

Obóz Naukowy
Olimpiady Matematycznej
Juniorów — poziom OM



8–15 czerwca 2025 r.

Skład komputerowy: Bartosz Głowacki, Kosma Kasprzak, Arkadiusz Męcel, Witold Sikora

Rysunki: Bartosz Głowacki

Recenzent: dr Arkadiusz Męcel

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Juniorów
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
ul. Śniadeckich 8
00-656 Warszawa
www.omj.edu.pl

Wstęp

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Juniorów (poziom OM) przeprowadzono w dniach 8–15 czerwca 2025 r. w Domu Rekolekcyjno-Konferencyjnym „Wieczernik” w Świętej Katarzynie (woj. świętokrzyskie). Do udziału w Obozie zakwalifikowano uczniów z klas 7-8 szkół podstawowych z najlepszymi wynikami w XX OMJ.

Każdego dnia uczestnicy Obozu rozwiązywali zadania w formule konkursowej, pracując zarówno indywidualnie, jak i w grupach. Popołudnia i wieczory poświęcone były na wykłady i zajęcia warsztatowe. W czwartek odbył się spacer do Świętokrzyskiego Parku Narodowego, a w sobotę przeprowadzony został mecz matematyczny.

W niniejszym opracowaniu zebrane są zadania konkursowe wraz z rozwiązaniami. Zachęcamy do wykorzystania tych materiałów zwłaszcza w przygotowaniach do startów w kolejnych edycjach Olimpiady Matematycznej dla szkół ponadpodstawowych.

Trudność niektórych zadań, z którymi mierzyli się uczestnicy Obozu, przewyższa zdecydowanie poziom zawodów finałowych OMJ. Wychodząc (niekiedy wyraźnie) poza program merytoryczny Olimpiady, staraliśmy się wskazać niektóre podstawowe narzędzia przydatne na poziomie międzynarodowych zawodów matematycznych rozgrywanych na poziomie juniorskim (obejmujących także uczniów szkół średnich) oraz na zawodach pierwszego i drugiego stopnia Olimpiady Matematycznej.

Milej lektury!

Kadra Obozu

Uczestnicy Obozu Naukowego OMJ (poziom OM)

Uczniowie: Tymoteusz Barcicki, Dawid Bociąga, Zuzanna Czubińska, Antoni Glinka, Karol Kaczmarek, Mikołaj Kasprowicz, Wojciech Klich, Antoni Literski, Patryk Niewczas, Konstanty Opas, Krzysztof Pietruszka, Mateusz Pszona, Adam Rowiński, Mateusz Rybka, Piotr Słabicki, Rafał Sobolewski, Michał Szczurek, Piotr Świdorski, Viktoryia Viarenich, Krzysztof Witkowski

Kadra: Paweł Dziuba (kierownik), Bartosz Głowacki, Kosma Kasprzak, Arkadiusz Męcel, Witold Sikora

Rozkład ocen za rozwiązania zadań indywidualnych

Prace uczestników Obozu oceniane były w skali olimpijskiej 0, 2, 5, 6. Rozkład ocen przyznanych za rozwiązania zadań przedstawiony jest w poniższej tabeli.

	6 p.	5 p.	2 p.	0 p.
1.	12	3	2	3
2.	1	7	4	8
3.	6	0	0	14
4.	13	2	3	2
5.	1	0	0	19
6.	2	0	5	13
7.	10	1	1	8
8.	9	5	1	5
9.	8	0	0	12
10.	8	0	0	12
11.	1	4	3	12
12.	5	0	1	14
13.	6	1	3	10
14.	1	0	1	18
15.	7	0	5	8
16.	0	0	0	20
17.	16	1	0	3
18.	14	1	1	4
19.	1	0	1	18
20.	9	0	1	10
21.	1	1	3	15
22.	16	1	0	3
23.	14	1	1	4
24.	9	0	1	10
25.	1	0	1	18
26.	1	1	3	15

Treści zadań

Zadanie 1.

Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite n spełniające następujące własności: n ma co najmniej 3 dodatnie dzielniki, z których najmniejsze to $1 < d_1 < d_2$ oraz

$$n = d_1^2 + d_2^3.$$

Zadanie 2.

Znajdź wszystkie rzeczywiste rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} a^2 + 2a = b \\ b^2 + 2b = c \\ c^2 + 2c = a \end{cases}.$$

Zadanie 3.

Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym w wierzchołku C . Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boku BC w punkcie K . Wykaż, że cięciwa tego okręgu zawarta w prostej AK jest dwa razy dłuższa od wysokości trójkąta ACK opuszczonej z wierzchołka C .

Zadanie 4.

W pewnym sklepie kupić można zestaw składający się z 1000 kart, na których po obu stronach napisane są liczby naturalne od 1 do 2000. Każda z tych 2000 liczb występuje dokładnie jeden raz na pewnej karcie należącej do zestawu. Wszystkie zestawy dostępne w tym sklepie konstruowane są zgodnie z tą zasadą, ale nie wszystkie zestawy są identyczne — to znaczy: pary liczb występujące na kartach w różnych zestawach nie muszą być identyczne.

Jaś kupił w tym sklepie 2 zestawy kart. Wykaż, że może rozłożyć swoje 2000 kart w taki sposób, że każda liczba od 1 do 2000 jest widoczna dokładnie na jednej karcie.

Zadanie 5.

W trójkącie równoramiennym ABC , gdzie $AC = BC$, kąt wewnętrzny przy wierzchołku C ma miarę 20° . Punkty D i E należące odpowiednio do boków BC i AC są spodkami dwusiecznych kątów wewnętrznych trójkąta ABC poprowadzonych odpowiednio z wierzchołków A i B . Wykaż, że punkty D , E oraz środek okręgu opisanego na trójkącie ABC są wierzchołkami trójkąta równobocznego.

Zadanie 6.

Znajdź wszystkie rzeczywiste rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} a^2 + a - 1 = b \\ b^2 + b - 1 = c \\ c^2 + c - 1 = a \end{cases}.$$

Zadanie 7.

Dane są dodatnie liczby całkowite m, n , takie że ich suma $m + n$ jest dzielnikiem liczby mn . Wykaż, że $m \leq n^2 - n$.

Zadanie 8.

Znajdź wszystkie liczby rzeczywiste $x > \frac{1}{2}$ spełniające

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3} = \sqrt{2x-1} + \sqrt{2x+1}.$$

Zadanie 9.

W trójkącie ABC punkt L jest spodkiem dwusiecznej kąta wewnętrznego BAC poprowadzonej z wierzchołka A na bok BC . Punkt D jest środkiem odcinka AL , a punkt E jest rzutem prostokątnym punktu D na bok AB . Załóżmy, że odcinek AC jest trzy razy dłuższy od odcinka AE . Wykaż, że trójkąt CLE jest równoramienny.

Zadanie 10.

W pewnej tajnej agencji jest 2025 szpiegów, z których każdy ma pewną informację znaną tylko sobie. Co godzinę pewien ze szpiegów dzwoni do innego i przekazuje mu wszystkie posiadane informacje (ale nie otrzymuje podczas tej rozmowy żadnych informacji od rozmówcy). Jaka jest najmniejsza możliwa liczba rozmów potrzebna, aby wszyscy szpiegowie poznali wszystkie posiadane przez siebie informacje?

Zadanie 11.

Definiujemy ciąg liczb całkowitych (a_n) w następujący sposób: liczba a_1 jest dowolną liczbą całkowitą, a mając zdefiniowane liczby $a_1, \dots, a_{n-1}$ wybieramy a_n jako jedyną liczbę całkowitą z przedziału $[0, n-1]$, dla której $n \mid a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Wykaż, że każdy taki ciąg (a_n) jest *od pewnego momentu stały*, czyli dla każdego takiego ciągu (a_n) istnieje takie N , że a_n przyjmuje identyczne wartości dla $n > N$.

Zadanie 12.

Trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD jest wpisany w okrąg o środku w punkcie O . Z punktu A poprowadzono obie styczne do okręgu opisanego na trójkącie CDO , a punkty styczności oznaczono P i Q . Wykaż, że okrąg opisany na trójkącie APQ przechodzi przez środek podstawy AB .

Zadanie 13.

Dana jest liczba całkowita $n \geq 3$. Na pewnym okręgu zaznaczono $2n$ punktów, dzieląc go na $2n$ łuków. Okazało się, że długości tych łuków przyjmują tylko trzy różne wartości, przy czym żadne dwa sąsiednie łuki nie są tej samej długości. Zaznaczone punkty pokolorowano na przemian na niebiesko i czerwono.

Niebieskim n -kątem nazwiemy n -ką o n niebieskich wierzchołkach, a czerwonym n -kątem nazwiemy n -ką o n czerwonych wierzchołkach. Wykaż, że niebieski n -ką i czerwony n -ką mają równe pola i obwody.

Zadanie 14.

Dla dodatnich liczb całkowitych x, y spełnione są warunki

$$\left\{ \sqrt{x^2 + 2y} \right\} > \frac{2}{3} \quad \text{oraz} \quad \left\{ \sqrt{y^2 + 2x} \right\} > \frac{2}{3}.$$

Wykaż, że $x = y$.

Uwaga: Dla liczby rzeczywistej a przez $\{a\}$ oznaczamy część ułamkową a , czyli $\{a\} = a - k$, gdzie k jest największą liczbą całkowitą spełniającą warunek $k \leq a$.

Zadanie 15.

Wykaż, że wszystkie dodatnie liczby całkowite można pokolorować na trzy kolory tak, by dla każdej dodatniej liczby całkowitej n wśród liczb $n, 2n, 3n$ występowały wszystkie trzy kolory.

Zadanie 16.

W pewnej klasie składającej się z n uczniów funkcjonuje pewna liczba trzysobowych kółek naukowych. Każdy uczeń może należeć do dowolnej liczby kółek, ale żadna para uczniów nie jest jednocześnie w dwóch różnych kółkach. Wykaż, że możemy wybrać k uczniów tej klasy tak, by $\sqrt{2n} - 1 \leq k$, i by z żadnego kółka nie wybrać wszystkich trzech członków.

Zadanie 17.

Gdy Jaś widzi nieujemną liczbę całkowitą, zwiększa ją o pewną z jej cyfr. Gdy natomiast Staś widzi nieujemną liczbę całkowitą, zmniejsza ją o pewną z jej cyfr.

Na tablicy zapisano pewną dodatnią liczbę całkowitą, a następnie pozwolono Jasiowi i Stasiowi na przemian wykonywać na niej swoje operacje. Wykaż, że niezależnie od tego, które cyfry będą wybierać, jeden z nich będzie w pewnym momencie zmuszony, by napisać na tablicy liczbę, która już wcześniej się na niej pojawiła.

Zadanie 18.

W kwadracie $ABCD$ zaznaczono punkty E i F odpowiednio na bokach AB i BC tak, że $AE = BF$. Punkt G jest symetryczny do punktu F względem środka boku AB , a punkt H symetryczny do punktu E względem środka boku BC . Wykaż, że trójkąty DEF i BGH mają równe pola.

Zadanie 19.

Trapez $ABCD$ jest wpisany w okrąg o środku w punkcie O , a jego ramiona BC i DA mają długość równą promieniowi tego okręgu. Przez X oznaczmy punkt przecięcia prostej BD i prostej przechodzącej przez punkt O prostopadłej do prostej AC . Wykaż, że trójkąt AXD jest równoramienny.

Zadanie 20.

Znajdź wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych x, y spełniających

$$\frac{x^2 + y^2}{2x + 3y} = 6.$$

Zadanie 21.

Znajdź wszystkie liczby pierwsze p , dla których liczba $p^2 - p + 1$ jest sześcianiem liczby całkowitej.

Zadanie 22.

Na pewnym przyjęciu jest $n \geq 3$ uczestników, spośród których istnieją takie pary osób, które się znają i istnieją takie pary osób, które się nie znają. Okazało się, że niezależnie od tego jak rozdzielimy uczestników na dwie niepuste i rozłączne grupy, pewna osoba z pierwszej grupy zna pewną osobę z drugiej. Wykaż, że można wskazać taką trójkę uczestników A, B, C tego przyjęcia, że A i B się znają, B i C się znają, natomiast A i C się nie znają.

Zadanie 23.

W wierzchołkach dziesięciokąta foremnego napisano 10 parami różnych liczb całkowitych. Wykaż, że istnieją takie cztery kolejne wierzchołki tego dziesięciokąta, że umieszczone w nich kolejno liczby a, b, c, d spełniają warunek $a + d > b + c$.

Zadanie 24.

Wykaż, że dla dodatnich liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność

$$x + y + \frac{|x - 1|}{y} + \frac{|y - 1|}{x} \geq 2.$$

Zadanie 25.

Znajdź wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych a, b spełniających warunek

$$ab \mid a^{2017} + b.$$

Zadanie 26.

Okręgi o_1 i o_2 przecinają się w punktach A i B . Punkty X i Y leżą odpowiednio na okręgach o_2 i o_1 w taki sposób, że proste BX oraz BY są prostopadłe. Oznaczmy przez O środek okręgu o_1 , a przez K — różny od punktu X punkt przecięcia prostej OX z okręgiem o_2 . Przez L oznaczmy wreszcie różny od punktu K punkt przecięcia prostej KY z okręgiem o_2 . Wykaż, że punkt X jest środkiem łuku AL okręgu o_2 .

Zadanie 27.

W rzędzie ułożone jest 100 dodatnich liczb całkowitych. Jeśli w ciągu tym znajdziemy dwie kolejno ułożone liczby a, b , przy czym a jest na lewo od b oraz $a < b$, to możemy wykonać operację polegającą na podwojeniu obu tych liczb i zamianie ich miejscami. Wykaż, że możemy wykonać tylko skończenie wiele takich operacji.

Zadanie 28.

Tysiąc uczniów pewnej szkoły pojechało na wycieczkę. Na miejsce wycieczki zawiozło ich 11 busów, a z powrotem odwiozło ich 10 busów. Każdy z tysiąca uczniów jechał i wracał w jednym z busów. Wykaż, że pewien uczeń jechał na miejsce wycieczki w mniej licznej grupie niż grupa, w której wracał.

Zadanie 29.

Jaś i Staś bawią się dużym kawałkiem plasteliny. Na przemian, zaczynając od Jasia, wykonują oni następujące ruchy: Jaś bierze któryś z istniejących kawałków plasteliny i dzieli go na trzy części w dowolny sposób. Staś natomiast wybiera dowolne dwa kawałki i skleja je w jeden. Celem Jasia jest, żeby w pewnym momencie istniało co najmniej 100 kawałków plasteliny o równej masie. Czy może on, niezależnie od ruchów Stasia, osiągnąć ten cel?

Zadanie 30.

Czy istnieje taki nieskończony podzbiór zbioru dodatnich liczb całkowitych, że suma dowolnych skończenie wielu jego elementów nie jest postaci a^b , dla żadnych liczb całkowitych $a, b > 1$?

Zadanie 31.

Wykaż, że dla dowolnych parami różnych dodatnich liczb całkowitych a, b, c zachodzi

$$\text{NWD}(ab + 1, bc + 1, ca + 1) < \frac{a + b + c}{3}.$$

Zadanie 32.

Znajdź wszystkie liczby całkowite $n > 1$ spełniające następujący warunek: dla dowolnej liczby pierwszej p dzielącej n liczba $n + p$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 33.

Dane są nieskończone zbiory A i B dodatnich liczb całkowitych. Czy możliwe jest, że wszystkie liczby, które można przedstawić jako iloczyn $a \cdot b$, dla $a \in A$ oraz $b \in B$, to dokładnie wszystkie większe od 2025 liczby postaci n^m , dla pewnych liczb całkowitych $n, m > 1$?

Zadanie 34.

Dane są dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c , takie że $a + b + c = 3$. Wykaż, że

$$\frac{a}{b+1} + \frac{b}{c+1} + \frac{c}{a+1} \geq \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}.$$

Zadanie 35.

Dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają równość

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4.$$

Wykaż, że suma dwóch spośród liczb a, b, c, d nie przekracza 2.

Zadanie 36.

Wielokąt, którego wszystkie wierzchołki mają obie współrzędne całkowite, nazwiemy *kanciatym*, jeśli każdy jego bok jest równoległy do jednej z dwóch osi układu współrzędnych. Ile osi symetrii może mieć kanciaty wielokąt? Wskaż (i uzasadnij) wszystkie możliwe odpowiedzi.

Zadanie 37.

Okręgi o_1 i o_2 o środkach odpowiednio w punktach O_1 i O_2 przecinają się w punktach A i B . Prosta O_1B przecina okrąg o_2 po raz drugi w punkcie C , a prosta O_2A przecina okrąg o_1 po raz drugi w punkcie D . Przez X oznaczamy drugi punkt przecięcia prostej AC z okręgiem o_1 , a przez Y oznaczamy drugi punkt przecięcia prostej BD z okręgiem o_2 . Wykaż, że $CX = DY$.

Zadanie 38.

Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC . Niech M będzie środkiem boku AC , a D niech będzie spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A na prostą BC . Prosta DM przecina okrąg opisany na trójkącie AMO po raz drugi w punkcie P . Wykaż, że punkty B, P, O są współliniowe.

Rozwiązania zadań

Zadanie 1.

Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite n spełniające następujące własności: n ma co najmniej 3 dodatnie dzielniki, z których najmniejsze to $1 < d_1 < d_2$ oraz

$$n = d_1^2 + d_2^3.$$

Rozwiązanie: Załóżmy że liczba n spełnia własność opisaną w treści zadania. Zauważmy najpierw, że n jest liczbą parzystą. Istotnie, gdyby była to liczba nieparzysta, to liczby d_1 i d_2 również byłyby nieparzyste jako dzielniki n . Wtedy jednak liczba $n = d_1^2 + d_2^3$ byłaby parzysta jako suma dwóch liczb nieparzystych.

Skoro więc $2 \mid n$, to $d_1 = 2$. Stąd $d_2^3 = n - 2^2$ jest liczbą parzystą jako różnica dwóch liczb parzystych. Wnioskujemy stąd, że także liczba d_2 jest parzysta.

W rezultacie uzyskujemy $8 \mid d_2^3$, więc $4 \mid 4 + d_2^3 = n$. Skoro wiemy już, że liczba d_2 jest parzysta, to otrzymujemy $d_2 = 4$. Możemy stąd wywnioskować, że $n = 2^2 + 4^3 = 68$.

Nietrudno sprawdzić, że dla $n = 68$ warunek zadania jest faktycznie spełniony. Zatem jedynym rozwiązaniem jest właśnie 68.

Zadanie 2.

Znajdź wszystkie rzeczywiste rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} a^2 + 2a = b \\ b^2 + 2b = c \\ c^2 + 2c = a \end{cases}.$$

Rozwiązanie: Dodając 1 do stron każdej z trzech równości i korzystając ze wzoru na kwadrat sumy, otrzymujemy

$$\begin{cases} (a+1)^2 = b+1 \\ (b+1)^2 = c+1 \\ (c+1)^2 = a+1 \end{cases}.$$

Zatem

$$a+1 = (c+1)^2 = (b+1)^4 = (a+1)^8.$$

Jeśli zatem podstawimy $x = a + 1$, otrzymamy $x^8 = x$, czyli $x(x^7 - 1) = 0$. Zatem $x = 0$ lub $x = 1$, czyli $a = -1$ lub $a = 0$.

Podstawiając $a = -1$ do wyjściowego układu równań uzyskujemy $b = a^2 + 2a = -1$ i $c = b^2 + 2b = -1$. Podobnie dla $a = 0$ otrzymujemy trójkę $(a, b, c) = (0, 0, 0)$. Nie trudno sprawdzić, że obie trójki $(-1, -1, -1)$ i $(0, 0, 0)$ faktycznie spełniają zadany układ. Zatem są to wszystkie jego rozwiązania.

Zadanie 3.

Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym w wierzchołku C . Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boku BC w punkcie K . Wykaż, że cięciwa tego okręgu zawarta w prostej AK jest dwa razy dłuższa od wysokości trójkąta ACK opuszczonej z wierzchołka C .

Rozwiązanie: Oznaczmy przez X rzut punktu C na prostą AK , przez I — środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC , a przez M — rzut punktu I na prostą AK . Zauważmy, że punkt M jest środkiem cięciwy rozważanej w treści zadania, więc teza sprowadza się do uzasadnienia równości $CX = KM$.

Ponieważ

$$\sphericalangle CXK = 90^\circ = \sphericalangle KMI,$$

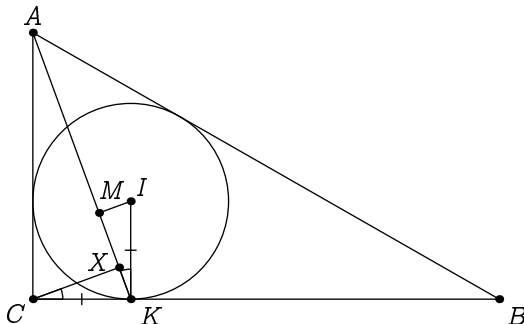
więc również

$$\sphericalangle KCX = 90^\circ - \sphericalangle CKX = \sphericalangle MKI.$$

Skoro prosta CI jest dwusieczną kąta prostego ACB , to

$$\sphericalangle ICK = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ.$$

W rezultacie trójkąt CKI jest prostokątny i równoramienny, czyli $CK = KI$. Zatem na podstawie cechy kąt-bok-kąt możemy stwierdzić, że trójkąty CXK i KMI są przystające. Stąd $CX = KM$, co chcieliśmy udowodnić.



Zadanie 4.

W pewnym sklepie kupić można zestaw składający się z 1000 kart, na których po obu stronach napisane są liczby naturalne od 1 do 2000. Każda z tych 2000 liczb występuje dokładnie jeden raz na pewnej karcie należącej do zestawu. Wszystkie zestawy dostępne w tym sklepie konstruowane są zgodnie z tą zasadą, ale nie wszystkie zestawy są identyczne — to znaczy: pary liczb występujące na kartach w różnych zestawach nie muszą być identyczne.

Jaś kupił w tym sklepie 2 zestawy kart. Wykaż, że może rozłożyć swoje 2000 kart w taki sposób, że każda liczba od 1 do 2000 jest widoczna dokładnie na jednej karcie.

Rozwiązanie: Wśród kart Jasia każda liczba od 1 do 2000 pojawia się dokładnie dwa razy. Niech Jaś weźmie dowolną kartę i niech liczby na jej stronach to a_1 i a_2 . Liczba a_2 pojawia się na dokładnie jednej innej karcie — niech a_3 będzie liczbą z drugiej strony tej karty. Jaś bierze również tę kartę i postępuje tak dalej: po zabraniu k kart z parami, na których występują pary $(a_1, a_2), (a_2, a_3), \dots, (a_k, a_{k+1})$, znajduje wśród jeszcze nieobranych kart kartę zawierającą a_{k+1} (jeśli taka istnieje) i oznacza liczbę z jej drugiej strony jako a_{k+2} .

Ponieważ kart jest skończenie wiele, ten proces musi się kiedyś zatrzymać. Może się to zdarzyć tylko wtedy, gdy po zabraniu k -tej karty liczba a_{k+1} nie występuje już na żadnej pozostałej karcie, czyli gdy a_{k+1} jest jedną z liczb $a_1, a_2, \dots, a_k$. Jednak każda z liczb $a_2, \dots, a_k$ występuje już na dwóch zabranych kartach (jako prawa liczba w jednej parze i lewa w następnej), zatem jedyną możliwością jest, że $a_{k+1} = a_1$. Otrzymaliśmy zbiór kart z parami liczb

$$(a_1, a_2), (a_2, a_3), \dots, (a_{k-1}, a_k), (a_k, a_1),$$

który nazwiemy *cyklem*. Na tych k kartach pojawiają się tylko liczby $a_1, a_2, \dots, a_k$, każda dokładnie dwa razy. Jeśli teraz każdą kartę z parą liczb (a_i, a_{i+1}) obrócimy na stronę z a_i , to każda z liczb $a_1, \dots, a_k$ jest widoczna na dokładnie jednej karcie.

Po odłożeniu tego cyklu pozostałe karty nadal mają własność: „każda liczba pojawia się dokładnie dwa razy”, więc możemy powtarzać proces aż rozłożymy wszystkie karty na rozłączne cykle i obrócimy je w opisany sposób. W efekcie każda liczba od 1 do 2000 będzie widoczna dokładnie na jednej karcie.

Uwaga: Powyższy problem można zinterpretować w języku grafów. Jako wierzchołki grafu przyjmujemy liczby $1, \dots, 2000$, i dla każdej karty łączymy krawędzią dwie liczby na niej napisane. Wtedy z każdego wierzchołka wychodzą dokładnie dwie krawędzie. Graf ten składa się wówczas z pewnej liczby rozłącznych cykli.

Zadanie 5.

W trójkącie równoramiennym ABC , gdzie $AC = BC$, kąt wewnętrzny przy wierzchołku C ma miarę 20° . Punkty D i E należące odpowiednio do boków BC i AC są spodkami dwusiecznych kątów wewnętrznych trójkąta ABC poprowadzonych odpowiednio z wierzchołków A i B . Wykaż, że punkty D, E oraz środek okręgu opisanego na trójkącie ABC są wierzchołkami trójkąta równobocznego.

Rozwiązanie: Zauważmy od razu, że

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ.$$

Z symetrii trójkąta ABC względem symetralnej odcinka AB wnioskujemy, że punkt D jest symetryczny do punktu E względem tej symetralnej. Stąd proste DE i AB są równoległe. Możemy zatem zapisać równości

$$\sphericalangle BED = \sphericalangle ABE = \sphericalangle EBD = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ.$$

Wnioskujemy stąd, że trójkąt BED jest równoramienny i $BD = DE$. Z symetrii całej konfiguracji uzyskujemy zatem $AE = ED = DB$.

Niech O będzie takim punktem, że trójkąt DEO jest równoboczny, przy czym wybieramy punkt O po tej samej stronie prostej DE , po której znajduje się punkt C .

Zauważmy, że

$$AE = ED = DB = EO = DO,$$

więc trójkąt AEO jest równoramienny. Co więcej

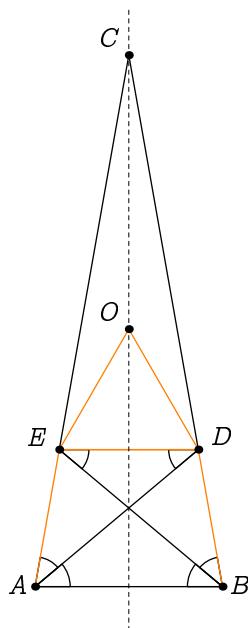
$$\sphericalangle AEO = \sphericalangle AED + \sphericalangle DEO = 100^\circ + 60^\circ = 160^\circ,$$

więc

$$\sphericalangle CAO = \sphericalangle EAO = \frac{180^\circ - 160^\circ}{2} = 10^\circ.$$

Wiemy, że punkt O leży na symetralnej odcinka DE , czyli także na dwusiecznej kąta ACB . Zatem $\sphericalangle ACO = 10^\circ$. Stąd trójkąt AOC jest równoramienny i $AO = CO$.

Analogicznie otrzymujemy $BO = CO$, więc punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC . Z definicji punktu O wiemy, że punkty D, E, O tworzą trójkąt równoboczny, co kończy dowód.



Zadanie 6.

Znajdź wszystkie rzeczywiste rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} a^2 + a - 1 = b \\ b^2 + b - 1 = c \\ c^2 + c - 1 = a \end{cases}.$$

Rozwiązanie: Dodając strony wszystkich równości, dostajemy

$$a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c - 3 = a + b + c, \quad \text{czyli} \quad a^2 + b^2 + c^2 = 3.$$

Dodając 1 do stron wyjściowych równań otrzymamy natomiast układ równań

$$\begin{cases} a(a+1) = b+1 \\ b(b+1) = c+1 \\ c(c+1) = a+1 \end{cases}.$$

Mnożąc strony powyższych równości, dostajemy

$$abc(a+1)(b+1)(c+1) = (a+1)(b+1)(c+1). \quad (*)$$

Zauważmy, że jeśli $a = -1$, to $b = a^2 + a - 1 = -1$ i podobnie $c = -1$. Analogicznie, jeśli którakolwiek z liczb a, b, c wynosi -1 , to $(a, b, c) = (-1, -1, -1)$.

Żałóżmy zatem, że żadna z liczb a, b, c nie jest równa -1 . Wtedy możemy podzielić równość $(*)$ stronami przez niezerową liczbę $(a+1)(b+1)(c+1)$, otrzymując $abc = 1$.

Tymczasem z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną mamy

$$1 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \sqrt[3]{a^2 b^2 c^2} = 1,$$

więc musi zachodzić równość $a^2 = b^2 = c^2$. Niech $k = a^2 = b^2 = c^2$. Z wyjściowego układu równań otrzymujemy równości

$$b - a = c - b = a - c = k - 1.$$

Pierwsze trzy z powyższych liczb są zatem równe, a ich suma wynosi 0, więc każda z nich musi być równa 0, skąd mamy $a = b = c$. Zatem $a^2 + a - 1 = a$, czyli $a^2 = 1$, a skoro w tym przypadku zakładamy $a \neq -1$ to $a = 1$. Podobnie $b = c = 1$.

W ten sposób wykazaliśmy, że (a, b, c) jest jedną z trójek $(-1, -1, -1)$ i $(1, 1, 1)$. Łatwo sprawdzić, że obie faktycznie spełniają zadany układ równań.

Zadanie 7.

Dane są dodatnie liczby całkowite m, n , takie że ich suma $m + n$ jest dzielnikiem liczby mn . Wykaż, że $m \leq n^2 - n$.

Rozwiązanie: Skoro $m + n \mid mn$, to

$$m + n \mid (m + n)n - mn = n^2,$$

więc $m + n \leq n^2$, czyli $m \leq n^2 - n$.

Zadanie 8.

Znajdź wszystkie liczby rzeczywiste $x > \frac{1}{2}$ spełniające

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3} = \sqrt{2x-1} + \sqrt{2x+1}.$$

Rozwiązanie: Sposób I: Zauważmy, że

$$\frac{1}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{x+1}}{(x+3) - (x+1)} = \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{x+1}}{2},$$

i podobnie

$$\frac{1}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1}} = \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1}}{2},$$

więc

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{x+1} = \sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1}.$$

Dodając powyższą równość do wyjściowej równości, uzyskujemy

$$2\sqrt{x+3} = 2\sqrt{2x+1},$$

czyli $x+3 = 2x+1$ i $x = 2$. Łatwo sprawdzić, że dla $x = 2$ wyjściowa równość z treści zadania faktycznie zachodzi — jest to zatem jedyne rozwiązanie.

Sposób II: Zapiszmy równość jako

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{2x+1} = \sqrt{2x-1} - \sqrt{x+3}$$

i podnieśmy obie strony do kwadratu, otrzymując

$$(x+1) - 2\sqrt{(x+1)(2x+1)} + (2x+1) = (x+3) - 2\sqrt{(x+3)(2x-1)} + (2x-1),$$

czyli

$$3x + 2 - 2\sqrt{(x+1)(2x+1)} = 3x + 2 - 2\sqrt{(x+3)(2x-1)},$$

a zatem

$$(x+1)(2x+1) = (x+3)(2x-1).$$

Stąd otrzymujemy $2x^2 + 3x + 1 = 2x^2 + 5x - 3$, czyli $x = 2$. Sprawdzamy, że jest to rozwiązanie wyjściowego równania.

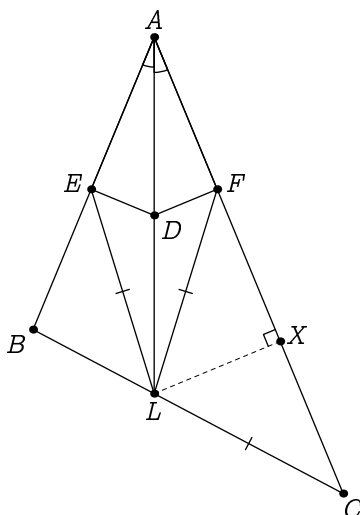
Zadanie 9.

W trójkącie ABC punkt L jest spodkiem dwusiecznej kąta wewnętrznego BAC poprowadzonej z wierzchołka A na bok BC . Punkt D jest środkiem odcinka AL , a punkt E jest rzutem prostokątnym punktu D na bok AB . Załóżmy, że odcinek AC jest trzy razy dłuższy od odcinka AE . Wykaż, że trójkąt CLE jest równoramienny.

Rozwiązanie: Oznaczmy przez F i X odpowiednio rzuty punktów D i L na bok AC . Wtedy punkt F jest symetryczny do punktu E względem dwusiecznej kąta BAC , więc $AE = AF$. Zatem z założenia $AC = 3AF$.

Zauważmy również, że odcinek DF jest linią środkową w trójkącie ALX , skąd otrzymujemy $AX = 2AF$. Zatem punkt X jest środkiem odcinka CF . Stąd w trójkącie CLF wysokość i środkowa poprowadzone z punktu L pokrywają się. Zatem trójkąt ten jest równoramienny, skąd $LC = LF$.

Skoro jednak punkty E i F są symetryczne względem prostej AL , to $LE = LF$. Zatem $LC = LE$ i trójkąt CLE jest równoramienny.



Zadanie 10.

W pewnej tajnej agencji jest 2025 szpiegów, z których każdy ma pewną informację znaną tylko sobie. Co godzinę pewien ze szpiegów dzwoni do innego i przekazuje mu wszystkie posiadane informacje (ale nie otrzymuje podczas tej rozmowy żadnych informacji od rozmówcy). Jaka jest najmniejsza możliwa liczba rozmów potrzebna, aby wszyscy szpiedzy poznali wszystkie posiadane przez siebie informacje?

Rozwiązanie: Najmniejsza możliwa liczba rozmów wynosi 4048.

Zauważmy najpierw, że po 4048 rozmowach szpiedzy mogą posiadać wszystkie informacje. Wybierzmy dowolnego szpiega A. Najpierw każdy z pozostałych 2024 szpiegów dzwoni do A i przekazuje mu swoją informację (2024 rozmowy), a następnie A oddzwania do wszystkich i przekazuje komplet informacji (kolejne 2024 rozmowy).

Wykażemy teraz, że potrzebne jest istotnie wykonanie 4048 rozmów. Rozważmy pierwszy moment, w którym jakiś szpieg — nazwijmy go B — zna wszystkie cudze informacje (a więc ma komplet 2025 informacji łącznie ze swoją). Do tej chwili każdy z pozostałych 2024 szpiegów musiał choć raz zadzwonić, bo inaczej jego własna informacja nie opuściłaby go i B nie mógłby jej znać. Stąd do tego momentu wykonano co najmniej 2024 rozmowy.

Po tej chwili nikt poza B nie zna jeszcze kompletu informacji, więc aby każdy zdobył pełen zestaw, każdy z pozostałych 2024 szpiegów musi co najmniej raz odebrać rozmowę od kogoś, kto już zna komplet (najpierw od B, potem ewentualnie od następnych). Jedna rozmowa uzupełnia wiedzę tylko jednego odbiorcy, więc potrzeba co najmniej 2024 kolejnych rozmów. Widzimy zatem, że łącznie potrzebne jest co najmniej 4048 rozmów.

Zadanie 11.

Definiujemy ciąg liczb całkowitych (a_n) w następujący sposób: liczba a_1 jest dowolną liczbą całkowitą, a mając zdefiniowane liczby $a_1, \dots, a_{n-1}$ wybieramy a_n jako jedyną liczbę całkowitą z przedziału $[0, n-1]$, dla której $n \mid a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Wykaż, że każdy taki ciąg (a_n) jest *od pewnego momentu stały*, czyli dla każdego takiego ciągu (a_n) istnieje takie N , że a_n przyjmuje identyczne wartości dla $n > N$.

Rozwiązanie: Wykażemy najpierw, że jeśli dla pewnego i spełniony jest warunek

$$0 \leq \frac{a_1 + \dots + a_i}{i} \leq i,$$

to ciąg (a_n) jest stały od indeksu $n \geq i+1$.

Istotnie, oznaczmy powyższy iloraz przez k . Z założenia zadania jest to liczba całkowita, a dodatkowo zakładamy, że $0 \leq k \leq i$. Udowodnimy teraz przez indukcję ze względu na n , że $a_n = k$ dla $n > i$.

Krok bazowy indukcji, czyli przypadek $n = i + 1$, wynika tego, że

$$i + 1 \mid (i + 1)k = a_1 + \dots + a_i + k$$

oraz $0 \leq k \leq i$.

Krok indukcyjny przebiega podobnie: jeśli liczby $a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_n$ są równe k , to

$$n + 1 \mid (n + 1)k = a_1 + \dots + a_n + k.$$

To kończy dowód stwierdzenia z początku rozwiązania.

Pozostaje wykazać, że istnieje n , takie że

$$0 \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \leq n. \quad (*)$$

Pierwsza nierówność może nie być spełniona tylko, gdy $a_1 < 0$. Wtedy jednak nie będzie ona spełniona dla $n > |a_1|$, ponieważ dla takich n mamy

$$n \mid a_1 + \dots + a_n \quad \text{oraz} \quad a_1 + \dots + a_n > -n.$$

Stąd $a_1 + \dots + a_n \geq 0$.

Do uzasadnienia drugiej nierówności zauważmy, że

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq a_1 + 1 + 2 + \dots + (n - 1) = a_1 + \frac{n(n - 1)}{2},$$

która to liczba jest mniejsza od n^2 , o ile zachodzi warunek

$$n^2 > 2a_1.$$

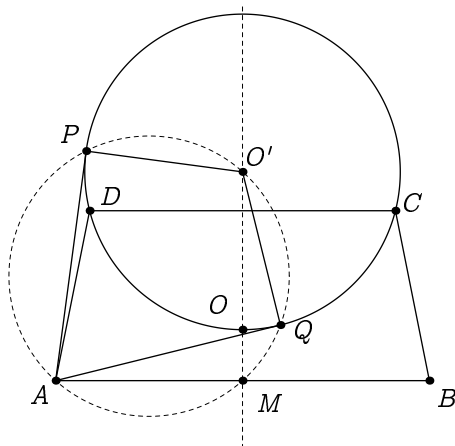
Zatem dla dowolnej liczby n większej od $\max(|a_1|, \sqrt{2|a_1|})$ zachodzi (*).

Zadanie 12.

Trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD jest wpisany w okrąg o środku w punkcie O . Z punktu A poprowadzono obie styczne do okręgu opisanego na trójkącie CDO , a punkty styczności oznaczono P i Q . Wykaż, że okrąg opisany na trójkącie APQ przechodzi przez środek podstawy AB .

Rozwiązanie: Oznaczmy środek okręgu opisanego na trójkącie CDO przez O' . Skoro proste AP i AQ są styczne do okręgu o środku w O' , to $\sphericalangle APO' = \sphericalangle AQO' = 90^\circ$. Wynika stąd, że punkty A, P, Q, O' leżą na okręgu o średnicy AO' .

Skoro trapez $ABCD$ jest wpisany w okrąg, to jest symetryczny względem symetralnej podstawy AB , a punkt O leży na tej symetralnej. Zatem leży na niej również punkt O' . Jeśli punkt M jest środkiem odcinka AB , to $\sphericalangle AMO' = 90^\circ$. Zatem pięć punktów A, P, Q, M, O' leży na jednym okręgu, co kończy dowód.



Zadanie 13.

Dana jest liczba całkowita $n \geq 3$. Na pewnym okręgu zaznaczono $2n$ punktów, dzieląc go na $2n$ łuków. Okazało się, że długości tych łuków przyjmują tylko trzy różne wartości, przy czym żadne dwa sąsiednie łuki nie są tej samej długości. Zaznaczone punkty pokolorowano na przemian na niebiesko i czerwono.

Niebieskim n -kątem nazwiemy n -kąąt o n niebieskich wierzchołkach, a czerwonym n -kątem nazwiemy n -kąąt o n czerwonych wierzchołkach. Wykaż, że niebieski n -kąąt i czerwony n -kąąt mają równe pola i obwody.

Rozwiązanie: Oznaczmy trzy możliwe długości łuków przez a, b, c i przyjmijmy, że występują one na okręgu odpowiednio x, y, z razy. Czerwone punkty dzielą okrąg na n łuków, które z założenia mają długość $a + b, b + c$ lub $a + c$. Wśród tych n łuków, tych o długościach $b + c$ i $a + c$ jest łącznie z , więc tych o długościach $a + b$ jest $n - z$. Analogicznie, łuków o długościach $b + c$ jest $n - x$, a łuków o długościach $a + c$ jest $n - y$.

Te same obserwacje możemy sformułować na temat łuków między niebieskimi punktami. Cięciwy oparte na łukach tej samej długości są również tej samej długości, więc czerwony i niebieski n -kąt mają boki tej samej długości, tylko być może w innej kolejności. Mają zatem równe obwody.

Oznaczmy czerwone wierzchołki kolejno $A_1, A_2, \dots, A_n$, a niebieskie $B_1, B_2, \dots, B_n$. Środek okręgu oznaczmy przez O . Podobnie jak wcześniej stwierdzamy, że trójkąty $A_1A_2O, A_2A_3O, \dots, A_nA_1O$ przystają w pewnej kolejności do trójkątów $B_1B_2O, B_2B_3O, \dots, B_nB_1O$. Sumy pól tych n -tek trójkątów to pole odpowiednio czerwonego i niebieskiego n -kąta, pola tych n -kątown są równe.

Zadanie 14.

Dla dodatnich liczb całkowitych x, y spełnione są warunki

$$\left\{ \sqrt{x^2 + 2y} \right\} > \frac{2}{3} \quad \text{oraz} \quad \left\{ \sqrt{y^2 + 2x} \right\} > \frac{2}{3}.$$

Wykaż, że $x = y$.

Uwaga: Dla liczby rzeczywistej a przez $\{a\}$ oznaczamy część ułamkową a , czyli $\{a\} = a - k$, gdzie k jest największą liczbą całkowitą spełniającą warunek $k \leq a$.

Rozwiązanie: Załóżmy nie wprost, że teza nie zachodzi i przyjmijmy bez straty ogólności, że $x > y$. Wtedy $x^2 + 2y > x^2$ więc $\sqrt{x^2 + 2y} > x$, gdyż x jest dodatnią liczbą całkowitą. Stąd też, a także z nierówności zapisanych w założeniach zadania, uzyskujemy $\sqrt{x^2 + 2y} > x + \frac{2}{3}$. Zatem

$$x^2 + 2y > \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot \frac{2}{3}x + \frac{4}{9}, \quad \text{czyli} \quad y > \frac{2}{3}x.$$

Z drugiej strony korzystając z założenia $x > y$ wnioskujemy, że

$$y^2 + 2x \geq y^2 + 2y + 2 > (y + 1)^2,$$

więc z założeń zadania mamy $\sqrt{y^2 + 2x} > y + 1 + \frac{2}{3}$. Uzyskujemy zatem

$$y^2 + 2x > y^2 + 2 \cdot \frac{5}{3}y + \frac{25}{9}, \quad \text{czyli} \quad x > \frac{5}{3}y.$$

Wtedy jednak

$$y > \frac{2}{3}x > \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3}y = \frac{10}{9}y > y,$$

więc uzyskujemy sprzeczność, która kończy dowód.

Zadanie 15.

Wykaż, że wszystkie dodatnie liczby całkowite można pokolorować na trzy kolory tak, by dla każdej dodatniej liczby całkowitej n wśród liczb $n, 2n, 3n$ występowały wszystkie trzy kolory.

Rozwiązanie: Dla całkowitej liczby dodatniej n oznaczmy przez $\nu_2(n)$ wykładnik, z jakim liczba 2 występuje w rozkładzie liczby n na czynniki pierwsze, a przez $\nu_3(n)$ oznaczmy wykładnik trójki w tym rozkładzie. Wprowadźmy również oznaczenie $f(n) = \nu_2(n) - \nu_3(n)$, i pokolorujmy liczbę n na kolor niebieski, czerwony lub żółty odpowiednio, gdy liczba $f(n)$ daje resztę 0, 1, i 2 z dzielenia przez 3.

Zauważmy, że $f(2n) = \nu_2(2n) - \nu_3(2n) = f(n) + 1$, a $f(3n) = f(n) - 1$. Zatem liczby $f(n), f(2n), f(3n)$ są kolejnymi trzema liczbami całkowitymi. Dają więc one w pewnej kolejności reszty 0, 1, 2 z dzielenia przez 3. Przypisaliśmy więc liczbom $n, 2n, 3n$ trzy różne kolory i zadane kolorowanie spełnia warunek zadania.

Zadanie 16.

W pewnej klasie składającej się z n uczniów funkcjonuje pewna liczba trzyosobowych kółek naukowych. Każdy uczeń może należeć do dowolnej liczby kółek, ale żadna para uczniów nie jest jednocześnie w dwóch różnych kółkach. Wykaż, że możemy wybrać k uczniów tej klasy tak, by $\sqrt{2n} - 1 \leq k$, i by z żadnego kółka nie wybrać wszystkich trzech członków.

Rozwiązanie: Rozważmy zbiór k -elementowy A , który jest największym możliwym zbiorem uczniów niezawierającym kółka naukowego. Wykażemy, że $k \geq \sqrt{2n} - 1$.

Rozważmy dowolnego ucznia x spoza A . Skoro nie możemy dodać go do A nie tworząc kółka naukowego, to x musi tworzyć kółko naukowe wraz z pewną parą uczniów z A .

Ale każda para uczniów z A może tworzyć kółko tylko z jednym uczniem spoza A . Zatem liczba par uczniów z A musi wynosić co najmniej tyle, co liczba uczniów nienależących do A . Innymi słowy,

$$\binom{k}{2} \geq n - k, \quad \text{czyli} \quad \frac{k(k-1)}{2} + k \geq n.$$

Gdyby jednak zachodziło $k \leq \sqrt{2n} - 1$, to mielibyśmy

$$\frac{k(k-1)}{2} + k = \frac{k(k+1)}{2} < \frac{\sqrt{2n} \cdot \sqrt{2n}}{2} = n.$$

Uzyskana sprzeczność dowodzi, że $|A| \geq \sqrt{2n} - 1$, więc zbiór uczniów A spełnia założenie zadania.

Zadanie 17.

Gdy Jaś widzi nieujemną liczbę całkowitą, zwiększa ją o pewną z jej cyfr. Gdy natomiast Staś widzi nieujemną liczbę całkowitą, zmniejsza ją o pewną z jej cyfr.

Na tablicy zapisano pewną dodatnią liczbę całkowitą, a następnie pozwolono Jasiowi i Stasiowi na przemian wykonywać na niej swoje operacje. Wykaż, że niezależnie od tego, które cyfry będą wybierać, jeden z nich będzie w pewnym momencie zmuszony, by napisać na tablicy liczbę, która już wcześniej się na niej pojawiła.

Rozwiązanie: Przypuśćmy nie wprost, że żadna liczba napisana na tablicy nie powtórzy się. Zauważmy, że w takim razie żaden z chłopców nie wybiera nigdy cyfry 0 do odjęcia lub dodania.

Nietrudno widzieć, że liczba na tablicy nigdy nie będzie ujemna. Staś nie może zmienić liczby nieujemnej w ujemną, bo dowolna liczba nieujemna jest większa lub równa od wszystkich swoich cyfr.

Oznaczmy k -tą napisaną liczbę na tablicy przez a_k , a liczbę cyfr początkowej liczby na tablicy przez n . Skoro (z przyjętego przypuszczenia) powstaje nieskończony ciąg różnych liczb nieujemnych, to dla pewnego k pojawi się liczba równa co najmniej 10^{n+1} . Niech k będzie najmniejszą liczbą, dla której to się dzieje. Wtedy jednak liczba a_k musiała zostać napisana przez Jasia. Inaczej bowiem już a_{k-1} liczba byłaby większa od 10^{n+1} . Widzimy też, że $k > 2$ i

$$a_{k-2} \geq a_{k-1} \geq a_k - 9 \geq 10^{n+1} - 9 = \underbrace{99 \dots 9}_n 1.$$

Skoro a_k jest pierwszą liczbą na tablicy spełniającą $a_k \geq 10^{n+1}$, to $a_{k-2} < 10^{n+1}$. Zatem a_{k-2} jest liczbą postaci

$$\underbrace{99 \dots 9}_n x,$$

dla pewnej cyfry x .

Wtedy jednak liczba a_{k-1} jest równa albo $a_{k-2} - 9$, albo $a_{k-2} - x$. W obu przypadkach mamy

$$a_{k-1} \leq a_{k-2} - x = \underbrace{99 \dots 9}_n 0,$$

więc

$$a_k \leq a_{k-1} + 9 \leq \underbrace{99 \dots 9}_{n+1} < 10^{n+1}.$$

Uzyskujemy sprzeczność z założeniem $a_k \geq 10^{n+1}$. Dowód jest zakończony.

Zadanie 18.

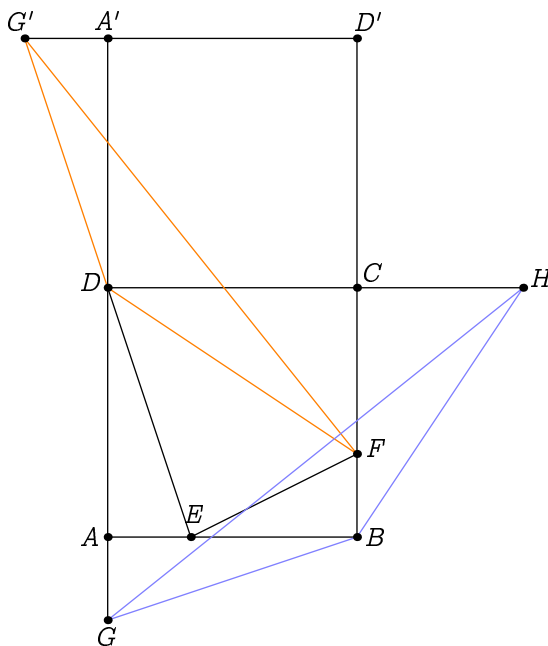
W kwadracie $ABCD$ zaznaczono punkty E i F odpowiednio na bokach AB i BC tak, że $AE = BF$. Punkt G jest symetryczny do punktu F względem środka boku AB , a punkt H symetryczny do punktu E względem środka boku BC . Wykaż, że trójkąty DEF i BGH mają równe pola.

Rozwiązanie: Rozważmy obrót dookoła punktu C o kąt prosty. Obraz dowolnego punktu X przy tym obrocie oznaczajmy X' .

Nietrudno zauważyć, że $H' = F$ i $B' = D$, oraz że punkt A' jest symetryczny do punktu A względem punktu D . Trójkąty $G'A'D$ i GAB są przystające, skoro jeden jest obrazem drugiego w rozważanym obrocie.

Zauważmy też, że trójkąty GAB oraz DAE są przystające. Skoro zatem punkt A' jest symetryczny do punktu A względem punktu D , to również punkt G' jest symetryczny do punktu E względem punktu D .

W konsekwencji odcinek FD jest środkową w trójkącie $G'EF$, więc pola trójkątów $DG'F$ i DEF są równe. Skoro jednak trójkąt $DG'F$ jest obrazem trójkąta BGH w rozważanym obrocie, więc trójkąty BGH , $DG'F$ oraz DEF mają równe pola.



Zadanie 19.

Trapez $ABCD$ jest wpisany w okrąg o środku w punkcie O , a jego ramiona BC i DA mają długość równą promieniowi tego okręgu. Przez X oznaczmy punkt przecięcia prostej BD i prostej przechodzącej przez punkt O prostopadłej do prostej AC . Wykaż, że trójkąt AXD jest równoramienny.

Rozwiązanie: Załóżmy, że punkty B, D, X leżą na prostej BD w tej kolejności. W innym przypadku rozumiemy podobnie.

Z założenia, trójkąty ADO i BCO są równoboczne. Oznaczmy przez T punkt przecięcia przekątnych AC i BD trapezu $ABCD$. Mamy

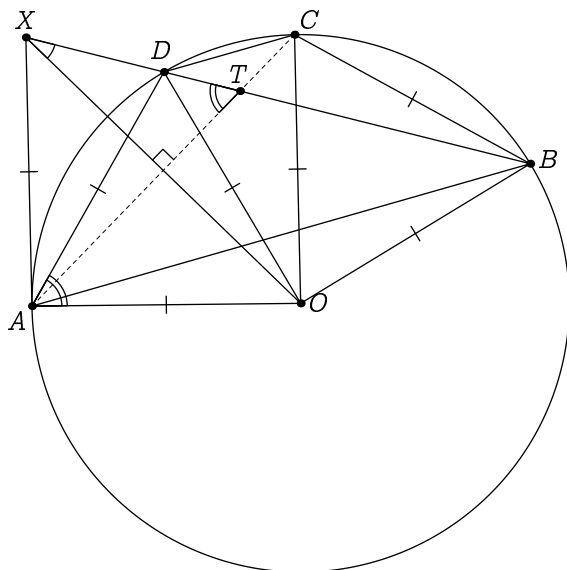
$$\sphericalangle ATD = \sphericalangle ACD + \sphericalangle CDT = \frac{1}{2} (\sphericalangle AOD + \sphericalangle COB) = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ.$$

Zatem $\sphericalangle OXD = 90^\circ - \sphericalangle ATD = 30^\circ$.

Uzyskujemy stąd równości

$$AO = AD \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle OAD = 2\sphericalangle OXD,$$

a także stwierdzamy, że punkty X i A leżą po tej samej stronie prostej OD . Zatem z twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym wnioskujemy, że X leży na okręgu o środku w A i promieniu $AO = AD$. W rezultacie $AX = AD$.



Zadanie 20.

Znajdź wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych x, y spełniających

$$\frac{x^2 + y^2}{2x + 3y} = 6.$$

Rozwiązanie: Przekształcamy równanie do postaci

$$x^2 + y^2 = 12x + 18y,$$

czyli równoważnie

$$(x - 6)^2 + (y - 9)^2 = 117.$$

Nietrudno sprawdzić, że jedyny sposób na przedstawienie 117 jako sumy dwóch kwadratów to $6^2 + 9^2$. Zatem para $(x - 6, y - 9)$ jest albo postaci $(\pm 6, \pm 9)$, albo $(\pm 9, \pm 6)$. Jednak x i y są liczbami dodatnimi, więc wykluczamy pary postaci $(-6, \pm 9)$, $(-9, \pm 6)$ oraz $(6, -9)$, pozostawiając w dalszych rozważaniach jedynie pary $(6, 9)$, $(9, 6)$ i $(9, -6)$, odpowiadające parom (x, y) postaci $(12, 18)$, $(15, 15)$ i $(15, 3)$. Pary te spełniają wyjściowe równanie, więc są to wszystkie jego rozwiązania.

Zadanie 21.

Znajdź wszystkie liczby pierwsze p , dla których liczba $p^2 - p + 1$ jest sześcianem liczby całkowitej.

Rozwiązanie: Załóżmy, że liczba $p^2 - p + 1$ jest sześcianem, czyli

$$p(p - 1) = p^2 - p = a^3 - 1 = (a - 1)(a^2 + a + 1),$$

dla pewnej liczby całkowitej $a > 1$. Skoro liczba p jest pierwsza, to

$$p \mid a - 1 \quad \text{lub} \quad p \mid a^2 + a + 1.$$

Pierwszy z tych przypadków nie może mieć miejsca. Mielibyśmy wówczas $p \leq a - 1$, więc

$$p(p - 1) \leq (a - 1)(a - 2) < a(a - 1) < (a - 1)(a^2 + a + 1),$$

co przeczy równości $p(p - 1) = (a - 1)(a^2 + a + 1)$.

Pozostaje rozważenie przypadku $p \mid a^2 + a + 1$. Z równości

$$p(p - 1) = (a - 1)(a^2 + a + 1)$$

otrzymujemy, że poniższe liczby są całkowite.

$$\frac{p-1}{a-1} = \frac{a^2+a+1}{p}.$$

Niech $k > 0$ będzie liczbą całkowitą równą powyższym ilorazom. Zauważmy, że

$$\text{NWD}(a-1, a^2+a+1) = \text{NWD}(a-1, 3),$$

gdyż $a^2+a+1 \equiv 1+1+1 \equiv 3 \pmod{a-1}$. Stąd $k \in \{1, 3\}$.

Jeśli $k = 1$, to $p = a$, więc $a^3 = a^2 - a + 1$, czyli $(a-1)(a^2+1) = 0$, co jest niemożliwe dla $a > 1$. Pozostaje przypadek, gdy $k = 3$. Wtedy

$$\frac{a^2+a+1}{p} = 3, \quad \frac{p-1}{a-1} = 3,$$

zatem $p = 3(a-1) + 1 = 3a - 2$ oraz

$$a^2 + a + 1 = 3p = 3(3a - 2) = 9a - 6.$$

Stąd

$$a^2 - 8a + 7 = 0 \implies (a-4)^2 = 9 \implies a = 7,$$

a więc $p = 3a - 2 = 19$. Wobec tego jedyną liczbą pierwszą spełniającą warunki zadania jest liczba 19.

Zadanie 22.

Na pewnym przyjęciu jest $n \geq 3$ uczestników, spośród których istnieją takie pary osób, które się znają i istnieją takie pary osób, które się nie znają. Okazało się, że niezależnie od tego jak rozdzielimy uczestników na dwie niepuste i rozłączne grupy, pewna osoba z pierwszej grupy zna pewną osobę z drugiej. Wykaż, że można wskazać taką trójkę uczestników A, B, C tego przyjęcia, że A i B się znają, B i C się znają, natomiast A i C się nie znają.

Rozwiązanie: Niech A będzie taką osobą, która nie zna któregoś z uczestników. Podzielmy wszystkich obecnych na przyjęciu na dwie niepuste i rozłączne grupy: pierwsza — A wraz z jego znajomymi, druga — wszyscy pozostali (są w niej te osoby, których A nie zna).

Z założenia zapisanego w treści zadania wynika, że pomiędzy członkami dwóch powyższych grup zachodzi przynajmniej jedna znajomość. Skoro jednak A nie zna nikogo z drugiej grupy, to pewien jego znajomy B musi znać pewnego uczestnika C z drugiej grupy. Trójka A, B, C spełnia zatem warunek wymagany w zadaniu.

Zadanie 23.

W wierzchołkach dziesięciokąta foremnego napisano 10 parami różnych liczb całkowitych. Wykaż, że istnieją takie cztery kolejne wierzchołki tego dziesięciokąta, że umieszczone w nich kolejno liczby a, b, c, d spełniają warunek $a + d > b + c$.

Rozwiązanie: Oznaczmy liczby w kolejnych wierzchołkach przez $a_1, a_2, \dots, a_{10}$. Przypuśćmy nie wprost, że nierówność z zadania nie zachodzi dla żadnych kolejnych wierzchołków, czyli

$$a_i + a_{i+3} \leq a_{i+1} + a_{i+2}, \quad (*)$$

dla wszystkich $i = 1, 2, \dots, 10$, gdzie indeksy traktujemy modulo 10 (na przykład dla $i = 9$ mamy nierówność $a_9 + a_2 \leq a_{10} + a_1$). Dodając strony owych dziesięciu nierówności, otrzymamy

$$2(a_1 + a_2 + \dots + a_{10}) \leq 2(a_1 + a_2 + \dots + a_{10}),$$

czyli równość. Zatem każda z nierówności $(*)$ musiała być równością, czyli

$$a_{i+3} - a_{i+1} = a_{i+2} - a_i.$$

Stąd wszystkie liczby postaci $a_{i+2} - a_i$ są sobie równe, dla $i = 1, 2, \dots, 10$. Jeśli oznaczymy ich wspólną wartość przez d , to otrzymamy

$$0 = (a_1 - a_3) + (a_3 - a_5) + (a_5 - a_7) + (a_7 - a_9) + (a_9 - a_1) = 5d,$$

czyli $d = 0$. Zatem $a_1 = a_3$, co przeczy założeniu, że liczby w wierzchołkach wielokąta są parami różne.

Zadanie 24.

Wykaż, że dla dodatnich liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność

$$x + y + \frac{|x-1|}{y} + \frac{|y-1|}{x} \geq 2.$$

Rozwiązanie: Rozpatrzmy trzy przypadki.

Przypadek 1. Jeśli $x, y \geq 1$, to

$$x + y + \frac{|x-1|}{y} + \frac{|y-1|}{x} \geq x + y \geq 2.$$

Przypadek 2. Jeśli $x, y \leq 1$, to

$$\frac{|x-1|}{y} = \frac{1-x}{y} \geq 1-x \quad \text{oraz} \quad \frac{|y-1|}{x} \geq 1-y,$$

więc

$$x+y+\frac{|x-1|}{y}+\frac{|y-1|}{x} \geq x+y+(1-x)+(1-y)=2.$$

Przypadek 3. Jedna z liczb x, y jest większa od 1, a druga jest mniejsza od 1. Załóżmy, bez straty ogólności, że $y < 1 < x$. Wtedy

$$x+y+\frac{|x-1|}{y}+\frac{|y-1|}{x} \geq x+y+\frac{1-y}{x} = \left(x+\frac{1}{x}\right) + \frac{y(x-1)}{x} \geq 2,$$

przy czym na końcu korzystamy z nierówności

$$x+\frac{1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} + 2 \geq 2$$

prawdziwej dla dowolnej liczby $x > 0$. We wszystkich przypadkach nierówność z treści zadania jest zatem spełniona.

Zadanie 25.

Znajdź wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych a, b spełniających warunek

$$ab \mid a^{2017} + b.$$

Rozwiązanie: Załóżmy, że takie pary liczb istnieją. Oznaczmy iloraz liczb $a^{2017} + b$ oraz ab przez k . Wtedy $kab = a^{2017} + b$, więc

$$a^{2017} = b \cdot (ak - 1).$$

Zatem $ak - 1 \mid a^{2017}$. Liczby te są jednak względnie pierwsze — dowolny dzielnik pierwszy $p \mid a^{2017}$ spełnia $p \mid a$, więc $p \mid ak$, a zatem $p \nmid ak - 1$. Stąd uzyskujemy $ak - 1 = 1$, czyli $ak = 2$. W rezultacie (a, k) jest jedną z par $(1, 2)$ lub $(2, 1)$. W obu przypadkach możemy wyliczyć b z równości

$$b = \frac{a^{2017}}{ak - 1} = a^{2017},$$

otrzymując pary (a, b) postaci $(1, 1)$ i $(2, 2^{2017})$. Bezpośrednio sprawdzamy, że pary te spełniają żądaną podzielność.

Zadanie 26.

Okręgi o_1 i o_2 przecinają się w punktach A i B . Punkty X i Y leżą odpowiednio na okręgach o_2 i o_1 w taki sposób, że proste BX oraz BY są prostopadłe. Oznaczmy przez O środek okręgu o_1 , a przez K — różny od punktu X punkt przecięcia prostej OX z okręgiem o_2 . Przez L oznaczmy wreszcie różny od punktu K punkt przecięcia prostej KY z okręgiem o_2 . Wykaż, że punkt X jest środkiem łuku AL okręgu o_2 .

Rozwiązanie: Zauważmy, że

$$\sphericalangle AKX = \sphericalangle ABX = 90^\circ - \sphericalangle ABY = \frac{180^\circ - \sphericalangle AOY}{2} = \sphericalangle AYO,$$

więc

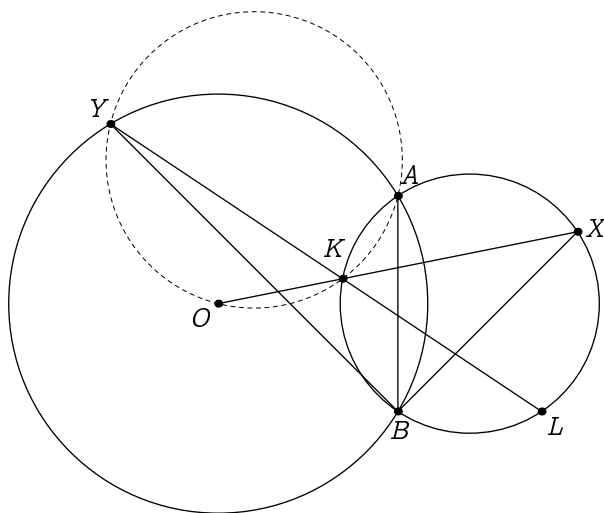
$$\sphericalangle AKO + \sphericalangle AYO = 180^\circ,$$

a zatem punkty A, Y, O, K leżą na okręgu.

Stąd uzyskujemy

$$\sphericalangle LAX = \sphericalangle LKX = \sphericalangle YKO = \sphericalangle YAO = \sphericalangle AYO = \sphericalangle AKX = \sphericalangle ALX,$$

Zatem $AX = LX$. W rezultacie punkt X jest w środku łuku AL okręgu o_2 .



Zadanie 27.

W rzędzie ułożone jest 100 dodatnich liczb całkowitych. Jeśli w ciągu tym znajdziemy dwie kolejno ułożone liczby a, b , przy czym a jest na lewo od b oraz $a < b$, to możemy wykonać operację polegającą na podwojeniu obu tych liczb i zamianie ich miejscami. Wykaż, że możemy wykonać tylko skończenie wiele takich operacji.

Rozwiązanie: Przyjmijmy, że każda liczba jest napisana na własnym, unikalnym żetonie, który zamieniamy wraz z liczbami. Wykażemy, że dowolne dwa żetony możemy zamienić ze sobą maksymalnie jeden raz.

Przypuśćmy nie wprost, że istnieją żetony z liczbami początkowymi $a < b$, które zamieniają się miejscami dwukrotnie. Wybierzmy te dwie zamiany tak, by liczba ruchów pomiędzy nimi była możliwie najmniejsza; nazwijmy te zamiany początkiem i końcem. Między początkiem a końcem żeton czerwony (z b) leży na lewo od żetonu niebieskiego (z a).

Weźmy dowolny trzeci żeton T . Jeżeli T kiedykolwiek znalazł się między czerwonym i niebieskim, to aby na końcu (gdy czerwony i niebieski znów sąsiadują) nie być między nimi, musiał zamienić się dokładnie raz z czerwonym i dokładnie raz z niebieskim. Gdyby z którymkolwiek z nich zamienił się dwukrotnie, mielibyśmy w rozpatrywanym przedziale parę żetonów zamieniającą się dwukrotnie, wbrew minimalności. Jeśli natomiast T nigdy nie był między nimi, to w tym przedziale nie zamienia się z żadnym z nich.

Bezpośrednio przed drugą zamianą, gdy czerwony żeton jest bezpośrednio na lewo od niebieskiego, na żetonach zapisane są odpowiednio liczby $2^{n+1}b$ i $2^{n+1}a$. Ponieważ $b > a$, mamy $2^{n+1}b > 2^{n+1}a$. Ruch jest dozwolony tylko wtedy, gdy lewa liczba jest mniejsza od prawej, więc w tej chwili nie można zamienić tych żetonów miejscami — sprzeczność.

Wobec tego żadna para żetonów nie zamieni się miejscami więcej niż raz, a liczba ruchów nie przekracza $\binom{100}{2}$. W szczególności jest to liczba skończona.

Zadanie 28.

Tysiąc uczniów pewnej szkoły pojechało na wycieczkę. Na miejsce wycieczki zawiozło ich 11 busów, a z powrotem odwiozło ich 10 busów. Każdy z tysiąca uczniów jechał i wracał w jednym z busów. Wykaż, że pewien uczeń jechał na miejsce wycieczki w mniej licznej grupie niż grupa, w której wracał.

Rozwiązanie: Dla $i = 1, 2, \dots, 1000$ oznaczmy przez x_i liczbę osób, z którą i -ty uczeń jechał na wycieczkę (wliczając siebie), a przez y_i liczbę osób, z którą wracał. Zauważmy, że

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_{1000}} = 11.$$

Rzeczywiście, jeśli pewnym busem jechało k osób, to każda wnosi $\frac{1}{k}$ do powyższej sumy. Stąd suma składników powyższej sumy odpowiadających temu busowi równa jest 1. Zatem suma wszystkich składników równa jest 11.

Analogicznie dostajemy

$$\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \dots + \frac{1}{y_{1000}} = 10.$$

Wynika stąd, że istnieje liczba i spełniająca warunek

$$\frac{1}{x_i} > \frac{1}{y_i}.$$

Inaczej bowiem otrzymalibyśmy oczywistą sprzeczność $11 \leq 10$. W rezultacie istnieje takie i , że $y_i > x_i$. Stąd i -ty uczeń spełnia warunek postawiony w treści zadania.

Zadanie 29.

Jaś i Staś bawią się dużym kawałkiem plasteliny. Na przemian, zaczynając od Jasia, wykonują oni następujące ruchy: Jaś bierze któryś z istniejących kawałków plasteliny i dzieli go na trzy części w dowolny sposób. Staś natomiast wybiera dowolne dwa kawałki i skleja je w jeden. Celem Jasia jest, żeby w pewnym momencie istniało co najmniej 100 kawałków plasteliny o równej masie. Czy może on, niezależnie od ruchów Stasia, osiągnąć ten cel?

Rozwiązanie: Jaś może osiągnąć swój cel.

Przyjmijmy, że oryginalny kawałek plasteliny miał masę 300. Strategia Jasia będzie następująca: dopóki istnieje kawałek o masie co najmniej $x \geq 3$, Jaś wybiera największy kawałek i dzieli go na trzy kawałki o masach 1, 1 oraz $x - 2$.

Twierdzimy, że po skończonej liczbie ruchów nastąpi moment, gdy przed ruchem Jasia wszystkie kawałki mają masę ≤ 2 .

Zauważmy, że dopóki Jaś będzie stosował się do opisanej wyżej strategii, w każdym momencie gry wszystkie kawałki będą miały całkowitą masę. Co więcej, jeśli liczba kawałków w grze po pewnym ruchu Jasia wynosiła n , to po następnym ruchu Stasia wyniesie ona $n - 1$, a po następującym po nim ruchu Jasia — $n + 1$. Zatem po każdym dwóch ruchach łączna liczba kawałków w grze rośnie o 1.

Twierdzimy, że po skończonej liczbie ruchów nastąpi moment, gdy przed ruchem Jasia wszystkie kawałki mają masę ≤ 2 . Gdyby przed każdym jego ruchem istniał kawałek o masie ≥ 3 , Jaś mógłby kontynuować dzielenie i po 600 ruchach mielibyśmy łącznie 301 kawałków. Ponieważ wszystkie masy są dodatnimi liczbami całkowitymi, ich suma byłaby większa lub równa 301, co przeczy zachowaniu sumy mas 300. Uzyskana sprzeczność dowodzi istnienia pożądanego momentu.

Weźmy pierwszy taki moment, gdy masy wszystkich kawałków są równe 1 lub 2. Niech x będzie liczbą kawałków o masie 1, a y — liczbą kawałków o masie 2. Użyjemy wtedy

$$x + 2y = 300.$$

Gdyby $x < 100$ i $y < 100$, to $x + 2y < 300$. Zatem $x \geq 100$ lub $y \geq 100$. Zatem w rozważanym momencie mamy co najmniej 100 kawałków o jednakowej masie.

Zadanie 30.

Czy istnieje taki nieskończony podzbiór zbioru dodatnich liczb całkowitych, że suma dowolnych skończenie wielu jego elementów nie jest postaci a^b , dla żadnych liczb całkowitych $a, b > 1$?

Rozwiązanie: Taki zbiór istnieje — przykładem jest zbiór wszystkich liczb postaci $2^n 3^{n+1}$, gdzie n jest dodatnią liczbą całkowitą. Rzeczywiście, rozpatrzmy dowolną sumę postaci

$$s = 2^{a_1} 3^{a_1+1} + 2^{a_2} 3^{a_2+1} + \dots + 2^{a_k} 3^{a_k+1},$$

dla pewnych dodatnich liczb całkowitych $a_1 < a_2 < \dots < a_k$. Możemy zapisać s w postaci

$$s = 2^{a_1} 3^{a_1+1} \cdot (1 + 2^{a_2-a_1} 3^{a_2-a_1} + \dots + 2^{a_k-a_1} 3^{a_k-a_1}).$$

Skoro jednak $a_i > a_1$, dla $i = 2, \dots, k$, to w sumie zapisanej w nawiasie po prawej wszystkie składniki poza pierwszym są podzielne przez 6. Zatem suma ta jest względnie pierwsza z 6.

Stąd widzimy, że wykładniki, z którymi liczby 2 i 3 występują w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby s , to odpowiednio a_1 i $a_1 + 1$. Gdyby liczba s była postaci a^b , dla pewnych liczb całkowitych $a, b > 1$, to mielibyśmy również $b \mid a_1$ i $b \mid a_1 + 1$, czyli

$$b \mid (a_1 + 1) - a_1 = 1.$$

Założyliśmy jednak, że $b > 1$, więc otrzymujemy sprzeczność. Zatem zbiór liczb postaci $2^n 3^{n+1}$ rzeczywiście spełnia warunek z treści zadania.

Zadanie 31.

Wykaż, że dla dowolnych parami różnych dodatnich liczb całkowitych a, b, c zachodzi

$$\text{NWD}(ab + 1, bc + 1, ca + 1) < \frac{a + b + c}{3}.$$

Rozwiązanie: Oznaczmy przez d lewą stronę nierówności zapisanej w treści zadania. Wtedy

$$d \mid (ab + 1) - (bc + 1) = b(a - c).$$

Zauważmy jednak, że liczby d i b są względnie pierwsze, skoro $d \mid ab + 1$. Stąd $d \mid a - c$. Analogicznie wnioskujemy, że $d \mid a - b$. Zatem

$$a \equiv b \equiv c \pmod{d}.$$

Możemy założyć, bez straty ogólności, że $a \geq b \geq c$. Ponieważ liczby te są parami różne i wszystkie przystają modulo d , więc różnice między nimi są $\geq d$:

$$b \geq c + d, \quad a \geq b + d \geq c + 2d.$$

Zatem

$$\frac{a + b + c}{3} \geq \frac{(c + 2d) + (c + d) + c}{3} = c + d > d.$$

Zadanie 32.

Znajdź wszystkie liczby całkowite $n > 1$ spełniające następujący warunek: dla dowolnej liczby pierwszej p dzielącej n liczba $n + p$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie: Zauważmy najpierw, że w przedziale $[n, n + \sqrt{n}]$ jest nie więcej niż jeden kwadrat. Gdyby do przedziału tego należały dwa kwadraty $x^2 < y^2$, to

$$y^2 \geq (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1 > x^2 + x \geq n + \sqrt{n}.$$

Przypuśćmy, że liczba n ma co najmniej trzy różne dzielniki pierwsze i oznaczmy najmniejsze z nich przez $p < q < r$. Wtedy $pqr \mid n$, więc

$$q^2 < qr < n \quad \text{oraz} \quad q < \sqrt{n}.$$

Stąd również $p < \sqrt{n}$. Stąd wynika jednak, że liczby $n + p$ i $n + q$ są kwadratami i obie należą do przedziału $[n, n + \sqrt{n}]$, co nie jest możliwe. Zatem n ma nie więcej niż dwa różne dzielniki pierwsze.

Jeśli p jest dzielnikiem pierwszym liczby n , wówczas liczba $n + p = p \cdot (m + 1)$ jest kwadratem, gdzie $m = \frac{n}{p}$. Wynika stąd, że $p \mid m + 1$, czyli $p \nmid m$, a także $p^2 \nmid n$. Wnioskujemy zatem, że każdy dzielnik pierwszy p występuje w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby n z wykładnikiem 1.

Skoro liczba $n > 1$ ma nie więcej niż dwa różne dzielniki pierwsze, to jest postaci p lub pq , dla pewnych liczb pierwszych p, q .

W pierwszym przypadku, skoro liczba $n + p = 2p$ jest kwadratem, to $p = 2$. Otrzymujemy w ten sposób rozwiązanie $n = 2$, które spełnia warunek z treści zadania.

W drugim przypadku liczby $pq + p$ i $pq + q$ są kwadratami. Załóżmy, bez straty ogólności, że $p > q$. Skoro liczba

$$pq + p = p(q + 1)$$

jest kwadratem, to $p \mid q + 1$, więc $p \leq q + 1$. Skoro jednak $p > q$, to $p = q + 1$. Jedyne liczby pierwsze spełniające tę równość, to 2 i 3. Otrzymujemy zatem $n = 6$. W tym jednak przypadku liczba $n + 2 = 8$ nie jest kwadratem.

Ostatecznie jedyną liczbą n spełniającą warunki zadania jest liczba 2.

Zadanie 33.

Dane są nieskończone zbiory A i B dodatnich liczb całkowitych. Czy możliwe jest, że wszystkie liczby, które można przedstawić jako iloczyn $a \cdot b$, dla $a \in A$ oraz $b \in B$, to dokładnie wszystkie większe od 2025 liczby postaci n^m , dla pewnych liczb całkowitych $n, m > 1$?

Rozwiązanie: Nie jest to możliwe.

Założmy przeciwnie, że zbiory A i B spełniają warunek z treści zadania. Oznaczmy przez S zbiór wszystkich iloczynów postaci ab dla $a \in A$ i $b \in B$. Nazwijmy liczby postaci n^m dla $n, m > 1$ *potęgami*. Zatem S jest zbiorem wszystkich potęg większych od 2025.

Niech $p > 2025$ będzie liczbą pierwszą. Gdybyśmy mieli $p \in A$, to wszystkie elementy zbioru B musiałyby być podzielne przez p , skoro pomnożone przez p musiałyby być potęgą. Wtedy jednak wszystkie elementy zbioru S również byłyby podzielne przez p , więc zbiór S nie zawierałby wszystkich potęg. Zatem $p \notin A$. Analogicznie uzasadniamy, że $p \notin B$.

Zauważmy jednak, że liczba $p^2 \in S$, jako potęga, jest iloczynem liczby z A i liczby z B . Stąd $p^2 \in A$ i $1 \in B$, lub na odwrót: $p^2 \in B$ i $1 \in A$. Bez straty ogólności założmy, że zachodzi pierwszy przypadek.

Niech $q > 2025$ będzie liczbą pierwszą różną od p . Zauważmy, że $q^3 \in S$, ale $q \notin A$ oraz $q \notin B$, więc $q^3 \in A$ lub $q^3 \in B$. W drugim przypadku liczba p^2q^3 byłaby jednak iloczynem liczby z A i liczby z B , a liczba ta nie jest potęgą. Zatem wykluczamy ten przypadek i rozważamy sytuację, gdy $q^3 \in A$.

Zauważmy, że dla dowolnej liczby pierwszej $r > 2025$ mamy $r^2 \in A$ i $r^2 \notin B$. Rzeczywiście, liczba r^2 musi należeć do zbioru A lub do zbioru B , a nie może ona należeć do B , gdyż wtedy liczba q^3r^2 byłaby w S , mimo że nie jest potęgą.

Wykażemy poprzez indukcję, że dla dowolnej liczby $n \geq 2$ i dowolnej liczby pierwszej $r > 2025$ zachodzi

$$r^n \in A \quad \text{oraz} \quad r^n \notin B.$$

Krok bazowy indukcji dla $n = 2$ uzasadniliśmy wyżej.

Założmy zatem, że teza indukcji jest prawdziwa dla wszystkich liczb mniejszych od n . Dla dowolnej liczby pierwszej r mamy $r^n \in S$, więc liczba ta jest iloczynem liczby z A i liczby z B . Z założenia indukcyjnego mamy natomiast $s^{n-1} \in A$, gdzie $s > 2025$ jest dowolną liczbą pierwszą różną od r . Liczba $s^{n-1}r^n$ nie jest potęgą, więc $r^n \notin B$. Z założenia indukcyjnego liczby $r^2, r^3, \dots, r^{n-1}$ też nie należą do B , więc z obserwacji poczynionej na początku rozwiązania mamy $r \notin B$. Zatem jedyny możliwy sposób na przedstawienie liczby r^n jako iloczynu liczby z A i liczby z B , to $r^n \cdot 1$. Stąd $r^n \in A$. Krok indukcyjny jest zakończony.

Wykażemy teraz, że w zbiorze B może znaleźć się tylko liczba 1. To doprowadzi oczywiście do sprzeczności z założeniem, że zbiór B jest nieskończony.

Założmy zatem, że pewna liczba $k > 1$ należy do zbioru B . Niech $r > 2025$ będzie dowolną liczbą pierwszą, która nie dzieli k . Wiemy, że $r^n \in A$, dla wszystkich $n \geq 2$. Zatem wszystkie liczby postaci $r^n \cdot k$ są potęgami.

Niech n będzie liczbą pierwszą większą od k . Wtedy wykładnik, z którym r występuje w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby r^nk , równy jest dokładnie n . Skoro zatem r^nk jest potęgą, a n liczbą pierwszą, to r^nk jest potęgą postaci m^n , dla pewnego $m > 1$. Zatem sama liczba k jest n -tą potęgą. To jest jednak niemożliwe — z założenia mamy bowiem

$$1 < k < n < 2^n \leq m^n,$$

przy czym nierówność $n < 2^n$, prawdziwą dla każdej dodatniej liczby całkowitej n , łatwo udowodnić choćby przez indukcję. Zatem liczba k nie jest postaci l^n , dla pewnej liczby całkowitej l . Uzyskana sprzeczność kończy dowód.

Zadanie 34.

Dane są dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c , takie że $a + b + c = 3$. Wykaż, że

$$\frac{a}{b+1} + \frac{b}{c+1} + \frac{c}{a+1} \geq \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}.$$

Rozwiązanie: Po podstawieniu $x = a - 1, y = b - 1$ i $z = c - 1$ nierówność z treści zadania sprowadza się do postaci

$$\frac{x}{y+2} + \frac{y}{z+2} + \frac{z}{x+2} \geq 0.$$

Z założeń o liczbach a, b, c mamy również $x + y + z = 0$ oraz $x, y, z > -1$. Mnożąc strony uzyskanej wyżej nierówności przez dodatnią liczbę $(x+2)(y+2)(z+2)$, sprowadzamy tę nierówność równoważnie do postaci

$$x(x+2)(z+2) + y(y+2)(x+2) + z(z+2)(y+2) \geq 0.$$

Korzystając z równości $x + y + z = 0$, przekształcamy nierówność równoważnie:

$$(x^2 + 2x)(z+2) + (y^2 + 2y)(x+2) + (z^2 + 2z)(y+2) \geq 0,$$

czyli równoważnie

$$x^2z + 2xz + 2x^2 + 4x + y^2x + 2xy + 2y^2 + 4y + z^2y + 2yz + 2z^2 + 4z \geq 0,$$

czyli równoważnie

$$x^2z + y^2x + z^2y + 2(x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz + xz) \geq 0.$$

Mamy jednak

$$0 = (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz,$$

więc nierówność wyżej przekształcić można równoważnie do postaci

$$x^2z + y^2x + z^2y + x^2 + y^2 + z^2 \geq 0.$$

Ostatnią nierówność można natomiast zapisać w postaci

$$x^2(z+1) + y^2(x+1) + z^2(y+1) \geq 0.$$

Uzyskana nierówność jest natomiast prawdziwa, skoro $x, y, z > -1$. Przekształciliśmy zatem równoważnie nierówność z treści zadania i uzyskaliśmy nierówność, która jest prawdziwa. Zatem również wyjściowa nierówność jest prawdziwa.

Zadanie 35.

Dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają równość

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4.$$

Wykaż, że suma dwóch spośród liczb a, b, c, d nie przekracza 2.

Rozwiązanie: Przypuśćmy nie wprost, że teza nie zachodzi. Bez straty ogólności niech $a \leq b \leq c \leq d$. Suma $a + b$ jest zatem najmniejsza z sum dwóch spośród liczb a, b, c, d . Aby wykorzystać założenie, że teza jest fałszywa, wystarczy rozważyć warunek $a + b > 2$. Z nierówności między średnią kwadratową i arytmetyczną mamy natomiast

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a + b}{2} \right)^2 > 1^2 = 1$$

Stąd $a^2 + b^2 > 2$. Skoro jednak $c^2 \geq a^2$ i $d^2 \geq b^2$, to

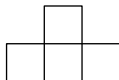
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 2(a^2 + b^2) > 4.$$

Otrzymana sprzeczność z założeniem zadania kończy dowód.

Zadanie 36.

Wielokąt, którego wszystkie wierzchołki mają obie współrzędne całkowite, nazwiemy *kanciatym*, jeśli każdy jego bok jest równoległy do jednej z dwóch osi układu współrzędnych. Ile osi symetrii może mieć kanciaty wielokąt? Wskaż (i uzasadnij) wszystkie możliwe odpowiedzi.

Rozwiązanie: Możliwa liczba osi symetrii jest równa 0, 1, 2 lub 4. Kanciate wielokąty o wymienionych liczbach osi symetrii są przedstawione poniżej. Pozostaje więc wykazać, że nie ma innych możliwości.



Niech l będzie osią symetrii kanciatego wielokąta W , a AB dowolnym jego bokiem. Oznaczmy przez $A'B'$ obraz tego odcinka w symetrii względem prostej l . Skoro l jest osią symetrii, to odcinek $A'B'$ jest również bokiem W , a w szczególności jest równoległy lub prostopadły do odcinka AB .

Przyjmijmy, że kąt między równoległymi prostymi ma miarę 0° . Oznaczmy kąt między prostą AB a prostą l przez α , gdzie $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$. Wtedy α jest również kątem między prostą l , a odcinkiem $A'B'$. Stąd kąt między prostymi AB i $A'B'$ jest równy 2α lub $180^\circ - 2\alpha$ (gdy $\alpha > 45^\circ$). Zatem liczba ta jest równa 0° lub 90° , czyli miara kąta α jest równa 0° lub 45° . Wnioskujemy stąd, że osie symetrii wielokąta kanciastego mogą przyjmować tylko cztery możliwe kierunki – są one równoległe do osi OX układu współrzędnych, prostopadłe do niej, albo tworzą z nią kąt 45° .

Wykażemy teraz następujący znany fakt.

Lemat: Osie symetrii dowolnego wielokąta W (niekoniecznie kanciastego) przecinają się w jednym punkcie (jeśli są co najmniej dwie).

Dowód. Oznaczmy przez (x_i, y_i) współrzędne wierzchołków wielokąta W , przy czym $i = 1, 2, \dots, k$. Środkiem ciężkości wielokąta W nazywamy punkt

$$\left(\frac{x_1 + \dots + x_k}{k}, \frac{y_1 + \dots + y_k}{k} \right).$$

Niech l będzie dowolną prostą, a W' — obrazem wielokąta W w symetrii względem prostej l . Wtedy środki ciężkości W i W' są punktami symetrycznymi względem l . Jeśli zatem za l weźmiemy oś symetrii wielokąta W , to $W = W'$ i rozważane środki ciężkości się pokrywają. Skoro środki te są symetryczne względem l , to oba leżą na l . Zatem wszystkie osie symetrii W przechodzą przez jego środek ciężkości. $\square$

Wiemy zatem w szczególności, że żadne dwie osie symetrii W nie są równoległe. Skoro wiemy, że mogą mieć one tylko cztery kierunki, to wnioskujemy, że osie symetrii są co najwyżej 4. Pozostaje wykazać, że nie może ich być dokładnie trzech.

Przypuśćmy przeciwnie. Nazwijmy trzy osie symetrii wielokąta W k, l, m i niech P będzie ich punktem wspólnym. Przyjmijmy też, że proste k i l są prostopadłe, a prosta m jest pod kątem 45° do obu z nich. Wykażemy, że prosta n prostopadła do prostej m i przechodząca przez punkt P jest również osią symetrii wielokąta W .

Rzeczywiście, nietrudno przekonać się, że jeśli odbijemy dowolny punkt Q wielokąta W najpierw względem prostej k , a następnie względem prostej l , to otrzymamy odbicie Q' punktu Q względem P . Skoro wielokąt W jest symetryczny względem prostych k i l , to punkt Q' też leży w tym wielokącie. Co więcej, odbicie Q'' punktu Q' względem prostej m pokrywa się z odbiciem Q względem prostej n . Skoro wielokąt W jest symetryczny względem prostej m , to punkt Q'' również leży w wielokącie W .

Podsumowując, dla dowolnego punktu wielokąta W , jego odbicie symetryczne względem prostej n również leży w tym wielokącie. To oznacza dokładnie, że wielokąt W jest symetryczny również względem prostej n .

Zadanie 37.

Okręgi o_1 i o_2 o środkach odpowiednio w punktach O_1 i O_2 przecinają się w punktach A i B . Prosta O_1B przecina okrąg o_2 po raz drugi w punkcie C , a prosta O_2A przecina okrąg o_1 po raz drugi w punkcie D . Przez X oznaczamy drugi punkt przecięcia prostej AC z okręgiem o_1 , a przez Y oznaczamy drugi punkt przecięcia prostej BD z okręgiem o_2 . Wykaż, że $CX = DY$.

Rozwiązanie: Z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym, mamy

$$\sphericalangle ACB = \frac{1}{2} \sphericalangle AO_2B = 90^\circ - \sphericalangle BAO_2,$$

natomiast

$$\sphericalangle BAO_2 = 180^\circ - \sphericalangle BAD = 180^\circ - \frac{1}{2}(360^\circ - \sphericalangle DO_1B) = \frac{1}{2} \sphericalangle DO_1B.$$

Skoro zaś $\sphericalangle BAD = \frac{1}{2} \sphericalangle BO_1D$, to

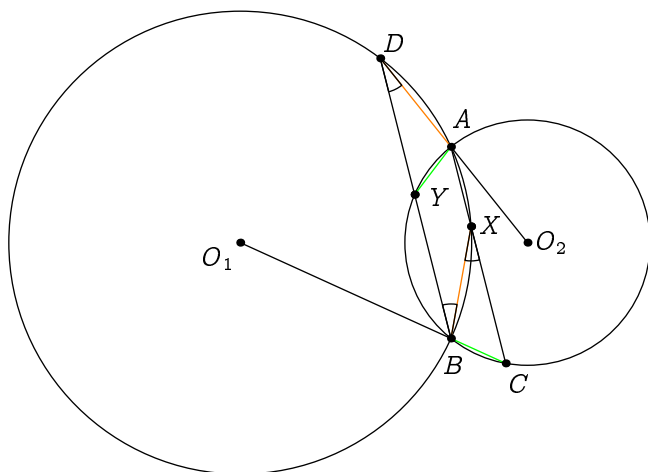
$$\sphericalangle ACB = 90^\circ - \sphericalangle BAO_2 = \frac{180^\circ - \sphericalangle DO_1B}{2} = \sphericalangle DBO_1.$$

Zatem proste BD i AC są równoległe.

Wnioskujemy stąd, że czworokąty $DBAX$ i $CAYB$ są trapezami wpisanymi w okręgi, czyli są trapezami równoramiennymi. Stąd $CB = AY$ i $BX = AD$. Dostajemy też równość

$$\sphericalangle YDA = \sphericalangle BDA = \sphericalangle DBX = \sphericalangle BXC$$

i analogicznie $\sphericalangle DY A = \sphericalangle BCX$. W rezultacie trójkąty DAY i BXC są przystające (mają parami równe dwa kąty i dwa boki), skąd wnioskujemy, że $DY = XC$.



Zadanie 38.

Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC . Niech M będzie środkiem boku AC , a D niech będzie spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A na prostą BC . Prosta DM przecina okrąg opisany na trójkącie AMO po raz drugi w punkcie P . Wykaż, że punkty B, P, O są współliniowe.

Rozwiązanie: Załóżmy, że punkty A, M, O, P leżą na okręgu w tej kolejności. W drugim przypadku rozumiemy podobnie.

Zachodzą równości

$$\sphericalangle AOP = \sphericalangle AMP = \sphericalangle AMD,$$

a skoro punkt M jest środkiem przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego CAD , to jest też środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie. Zatem

$$\sphericalangle AMD = 2 \sphericalangle ACD,$$

więc

$$\sphericalangle AOP = 2 \sphericalangle ACD = 2 \sphericalangle ACB = \sphericalangle AOB.$$

W rezultacie punkt P leży na prostej BO .

