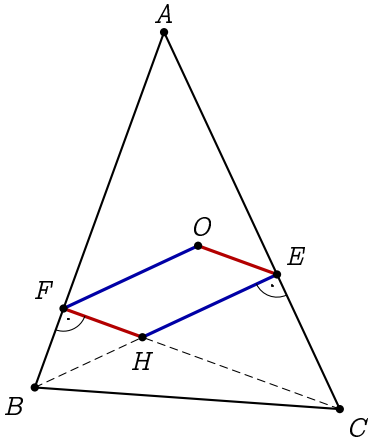
$$1 = \left|x_1^{2027} + \ldots + x_{67}^{2027}\right| \leqslant |x_1^{2027}| + \ldots + |x_{67}^{2027}| < x_1^{2026} + \ldots + x_{67}^{2026} = 1.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność.

Zadanie 9.

Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym ABC. Wysokości BE i CF przecinają się w punkcie H. Znajdź miarę kąta BAC, jeśli wiadomo, że czworokąt $OEHF$ jest równoległobokiem.

Rozwiązanie: Skoro proste OE i FH są równoległe, to obie są prostopadłe do boku AB (prosta HF zawiera wysokość trójkąta ABC prostopadłą do boku AB). Z drugiej strony, prosta przechodząca przez punkt O i prostopadła do boku AB jest symetralną tego boku. Symetralna ta zawiera więc punkt E. Stąd $AE = BE$. Trójkąt AEB jest więc prostokątny równoramienny, a $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAE = 45^\circ$.



Zadanie 10.

Wyznacz wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (a, b) spełniające równanie

$$4^a + 4a^2 + 4 = b^2.$$

Rozwiązanie: Skoro a jest dodatnią liczbą całkowitą, to liczba $4^a + 4a^2 + 4$ jest podzielna przez 4. Zatem liczba b^2 również jest podzielna przez 4, a liczba b jest parzysta. Zauważmy, że $b^2 > 4^a$, czyli $b > 2^a$. Po obu stronach są liczby parzyste, więc $b \geqslant 2^a + 2$. Stąd

$$4^a + 4a^2 + 4 = b^2 \geqslant (2^a + 2)^2 = 4^a + 4 \cdot 2^a + 4.$$

Po redukcji uzyskujemy warunek

$$a^2 \geqslant 2^a.$$

Dla $a = 1$ nierówność ta nie jest spełniona. Dla $a = 2, 3, 4$ jest ona spełniona. Uzasadnimy, że dla każdego $a \geqslant 5$ zachodzi nierówność przeciwna: $a^2 < 2^a$.

Dla $a = 5$ mamy rzeczywiście $5^2 = 25 < 32 = 2^5$. Niech więc $a \geqslant 6$. Liczbę a można zapisać w postaci $a = 2m$ lub $a = 2m + 1$, gdzie $m \geqslant 3$. Zauważmy, że

$$2^{m-1} = 1 + 1 + 2 + \ldots + 2^{m-2} > m.$$

Rzeczywiście, po prawej stronie znajduje się dokładnie m dodatnich składników, a ostatni z nich, czyli 2^{m-2}, jest większy od 1. Wobec tego

$$2^{m-1} \geqslant m + 1,$$

a zatem

$$2^m \geqslant 2m + 2 > 2m + 1 \geqslant a.$$

Ponadto $a \geqslant 2m$, więc

$$2^a \geqslant 2^{2m} = (2^m)^2 > a^2.$$

Wyjściowe równanie nie ma zatem rozwiązań dla $a = 1$ ani dla $a \geqslant 5$.

Dla $a = 2$ mamy $b^2 = 4^2 + 4 \cdot 2^2 + 4 = 36$, więc $b = 6$ i uzyskujemy rozwiązanie $(a, b) = (2, 6)$. Dla $a = 3$ otrzymujemy $b^2 = 4^3 + 4 \cdot 3^2 + 4 = 104$, więc liczba b nie jest całkowita i nie uzyskujemy rozwiązania. Dla $a = 4$ mamy $b^2 = 4^4 + 4 \cdot 4^2 + 4 = 324$, więc $b = 18$ i uzyskujemy rozwiązanie $(a, b) = (4, 18)$.

Ostatecznie jedynymi parami (a, b) spełniającymi równanie z treści zadania są $(2, 6)$ oraz $(4, 18)$.

Uwaga. Uzasadnienie nierówności $a^2 < 2^a$ dla liczb naturalnych $a \geqslant 5$ można również przeprowadzić, korzystając z zasady indukcji matematycznej.

Dla $a = 5$ mamy $5^2 = 25 < 32 = 2^5$, zatem krok bazowy indukcji jest prawdziwy. Załóżmy teraz, że dla pewnej liczby naturalnej $a \geqslant 5$ zachodzi $a^2 < 2^a$. Wówczas

$$2^{a+1} = 2 \cdot 2^a > 2a^2.$$

Dla $a \geqslant 5$ mamy $2a^2 - (a + 1)^2 = a^2 - 2a - 1 \geqslant 5a - 2a - 1 = 3a - 1 > 0$, skąd

$$2a^2 > (a + 1)^2.$$

W konsekwencji $2^{a+1} > (a + 1)^2$, co kończy krok indukcyjny i dowód nierówności.

Zadanie 11.

Makka Pakka kolekcjonuje kolorowe kamienie, ale jedynie te o dodatniej wadze wyrażonej całkowitą liczbą kilogramów. Wie, że ich łączna waga wynosi 2026 kg, jednak nie jest w stanie rozdzielić wszystkich kamieni między dwa worki w taki sposób, aby w obu workach łączna waga kamieni była taka sama. Ile maksymalnie kamieni może liczyć kolekcja Makki Pakki? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie: Najpierw zauważmy, że kolekcja może liczyć 1013 kamieni. Przykładowe dobory wag 1013 kamieni o łącznej wadze 2026 kg spełniających warunki zadania to

$$2,\ 2,\ \ldots, 2 \qquad \text{lub} \qquad 1014,\ 1,\ 1,\ \ldots,\ 1.$$

Pozostaje wykazać, że każdą kolekcję co najmniej 1014 kamieni o łącznej wadze 2026 kg można rozdzielić między dwa worki o jednakowej łącznej wadze.

Sposób I

Przypuśćmy, że Makka Pakka ma $n \geqslant 1014$ kamieni o wagach $a_1, \ldots, a_n$.

Zaczniemy od obserwacji pomocniczej. Jeżeli w kolekcji znajduje się kamień o wadze $w > 1$, to znajduje się w niej także co najmniej w kamieni o wadze 1 kg.

Istotnie, niech k oznacza liczbę kamieni o wadze 1 kg. Poza wybranym kamieniem o wadze w i k kamieniami jednokilogramowymi pozostaje $n-k-1$ kamieni. Każdy z nich waży co najmniej 2 kg. Zatem

$$2026 = a_1 + \ldots + a_n \geqslant w + \underbrace{k \cdot 1}_{\text{o wadze 1 kg}} + \underbrace{(n-k-1)\cdot 2}_{\text{pozostałe kamienie}} \geqslant w + k + (1013-k)\cdot 2.$$

Zatem $2026 \geqslant w + 2026 - k$, czyli $k \geqslant w$, co kończy dowód obserwacji pomocniczej.

Postępujemy w sposób następujący: do pierwszego worka wrzucamy jedynie kamienie o wadze większej niż 1 kg (w dowolnej kolejności). Możliwe są dwa przypadki.

- Przypadek 1. W pewnym momencie, po wrzuceniu kamienia o wadze $w > 1$, łączna waga kamieni w pierwszym worku przekroczy po raz pierwszy 1013 kg. Zgodnie z obserwacją dysponujemy co najmniej w kamieniami jednokilogramowymi. Możemy zatem zamiast kamienia o wadze w wrzucić do pierwszego worka tyle kamieni o wadze 1 kg, aby łączna waga kamieni w tym worku była równa 1013 kg. Wszystkie pozostałe kamienie wrzucamy zaś do drugiego worka.

- Przypadek 2. Łączna waga kamieni w pierwszym worku nigdy nie przekroczy 1013 kg, bo zabraknie ciężkich kamieni. W takiej sytuacji mamy jednak co najmniej 1013 kamieni o wadze 1 kg. Wybieramy spośród nich dokładnie 1013 i wrzucamy do drugiego worka. Pozostałe dorzucamy do pierwszego worka.

W obu sytuacjach uzyskaliśmy taki podział kamieni między dwa worki, że łączna waga kamieni w każdym worku jest taka sama, co nie jest zgodne z treścią zadania. Wykazaliśmy zatem, że Makka Pakka ma co najwyżej 1013 kamieni spełniających warunki zadania.

Sposób II

Ponownie przypuśćmy, wbrew postawionej wyżej tezie, że Makka Pakka ma co najmniej 1014 kamieni o wagach $a_1, \ldots, a_n$ spełniających warunki z treści zadania.

Rozważmy następujące liczby:

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1, \\ b_2 &= a_1 + a_2, \\ b_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ &\vdots \\ b_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 2026. \end{aligned}$$

Skoro każdy kamień ma dodatnią wagę, to dla każdego $i < n$ zachodzi $0 < b_i < 2026$. Liczb $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ jest co najmniej 1013.

Możliwe są zatem (na mocy zasady szufladkowej) dwa przypadki.

- Przypadek 1. Istnieje takie $i < n$, że liczba b_i jest podzielna przez 1013.
- Przypadek 2. Istnieją takie $i > j$, że liczba $b_i - b_j$ jest podzielna przez 1013.

W pierwszej sytuacji mamy $b_i = 1013$, czyli $a_1 + \ldots + a_i = 1013$ i kamienie o wagach $a_1, a_2, \ldots, a_i$ wrzucamy do jednego worka, a pozostałe $n - i$ kamieni wrzucamy do drugiego worka.

W drugiej sytuacji $b_i - b_j = a_{j+1} + a_{j+2} + \ldots + a_i = 1013$, więc $i - j$ kamieni o wagach $a_{j+1}, \ldots, a_i$ wrzucamy do jednego worka, a pozostałe do drugiego.

W obu przypadkach uzyskujemy więc podział na worki o równych wagach, co prowadzi do sprzeczności z założeniem, że Makka Pakka ma co najmniej 1014 kamieni spełniających warunki zadania.

Zadanie 12.

Niezerowe liczby rzeczywiste a, b spełniają równość

$$a + \frac{b^2}{a} = b + \frac{a^2}{b}.$$

Udowodnij, że $a = b$.

Rozwiązanie: Liczby a, b są niezerowe, więc możemy przemnożyć wyjściowe równanie przez ab, otrzymując równanie równoważne

$$a^2b + b^3 = ab^2 + a^3.$$

Przenosząc składniki i wyłączając wspólny czynnik przed nawias, uzyskujemy:

$$\begin{aligned} b^3 - ab^2 &= a^3 - a^2b, \\ b^2(b-a) &= a^2(a-b), \\ (a^2+b^2)(b-a) &= 0. \end{aligned}$$

Skoro liczby a, b są niezerowe, to $a^2 + b^2 > 0$. Stąd wynika, że $a = b$.

Zadanie 13.

Gargamel przeprowadził następujący eksperyment na siedmiu złapanych Smerfach $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7$. Ustawił Smerfy jeden za drugim w taki sposób, że każdy z nich widzi wszystkie Smerfy o numerach większych od swojego, ale nie widzi żadnego Smerfa o numerze mniejszym (na przykład Smerf S_4 widzi S_5, S_6, S_7, a nie widzi S_1, S_2, S_3). Następnie na głowę każdego z siedmiu Smerfów nałożył czapeczkę w kolorze czerwonym albo niebieskim. Poinformował też Smerfy, że miał do dyspozycji łącznie 6 czerwonych i 7 niebieskich czapeczek.

Na koniec zadał każdemu z nich kolejno pytanie: „Jakiego koloru jest twoja czapeczka?", rozpoczynając od S_1, a kończąc na S_7. Każdy Smerf słyszał odpowiedzi udzielone przez poprzedników.

Odpowiedzi Smerfów były następujące: każdy z sześciu Smerfów $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ na zadane pytanie odpowiedział: „Nie wiem", natomiast ostatni zapytany Smerf S_7 odpowiedział: „Wiem, mam czapeczkę w kolorze . . .".

Wyjaśnij, skąd wynika pewność ostatniego Smerfa co do tego, jaki kolor czapeczki ma na głowie, mimo że znał jedynie odpowiedzi swoich poprzedników.

Uwaga: Smerfy są nieskończenie mądre i znają zasady eksperymentu, ale zaskoczone przez Gargamela nie mogły wcześniej ustalić wspólnej strategii.

Rozwiązanie: Zastanówmy się, kiedy Smerf S_1 znałby swój kolor czapeczki. Gdyby każda z sześciu czapeczek widzianych przez S_1 była czerwona, to wykorzystane byłyby wszystkie czerwone czapeczki. Smerf S_1 wiedziałby wtedy, że sam ma czapeczkę niebieską. Skoro jednak odpowiedział „nie wiem", to oznacza, że wśród Smerfów $S_2, \ldots, S_7$ co najmniej jeden ma na głowie niebieską czapeczkę.

Tę informację S_1 pośrednio przekazał Smerfowi S_2, więc teraz S_2 wie, że istnieje niebieska czapeczka wśród nich – skoro więc odpowiedział „nie wiem", to musi ją widzieć. Gdyby bowiem widział same czerwone czapeczki, wiedziałby, że sam ma niebieską czapeczkę.

Analogicznie, odpowiedź Smerfa S_2 oznacza dla Smerfa S_3, że wśród czapeczek $S_3, \ldots, S_7$ jest przynajmniej jedna niebieska czapeczka. I on odpowiada „Nie wiem", a zatem nie widzi przed sobą samych czerwonych czapeczek. To samo rozumowanie powtarzamy następnie dla kolejnych Smerfów S_4, S_5 oraz S_6.

Po odpowiedzi Smerfa S_6 wiadomo, że wśród Smerfów stojących przed nim znajduje się co najmniej jeden Smerf w niebieskiej czapeczce. Zatem to właśnie S_7 musi mieć niebieską czapeczkę. Smerf S_7 potrafi odtworzyć całe to rozumowanie na podstawie usłyszanych odpowiedzi, dlatego zna kolor swojej czapeczki.

Komentarz: Zauważmy, że jest to jedyna czapeczka, o której kolorze wiemy na pewno. Za każdym razem przekazywana informacja to „widzę co najmniej jedną niebieską czapeczkę", ale może być ich więcej, w skrajnym przypadku mogą być nawet same niebieskie czapeczki.

Zadanie 14.

Niech M będzie środkiem boku AB trójkąta ostrokątnego ABC. Punkty D i E są spodkami wysokości opuszczonych odpowiednio z wierzchołków A i B. Udowodnij, że proste MD i ME są styczne do okręgu opisanego na trójkącie CDE.

Rozwiązanie: Udowodnimy, że prosta MD jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie CDE. Uzasadnienie, że również prosta ME jest styczna do tego okręgu, jest analogiczne.

Niech S będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie CDE. Niech H będzie punktem przecięcia się wysokości trójkąta ABC. Wtedy

$$\sphericalangle HDC = 90^\circ = \sphericalangle HEC,$$

czyli punkt H leży na okręgu opisanym na trójkącie CDE, a odcinek CH jest średnicą tego okręgu. Stąd punkt S jest środkiem odcinka CH.

Trójkąty ABD oraz CDH są prostokątne, a punkty M, S są środkami ich przeciwprostokątnych. Stąd uzyskujemy równości

$$CS = SD = SH \quad \text{oraz} \quad AM = DM = BM.$$

Niech $\sphericalangle ABC = \beta$. Wówczas

$$\sphericalangle HCD = \sphericalangle HCB = 90^\circ - \sphericalangle ABC = 90^\circ - \beta.$$

Skoro HSD jest kątem środkowym opartym na łuku HD, a kąt HCD jest kątem wpisanym opartym na tym łuku, to

$$\sphericalangle HSD = 2 \cdot \sphericalangle HCD = 180^\circ - 2\beta.$$

Trójkąt HDS jest równoramienny oraz $SD = SH$, więc

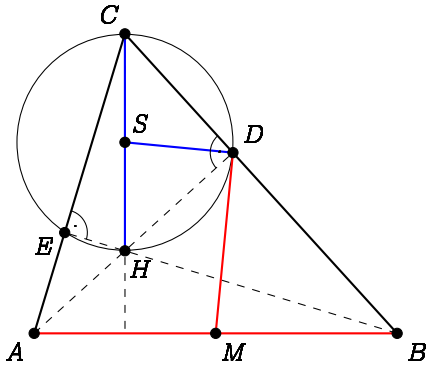
$$\sphericalangle HDS = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle HSD) = \beta.$$

Zachodzą wreszcie równości:

$$\sphericalangle HDM = \sphericalangle ADM = \sphericalangle MAD = \sphericalangle BAD = 90^\circ - \beta,$$
$$\sphericalangle SDM = \sphericalangle HDS + \sphericalangle HDM = \beta + (90^\circ - \beta) = 90^\circ.$$

W rezultacie proste MD oraz SD są prostopadłe. Skoro SD jest promieniem okręgu opisanego na trójkącie CDE, to prosta DM jest styczna do tego okręgu. Zatem otrzymaliśmy tezę.

Komentarz: Można to rozumowanie nieco skrócić, korzystając z własności kątów dopisanych. Uzasadniliśmy, że $\sphericalangle HDM = 90^\circ - \beta = \sphericalangle HCD$, co jest jednym z warunków równoważnych bycia kątem dopisanym do okręgu, skąd wywnioskować można bezpośrednio tezę.



Zadanie 15.

Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych (k, l) spełniające równanie $k^5 - l^5 = 16kl$.

Rozwiązanie:

Sposób I

Jeżeli jedna z liczb k, l jest równa 0, to z wyjściowego równania wynika, że również druga z tych liczb jest równa 0. Otrzymujemy zatem rozwiązanie $(k, l) = (0, 0)$.

Załóżmy dalej, że obie liczby k, l są niezerowe. Odnotujmy następującą obserwację. Skoro prawa strona równania jest liczbą parzystą, to również liczba $k^5 - l^5$ jest parzysta. Stąd liczby k i l mają tę samą parzystość.

Rozważmy najpierw przypadek, w którym liczby k i l mają ten sam znak. Wtedy $16kl > 0$, a więc $k^5 - l^5 > 0$. Stąd $k > l$. Przyjmijmy $x = k$ i $y = l$, jeśli $k > l > 0$, oraz $x = -l$ i $y = -k$, jeśli $0 > k > l$. W obu sytuacjach mamy więc $x > y > 0$ oraz

$$x^5 - y^5 = 16xy.$$

Skoro x i y są różnymi liczbami tej samej parzystości, to $x - y \geqslant 2$. W szczególności $x \geqslant 3$. Korzystając ze wzoru na różnicę piątych potęg, otrzymujemy szacowanie

$$\begin{aligned} x^5 - y^5 &= (x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4) \\ &\geqslant 2(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4) \\ &> 2x^3y \geqslant 18xy > 16xy. \end{aligned}$$

Uzyskaliśmy sprzeczność. Liczby k i l nie mogą więc mieć tego samego znaku.

Pozostaje przypadek, w którym liczby k i l mają przeciwne znaki. Wtedy mamy $k^5 - l^5 < 0$, czyli $k < 0 < l$. Niech $x = -k$ oraz $y = l$. Wówczas x, y są dodatnimi liczbami całkowitymi tej samej parzystości, a wyjściowe równanie przyjmuje postać $x^5 + y^5 = 16xy$. Z uwagi na symetrię liczb x i y możemy przyjąć, że $x \geqslant y$. Wtedy

$$x^5 < x^5 + y^5 = 16xy \leqslant 16x^2.$$

Po podzieleniu przez x^2 otrzymujemy $x^3 \leqslant 16$, a stąd $x \leqslant 2$. Liczby x i y są dodatnie, mają tę samą parzystość oraz $y \leqslant x \leqslant 2$. Rozważyć należy więc tylko dwie pary: $(x, y) = (1, 1)$ oraz $(x, y) = (2, 2)$. Nietrudno sprawdzić, że pierwsza nie spełnia równania $x^5 + y^5 = 16xy$, a druga — spełnia. Stąd $x = y = 2$, czyli $k = -2, l = 2$. Ostatecznie wszystkimi rozwiązaniami są $(k, l) = (0, 0)$ oraz $(k, l) = (-2, 2)$.

Sposób II

Rozważamy jedynie przypadek, gdy $kl \neq 0$. Niech d będzie największym wspólnym dzielnikiem liczb $|k|$ oraz $|l|$. Istnieją wtedy względnie pierwsze liczby całkowite k_0, l_0 takie, że $k = dk_0$ oraz $l = dl_0$. Po podstawieniu tych równości do wyjściowego równania otrzymujemy

$$d^5(k_0^5 - l_0^5) = 16d^2k_0l_0.$$

Skoro $d > 0$, to możemy podzielić obie strony przez d^2, uzyskując

$$d^3(k_0^5 - l_0^5) = 16k_0l_0.$$

Zauważmy, że liczby k_0l_0 oraz $k_0^5 - l_0^5$ są względnie pierwsze. Gdyby bowiem pewna liczba pierwsza p dzieliła obie te liczby, to dzieliłaby co najmniej jedną z liczb k_0, l_0. Gdyby liczba p była dzielnikiem k_0, to z podzielności $k_0^5 - l_0^5$ przez p wynikałoby, że p jest też dzielnikiem l_0^5, a stąd, że p jest dzielnikiem l_0. Analogicznie uzasadniamy, że gdyby liczba p była dzielnikiem l_0, to byłaby także dzielnikiem k_0. Uzyskalibyśmy więc w obu przypadkach sprzeczność z założeniem, że k_0 i l_0 są względnie pierwsze.

Liczba $k_0^5 - l_0^5$ dzieli liczbę $16k_0l_0$, a jest względnie pierwsza z k_0l_0. Musi więc dzielić liczbę 16. W szczególności

$$|k_0^5 - l_0^5| \leqslant 16.$$

Uzasadnimy, że $|k_0| = |l_0| = 1$. Przypuśćmy, że co najmniej jedna z tych wartości bezwzględnych jest większa niż 1.

Jeżeli k_0 i l_0 mają ten sam znak, to ich wartości bezwzględne są różnymi dodatnimi liczbami całkowitymi. Oznaczmy większą z nich przez u, a mniejszą przez v. Wtedy $u \geqslant 2$ oraz $v \geqslant 1$, więc

$$|k_0^5 - l_0^5| = u^5 - v^5 = (u - v)(u^4 + u^3v + u^2v^2 + uv^3 + v^4) \geqslant 31 > 16,$$

co jest niemożliwe. Jeżeli natomiast k_0 i l_0 mają przeciwne znaki, to

$$|k_0^5 - l_0^5| = |k_0|^5 + |l_0|^5 \geqslant 2^5 + 1^5 = 33 > 16.$$

Ponownie więc uzyskujemy sprzeczność. Zatem rzeczywiście $|k_0| = |l_0| = 1$.

Skoro $k_0^5 - l_0^5 \neq 0$, to liczby k_0 i l_0 mają przeciwne znaki. Stąd $k_0 = -l_0$, a więc także $k = -l$.

Po podstawieniu $k = -l$ do wyjściowego równania otrzymujemy $2k^5 = -16k^2$. Skoro zakładamy, że $k \neq 0$, to uzyskujemy $k^3 = -8$. Zatem $k = -2$ i stąd $l = 2$.

Ostatecznie wszystkimi rozwiązaniami są $(k, l) = (0, 0)$ oraz $(k, l) = (-2, 2)$.

Zadanie 16.

Pan Ambroży Kleks zadał Adasiowi następującą zagadkę. Narysował na aksamitnej kartce prostokątną tablicę o dodatniej liczbie wierszy i kolumn, a następnie w każde jej pole wpisał liczbę całkowitą. Wpisane liczby nie musiały być różne. W jednym ruchu Adaś wybiera wiersz lub kolumnę i zmienia znak każdej liczby w wybranym wierszu lub kolumnie. Czy Adaś może, niezależnie od liczb wpisanych przez Ambrożego, wykonać ruchy w taki sposób, aby na koniec suma liczb w każdej kolumnie oraz suma liczb w każdym wierszu była nieujemna? Odpowiedź uzasadnij.

Bonus: Adaś, po rozwiązaniu zagadki, zrewanżował się profesorowi, zadając mu tę samą zagadkę, lecz dla liczb rzeczywistych. Jaka jest odpowiedź na pytanie Adasia?

Rozwiązanie: Udowodnimy, że Adaś może, niezależnie od liczb wpisanych przez Ambrożego, wykonać ruchy w taki sposób, aby na koniec suma liczb w każdej kolumnie oraz suma liczb w każdym wierszu była nieujemna.

Przyjmijmy następującą strategię. Wykonujemy opisany ruch dla dowolnej kolumny lub dowolnego wiersza, którego suma jest ujemna. Brak możliwości wykonania ruchu oznacza, że postawiona wyżej teza jest prawdziwa. Wystarczy więc pokazać, że liczba opisanych wyżej ruchów jest skończona.

Zauważmy, że suma wszystkich liczb zapisanych w tablicy rośnie po wykonaniu opisanego wyżej ruchu. Istotnie, jeśli suma liczb w wybranym wierszu lub kolumnie jest równa $-s < 0$, to po wykonaniu ruchu jest równa $s > 0$, czyli łączna suma liczb zapisanych w tablicy wzrasta o $2s \geqslant 2$, gdyż s jest liczbą całkowitą.

Niezależnie od wykonywanych operacji suma wszystkich liczb w tablicy nie jest większa niż suma wartości bezwzględnych wszystkich wpisanych liczb. Skoro po każdym opisanym ruchu suma rośnie o co najmniej 2, to opisanych ruchów musi być skończenie wiele.

Rozwiązanie bonusu: W przypadku liczb rzeczywistych sytuacja jest nieco inna, choć nadal odpowiedź jest pozytywna. Tym razem sam fakt, że suma wszystkich liczb w tablicy ściśle rośnie, nie wystarcza. Istnieją bowiem nieskończone ciągi rosnące i ograniczone z góry, na przykład $s_n = -\frac{1}{n}$.

Wykorzystamy jednak fakt, że możliwych do uzyskania tablic jest tylko skończenie wiele. Wykonywane ruchy nie zmieniają wartości bezwzględnej każdej liczby wpisanej w tablicę. Jeśli w tablicy jest $a \cdot b$ liczb, to wykonywane operacje mogą prowadzić do uzyskania co najwyżej 2^{ab} różnych tablic, a więc możliwych do uzyskania sum również jest skończenie wiele. Zatem opisanych w rozwiązaniu ruchów musi być nadal skończenie wiele, gdyż każdy taki ruch zwiększa sumę liczb wpisanych w tablicę.

Zadanie 17.

Wyznacz wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (a, b) takie, że $a^2 + b^2$ jest liczbą pierwszą, a $2ab$ jest kwadratem liczby naturalnej.

Rozwiązanie: Zauważmy, że przyjmując $a^2 + b^2 = p$ i $2ab = n^2$, otrzymujemy

$$p = (a+b)^2 - n^2 = (a+b-n)(a+b+n).$$

Wynika stąd, że skoro $p > 0$ i $a + b + n > 0$, to $a + b - n > 0$, a co za tym idzie, $a + b - n = 1$ oraz $a + b + n = p$. Stąd $n = a + b - 1$. Skoro $n^2 = 2ab$, to:

$$\begin{aligned}(a+b-1)^2 &= 2ab,\\ a^2 + b^2 + 1 - 2a - 2b &= 0,\\ (a-1)^2 + (b-1)^2 &= 1.\end{aligned}$$

Skoro $a, b > 0$, to jedynymi możliwymi rozwiązaniami są $(1, 2)$ i $(2, 1)$. Bezpośrednio sprawdzamy, że obie te pary spełniają założenia zadania.

Komentarz:

Zauważmy, że skoro $a^2 + b^2$ jest liczbą pierwszą, to liczby a, b są względnie pierwsze. W przeciwnym razie ich wspólny dzielnik dzieliłby też $a^2 + b^2$. Skoro liczba $2ab$ jest kwadratem, to jedna z liczb a i b jest kwadratem liczby naturalnej, a druga – podwojonym kwadratem liczby naturalnej. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $a = 2c^2$ i $b = d^2$. Wówczas

$$p = a^2 + b^2 = 4c^4 + d^4 = (2c^2 + d^2)^2 - 4c^2d^2 = (2c^2 - 2cd + d^2)(2c^2 + 2cd + d^2).$$

Jest to rozkład równoważny opisanemu w rozwiązaniu. Aby to zobaczyć, wystarczy podstawić $2c^2 = a$ i $d^2 = b$.

Zadanie 18.

Udowodnij, że dla trójkąta ostrokątnego o bokach długości a, b, c oraz wysokościach długości h_a, h_b, h_c można tak podzielić te sześć odcinków na dwie grupy po trzy odcinki, że z każdej z tych dwóch trójek odcinków można zbudować trójkąt.

Rozwiązanie: Przypomnijmy, że z odcinków o (nieujemnych) długościach $x \geqslant y \geqslant z$ można zbudować trójkąt wtedy i tylko wtedy, gdy $y + z > x$.

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $c \leqslant b \leqslant a$. Uzasadnimy, że można zbudować trójkąty z odcinków długości h_a, h_b, c oraz a, b, h_c.

Przyjmujemy, że rozważany trójkąt ma wierzchołki A, B, C oraz $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. Przyjmujemy też, że wysokości o długości h_a, h_b, h_c są prostopadłe odpowiednio do boków BC, AC, AB.

Niech punkty D, E i F będą spodkami wysokości h_a, h_b i h_c, a punkt H — punktem przecięcia wysokości w trójkącie ABC. Skoro trójkąt ABC jest ostrokątny, to punkty D, E, F nie są wierzchołkami trójkąta ABC i leżą na jego bokach, a punkt H leży wewnątrz trójkąta ABC.

Najpierw rozważmy odcinki o długościach h_a, h_b, c. W trójkątach prostokątnych ADB i AEB odcinek AB, którego długość jest równa c, jest przeciwprostokątną. Zatem $h_a < c$ oraz $h_b < c$. Ponadto punkt H leży między punktami A i D oraz między punktami B i E, więc $h_a > AH$ oraz $h_b > BH$. Z nierówności trójkąta zastosowanej w trójkącie AHB otrzymujemy

$$AH + BH > AB = c.$$

Wobec tego

$$h_a + h_b > AH + BH > c.$$

Uzasadniliśmy zatem, że z odcinków h_a, h_b, c można zbudować trójkąt.

Rozważmy teraz odcinki o długościach a, b, h_c. W trójkącie prostokątnym ACF odcinek AC ma długość b i jest przeciwprostokątną, zatem $h_c < b \leqslant a$. Wystarczy więc wykazać, że $b + h_c > a$.

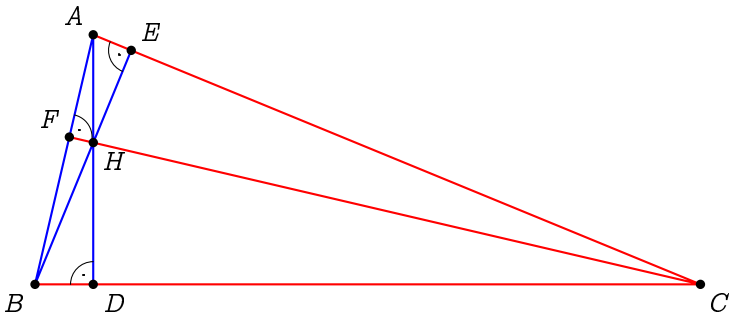
Skoro punkt F leży wewnątrz boku AB, to $BF < c \leqslant b$. Z nierówności trójkąta zastosowanej w trójkącie BCF wynika natomiast, że

$$a = BC < BF + CF = BF + h_c.$$

Łącząc uzyskane nierówności, otrzymujemy

$$a < BF + h_c < b + h_c.$$

Zatem również z odcinków o długościach a, b, h_c można zbudować trójkąt.



Zadanie 19.

Udowodnij nierówność

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{2026\sqrt{2025}+2025\sqrt{2026}}<1.$$

Rozwiązanie: Zauważmy, że każdy składnik lewej strony rozważanej nierówności ma postać

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}},$$

gdzie $n=1,\ldots,2025$. Korzystając ze wzorów skróconego mnożenia, usuwamy niewymierność z mianownika:

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2\cdot n-n^2\cdot(n+1)}=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n^2+n}.$$

Rozkładamy uzyskany ułamek na różnicę ułamków i skracamy odpowiednie wyrażenia, otrzymując

$$\frac{(n+1)\sqrt{n}}{n(n+1)}-\frac{n\sqrt{n+1}}{n(n+1)}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Zatem lewa strona wyjściowej nierówności może być zapisana w postaci

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{\sqrt{2025}}-\frac{1}{\sqrt{2026}}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{2026}}.$$

Prawa strona jest oczywiście mniejsza od 1, co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 20.

Pancernik Paweł planuje podróż po Parabolistanie. Przebywa w Pochodniowie, stolicy tego państwa. W Parabolistanie znajduje się $n>0$ punktów turystycznych. Dla każdej pary różnych miejsc spośród Pochodniowa i punktów turystycznych istnieje dokładnie jedno bezpośrednie połączenie prowadzące w jednym z dwóch kierunków.

Paweł zauważył, że startując z Pochodniowa, może dostać się do każdego punktu turystycznego. Wykaż, że istnieje taka podróż rozpoczynająca się w Pochodniowie, podczas której Paweł odwiedzi każdy punkt turystyczny dokładnie raz i nie odwiedzi ponownie Pochodniowa.

Rozwiązanie: Przetłumaczmy treść zadania na język grafów. Dany jest graf skierowany (połączenia między wierzchołkami są jednokierunkowe) z wyróżnionym wierzchołkiem P, czyli stolicą. Wiemy ponadto, że między każdymi dwoma wierzchołkami znajduje się dokładnie jedno połączenie. Zakładamy przy tym, że startując z wierzchołka P, jesteśmy w stanie dojść pewną ścieżką do każdego z pozostałych n wierzchołków. Teza zadania jest równoważna temu, że istnieje ścieżka startująca w wierzchołku P, która odwiedza każdy wierzchołek grafu dokładnie raz.

Sposób I

Rozważmy nasz graf oraz najdłuższą ścieżkę, która wychodzi z P i nie przechodzi dwukrotnie przez żaden wierzchołek. Przyjmijmy, że jest to ścieżka przechodząca przez wierzchołki

$$P \to B_1 \to B_2 \to \ldots \to B_t$$

dla pewnego $t \leqslant n$. Jeśli $t = n$, to rozwiązanie jest zakończone. Przypuśćmy więc, że $t < n$ i istnieją pewne wierzchołki poza tą ścieżką. Wybierzmy dowolny taki wierzchołek X.

Rozważana ścieżka jest najdłuższa, więc nie może zachodzić $B_t \to X$, gdyż wtedy moglibyśmy dopisać X na jej końcu. Zatem istnieje połączenie $X \to B_t$.

Niech $B_0 = P$. Przypuśćmy, że dla pewnego i zachodzi $B_i \to X$. Wybierzmy największe takie i. Skoro $X \to B_t$, to $i < t$. Z maksymalności i wynika, że nie zachodzi $B_{i+1} \to X$, a więc $X \to B_{i+1}$. Moglibyśmy zatem wstawić X do ścieżki:

$$B_0 \to \ldots \to B_i \to X \to B_{i+1} \to \ldots \to B_t,$$

otrzymując dłuższą ścieżkę. Jest to sprzeczne z jej wyborem. Wobec tego dla każdego $i = 0, 1, \ldots, t$ zachodzi $X \to B_i$.

W rezultacie dowolny wierzchołek poza rozważaną najdłuższą ścieżką ma wszystkie połączenia skierowane w stronę ścieżki. Oznacza to jednak, że z żadnego wierzchołka ścieżki nie można przejść do jakiegokolwiek wierzchołka poza tą ścieżką, co przeczy założeniom zadania. Uzyskana sprzeczność oznacza, że rozważana ścieżka zawiera wszystkie wierzchołki grafu, co kończy rozwiązanie.

Sposób II

Przeprowadzimy indukcję względem liczby n punktów turystycznych. Dla $n = 1$ teza jest oczywista. Załóżmy, że jest prawdziwa dla każdego grafu o mniej niż $n + 1$ wierzchołkach. Rozważmy graf o $n + 1$ wierzchołkach.

Dla każdego punktu turystycznego określmy jego odległość od P jako najmniejszą liczbę połączeń potrzebnych, aby dotrzeć do niego z P. Wybierzmy punkt X o największej odległości od P.

Po usunięciu punktu X z grafu nadal można dotrzeć z punktu P do każdego z pozostałych $n-1$ punktów. Istotnie, gdyby najkrótsza droga z P do pewnego punktu $Y \neq X$ przechodziła przez X, to punkt Y byłby dalej od P niż X, co przeczyłoby wyborowi X. Możemy więc zastosować założenie indukcyjne. Istnieje ścieżka

$$P \to A_1 \to \ldots \to A_{n-1},$$

przechodząca przez wszystkie punkty poza X dokładnie raz. Skoro z P można dotrzeć do X, to co najmniej jeden z wierzchołków $P, A_1, \ldots, A_{n-1}$ ma krawędź skierowaną do X. Niech $A_0 = P$. Wybierzmy największe i takie, że $A_i \to X$.

Jeżeli $i = n-1$, to dopisujemy X na końcu uzyskanej wyżej ścieżki. Jeżeli zaś $i < n-1$, to z maksymalności i wynika, że $X \to A_{i+1}$.

Możemy więc wstawić X między A_i i A_{i+1}:

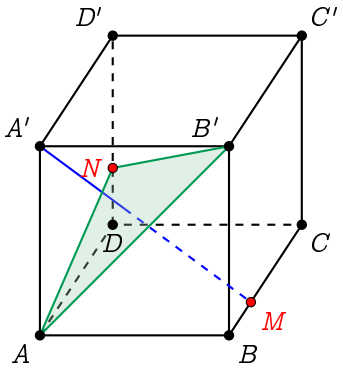
$$A_0 \to \ldots \to A_i \to X \to A_{i+1} \to \ldots \to A_{n-1}.$$

W obu przypadkach otrzymujemy ścieżkę rozpoczynającą się w P i odwiedzającą każdy punkt turystyczny dokładnie raz. Kończy to krok indukcyjny i cały dowód.

Zadanie 21.

Niech $ABCDA'B'C'D'$ będzie sześcianem. Punkty M i N leżą odpowiednio na krawędziach BC i DD' w taki sposób, że $BM = DN$. Wykaż, że prosta $A'M$ jest prostopadła do płaszczyzny trójkąta $AB'N$.

Rozwiązanie: Zacznijmy od wykonania rysunku.



Aby udowodnić, że prosta jest prostopadła do pewnej płaszczyzny, wystarczy wykazać, że jest ona prostopadła do dwóch przecinających się prostych leżących w tej płaszczyźnie.

Rozważmy płaszczyznę $A'BCD'$. W kwadracie $ABB'A'$ przekątne AB' i $A'B$ są prostopadłe. Co więcej, krawędź BC jest prostopadła do płaszczyzny $ABB'A'$, a więc także do prostej AB'. Proste $A'B$ i BC przecinają się i leżą w płaszczyźnie $A'BCD'$, zatem płaszczyzna $A'BCD'$ jest prostopadła do prostej AB'. Skoro prosta $A'M$ leży w tej płaszczyźnie, to proste AB' oraz $A'M$ są prostopadłe.

Rozważmy następnie taki punkt M' leżący na odcinku AD, że $AM' = BM = DN$. Obrót ściany $ADD'A'$ o 90° przekształca odcinek $A'M'$ w odcinek AN, zatem proste $A'M'$ oraz AN są prostopadłe. Ponadto proste MM' oraz AB są równoległe, a prosta AB jest prostopadła do płaszczyzny $ADD'A'$, w której leży AN. Stąd proste MM' oraz AN są prostopadłe.

Prosta AN jest więc prostopadła do dwóch przecinających się prostych $A'M'$ i $M'M$ leżących w płaszczyźnie $A'M'M$. Zatem płaszczyzna $A'M'M$ jest prostopadła do prostej AN. Stąd proste AN oraz $A'M$ są prostopadłe.

Wykazaliśmy zatem, że prosta $A'M$ jest prostopadła zarówno do prostej AB', jak i do prostej AN. Prosta ta jest zatem prostopadła do płaszczyzny $AB'N$, co kończy rozwiązanie.

